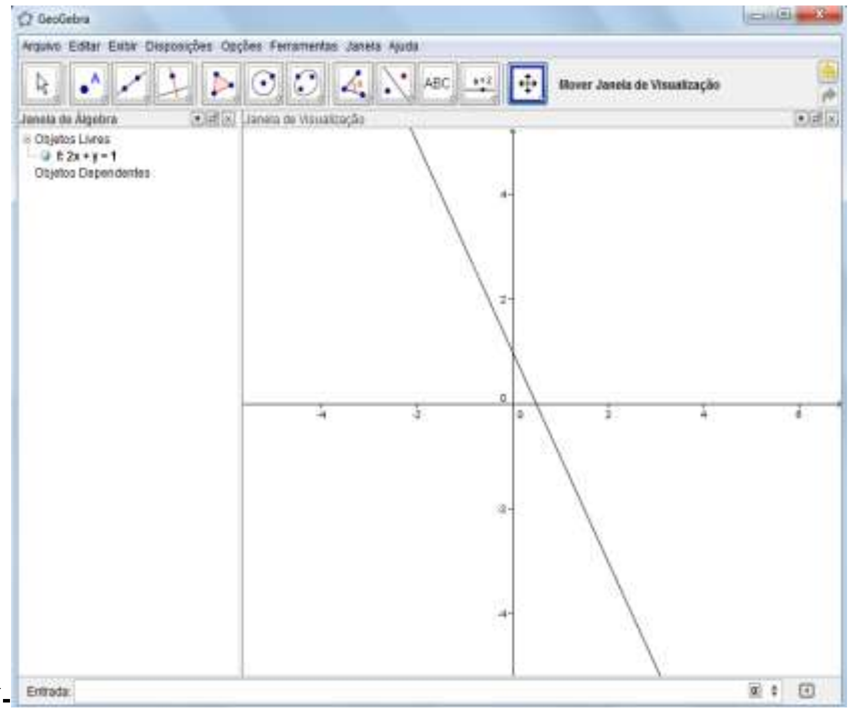
FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO CECIERJ/CONSÓSIO CEDERJ

Matemática 2º Ano – 4º Bimestre /2012

Plano de Trabalho 01

Sistemas Lineares

GRUPO 8



~´-

Fonte:

Tarefa 01

Cursista: Flávio de Aguiar.

Tutora: Silvana Ribeiro Lima Cavalcante de Araujo

Sumário

INTRODUÇÃO

Com esse plano de aula sobre Sistemas Lineares, devemos compreender o conceito e suas aplicabilidades, favorecendo assim um melhor processo de ensino aprendizado, não deixando de repassar para o aluno o fator histórico, sua aplicabilidade e vídeos para complementar a aprendizagem dos alunos.

Definiremos sistemas lineares e mostraremos resoluções de Equações Lineares, resolução de Sistemas Lineares 2x2 pelo Método da Substituição e Adição, Sistemas Equivalentes, Regra de Crame, o Método de Escalonamento, Interpretações Geométricas e Classificação de Sistemas 2x2. Devemos deixar bem claro que exercícios repetitivos e poucas aulas contextualizadas não atendem mais os nossos alunos.

Para um bom desenvolvimento da matéria, o aluno deverá dominar alguns conceitos básicos como soma e subtração dos números reais e resolução de determinantes.

DESENVOLVIMENTO

ATIVIDADE 01

- **HABILIDADE:** Saber definir e classificar os diversos tipos de sistemas lineares.
- **PRÉ-REQUISITOS:** Realizar operações com matrizes e determinantes.
- **TEMPO DE DURAÇÃO:** 320 minutos (8 tempos de aula).

  Terça 2 tempos de 40minutos;(80 min.)
  Quinta 2 tempos de 40 minutos;(80 min.)
  Terça 2 tempos de 40 minutos; (80 min.)
  Quinta 2 tempos de 40 minutos;(80 min.)

- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:** Leitura de um texto histórico sobre sistemas lineares, lista de exercícios, explicação e demonstrações no quadro branco, apresentação de vídeos com auxílio do notebook e data-show.

- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Individual.

- **OBJETIVOS:** Conceituar equação linear, procurar soluções de uma equação linear, resolver sistemas lineares, associar uma matriz completa ou incompleta, classificar um sistema linear como possível e determinado e indeterminado ou impossível e utilizar a Regra de Cramer na solução de um sistema linear e contextualizar todo conteúdo.

- **METODOLOGIA ADOTADA:**

  1. Leitura prévia da matéria no livro didático pelo aluno e realização de um fichamento;

2. O aluno irá resolver os exercícios propostos pelo livro didático adotado no ano regente;
3. Aplicação de lista de exercícios de fixação e complementares;
4. Texto histórico seguido de um vídeo para melhor compreensão do conteúdo.

ATIVIDADE 01 EM PRÁTICA

LEITURA DE UM TEXTO HISTÓRICO SOBRE SISTEMAS LINERAES

Na matemática ocidental antiga são poucas as aparições de sistemas de equações lineares. No Oriente, contudo, o assunto mereceu atenção bem maior. Com seu gosto especial por diagramas, os chineses representavam os sistemas lineares por meio de seus coeficientes escritos com barras de bambu sobre os quadrados de um tabuleiro. Assim acabaram descobrindo o método de resolução por eliminação — que consiste em anular coeficientes por meio de operações elementares. Exemplos desse procedimento encontram-se nos Nove capítulos sobre a arte da matemática, um texto que data provavelmente do século 111 a.C.

Mas foi só em 1683, num trabalho do japonês Seki Kowa, que a idéia de determinante (como polinômio que se associa a um quadrado de números) veio à luz. Kowa, considerado o maior matemático japonês do século XVII, chegou a essa noção através do estudo de sistemas lineares, sistematizando o velho procedimento chinês (para o caso de duas equações apenas).

O uso de determinantes no Ocidente começou dez anos depois num trabalho de Leibniz, ligado também a sistemas lineares. Em resumo, Leibniz estabeleceu a condição de compatibilidade de um sistema de três equações a duas incógnitas em termos do determinante de ordem 3 formado pelos coeficientes e pelos termos independentes (este determinante deve ser nulo). Para tanto criou até uma notação com índices para os coeficientes: o que hoje, por exemplo, escreveríamos como a_{12}, Leibniz indicava por 1_2.

A conhecida regra de Cramer para resolver sistemas de n equações a n incógnitas, por meio de determinantes, é na verdade uma descoberta do escocês Colin Maclaurin (1698-1746), datando provavelmente de 1729, embora só publicada postumamente em 1748 no seu Treatise of algebra. Mas o nome do suíço Gabriel Cramer (1704-1752) não aparece nesse episódio de maneira totalmente gratuita. Cramer também chegou à regra (independentemente), mas depois, na sua Introdução à análise das curvas planas (1750), em conexão com o problema de determinar os coeficientes da cônica geral $A + By + Cx + Dy^2 + Exy + x^2 = 0$.

O francês Étienne Bézout (1730-1783), autor de textos matemáticos de sucesso em seu tempo, sistematizou em 1764 o processo de estabelecimento dos sinais dos termos de um determinante. E coube a outro francês, Alexandre Vandermonde (1735-1796), em 1771, empreender a primeira abordagem da teoria dos determinantes independente do estudo dos sistemas lineares —

embora também os usasse na resolução destes sistemas. O importante teorema de Laplace, que permite a expansão de um determinante através dos menores de r filas escolhidas e seus respectivos complementos algébricos, foi demonstrado no ano seguinte pelo próprio Laplace num artigo que, a julgar pelo título, nada tinha a ver com o assunto: "Pesquisas sobre o cálculo integral e o sistema do mundo".

O termo determinante, com o sentido atual, surgiu em 1812 num trabalho de Cauchy sobre o assunto. Neste artigo, apresentado à Academia de Ciências, Cauchy sumariou e simplificou o que era conhecido até então sobre determinantes, melhorou a notação (mas a atual com duas barras verticais ladeando o quadrado de números só surgiria em 1841 com Arthur Cayley) e deu uma demonstração do teorema da multiplicação de determinantes — meses antes J. F. M. Binet (1786-1856) dera a primeira demonstração deste teorema, mas a de Cauchy era superior.

Além de Cauehy, quem mais contribuiu para consolidar a teoria dos determinantes foi o alemão Carl G. J. Jacobi (1804-1851), cognominado às vezes "o grande algorista". Deve-se a ele a forma simples como essa teoria se apresenta hoje elementarmente. Como algorista, Jacobi era um entusiasta da notação de determinante, com suas potencialidades. Assim, o importante conceito de jacobiano de uma função, salientando um dos pontos mais característicos de sua obra, é uma homenagem das mais justas.

HYGINO H. DOMINGUES
fonte: http://www.somatematica.com.br/historia/sistemas.php

- Leitura das páginas do livro / (15 minutos);
- Fichamento apresentado pelos aluno e início da aula sobre sistemas lineares;

VÍDEO SOBRE SISTEMAS LINEARES

- http://www.youtube.com/watch?v=TE32uyEkAZc

DEFINIÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

De modo geral, denomina-se equação linear toda equação que pode ser escrita na forma:

a1x1 + a2x2 + a3x3 + ... + anxn = b na qual :

x1,x2,x3,...,xn são incógnitas;

a1,a2,a3,...,na são números reais chamados coeficientes das incógnitas;

b é o termo independente.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1- Verifique se o par ordenado:

a) (6,2) é uma solução da equação linear 4x -3y = 18

b) (3,-5) é uma solução da equação linear 2x + 3y = 21

2- Verifique se o termo ordenado:

a) (1,3,2) é uma solução da equação linear 2x + y + 5z = 15

b) (0,0,0) é uma solução da equação da equação linear 2x + 7y – 3z = 0

MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO

O método da substituição consiste em isolar uma incógnita em qualquer uma das equações, obtendo igualdade com um polinômio. Então deve-se substituir essa mesma incógnita em outra das equações pelo polinômio ao qual ela foi igualada.

SISTEMAS COM DUAS EQUAÇÕES

Um sistema com duas equações lineares se apresenta por:

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = dx + c \end{cases}$$

Onde x e y são as incógnitas.

Para solucioná-lo por substituição, substituem-se as variáveis em suas equações por seus polinômios correspondentes:

EXEMPLO:

2x – y = 9

X + y = 12

X= 12-y / logo

2(12-y) –y = 9

24-2y –y = 9

24-3y = 9

-3y=9-24

Y = -15/-3 / x= 5

E

2x –y = 9

2(5) –y =9

10 –y = 9

-y=-1

Y=1 S=(5,1)

MÉTODO DA SOMA

O método da soma é o mais direto para se resolverem os sistemas, pois é uma forma simplificada de usar o método da substituição. Só é possível quando as equações são dispostas de forma que, ao subtrair ou somar os polinômios das equações, todas as incógnitas, exceto uma, se anulam. É mais simples e direto que o outro método

EXEMPLO

$$\begin{cases} 2x - y = 9 \\ x + y = 12 \end{cases}$$

3X=21 / X=7

Y=12-7

Y=5 E 2X – 5 = 9 / 2X = 9+5 / 2X = 14 / X= 7

S= (7,5)

LISTA DE EXERCÍCIO PARA FIXAÇÃO

1- Resolva os sistemas lineares pelo método de substituição ou adição:

A) 2X + 3Y = 13
3X – 5Y = 10

B) 2X – 5Y = 11
3X + 6Y = 3

C)

$$\begin{cases} x + y = 3000 \\ x = y + 400. \end{cases}$$

Perceba que este caso, apesar de ter as duas incógnitas nas duas equações, pode ser resolvido essencialmente da mesma forma que acima… É como se conhecessemos o valor de *x* (na segunda equação), a diferença é que este valor está dependendo de *y*, mas isso não impede que façamos o mesmo que antes: **substituir este valor na outra equação**.

$$x + y = 3000 \quad \Rightarrow \quad (y + 400) + y = 3000 \quad \Rightarrow \quad y = 1300.$$

Conhecendo o valor de *y*, basta usar qualquer equação para encontrar o *x*… Vamos usar a segunda:

$$x = y + 400 \quad \Rightarrow \quad x = 1300 + 400 \quad \Rightarrow \quad x = 1700.$$

Solução: $x = 1700$ e $y = 1300$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DOS SISTEMAS LINEARES 2X2

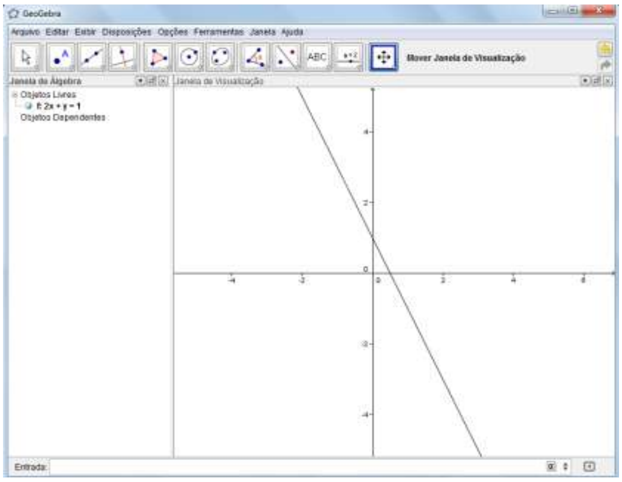
Os pares ordenados de números reais que são soluções de uma equação linear com duas incógnitas determinam, no gráfico, **uma reta**. A intersecção das duas retas das equações do sistema determina sua solução, se existir.

Utilização do geogebra para demonstração da construção do gráfico.

(uso do notebook em sala de aula)

Ex.:

Por exemplo, se digitar “f:2x+y=1”, na tela aparecerá o gráfico correspondente a equação digitada (uma reta).



EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Lista de exercícios(10 exercícios – fazer em casa) de construções de gráficos dos sistemas lineares 2x2

REGRA DE CRAMER

A Regra de Cramer é um método resolver sistemas lineares utilizando determinantes.

Considere o sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{a}x + \mathbf{b}y = \mathbf{e} \\ \mathbf{c}x + \mathbf{d}y = \mathbf{f} \end{cases}$$

Pela regra de Cramer:

$$x = \frac{Dx}{D}$$

$$y = \frac{Dy}{D}$$

Em que **Dx** é o determinante da matriz dos termos do sistema excluindo a linha dos coeficientes de x. Os coeficientes "e" e "f" devem ficar à esquerda da matriz, e os coeficientes "b" e "d" à direita. **D** é o determinante da matriz dos coeficientes das incógnitas.

$$Dx = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Para calcular o y basta trocar o Dx pelo Dy, que deve ser calculado da mesma forma, calculando o determinante da matriz dos termos do sistema excluindo a coluna dos coeficientes de y. No caso de Dy, no entanto, a coluna contendo as constantes "a" e "c" fica à esquerda, enquanto a coluna com "e" e "f" fica à direita.

$$Dy = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}$$

EXERCÍCIO DE FIXAÇÃO

1- Utilizando a Regra de Cramer, determine o valor da incógnita y no seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x+3y+3z=18 \\ 3x+2y+5z=23 \\ 5x+4y+2z=27 \end{cases}$$

RESPOSTA:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}=8+75+36-30-18-40=31$$

$$Dy=\begin{vmatrix} 2 & 18 & 3 \\ 3 & 23 & 5 \\ 5 & 27 & 2 \end{vmatrix}=92+450+243-345-108-270=62$$

Y= DY/D

Y=62/31

Y=2

O valor da incógnita y no sistema de equações é 2.

2-Um clube promoveu um show de música popular brasileira ao qual compareceram 200 pessoas, entre sócios e não sócios. No total, o valor arrecadado foi de R$ 1 400,00 e todas as pessoas pagaram ingresso. Sabendo que o preço do ingresso foi R$ 10,00 e que cada sócio pagou metade desse valor, determine o número de sócios e não sócios que compareceram ao show.

RESPOSTA POR CRAMER :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 10 - 5 = 5$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 200 & 1 \\ 1400 & 10 \end{vmatrix} = 2000 - 1400 = 600$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 1 & 200 \\ 5 & 1400 \end{vmatrix} = 1400 - 1000 = 400$$

X= DX/D

X=600/5

X=120

E

Y=DY/D

Y=400/5

Y=80

3-Carlos e sua irmã Andreia foram com seu cachorro Bidu à farmácia de seu avô. Lá encontraram uma velha balança com defeito, que só indicava corretamente pesos superiores a 60 kg. Assim, eles se pesaram dois a dois e obtiveram as seguintes marcas:

Carlos e o cão pesam juntos 87 kg;
Carlos e Andreia pesam 123 kg;
Andreia e Bidu pesam 66 kg.

Determine o peso de cada uma deles:

ANDREIA: a

BIDU: b

CARLOS: c

$$\begin{cases} b+c=87 \\ a+c=123 \\ a+b=66 \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0+1+1-0-0-0=2$$

$$Db=\begin{vmatrix} 0 & 87 & 1 \\ 1 & 123 & 1 \\ 1 & 66 & 0 \end{vmatrix}=0+87+66-123-0-0=30$$

b = Db / D

b = 30/ 2

b =15

b + c = 87

15 + c = 87

C = 87 – 15

C = 72

a + b = 66

a + 66 – 15

a = 51

Andreia pesa 51 kg, Bidu 15 kg e Carlos 72 kg

- **Lista de exercícios para fazer em casa;**

VÍDEO PARA REVISÃO DA REGRA DE CRAMER

- **http://www.youtube.com/watch?v=1hC-hAwhg-w.**

CLASSIFICAÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR 2X2

SISTEMA *1. POSSÍVEL(TEM SOLUÇÃO) .... DETERMINADO(A SOLUÇÃO É ÚNICA) – (SPD);*

2. POSSÍVEL(TEM SOLUÇÃO) ..........INDETERMINADO 9 TEM INFINITAS SOLUÇÕES)- (SPI);

SISTEMA IMPOSSÍVEL (NÃO TEM SOLUÇÃO) – (S.I).

ESCALONAMENTO

Karl Friedrich Gauss - astrônomo, matemático e físico alemão - 1777/1855.

O método de eliminação de Gauss para solução de sistemas de equações lineares, também conhecido como escalonamento, baseia-se em três transformações elementares, a saber:

Exemplo: os sistemas de equações lineares

2x + 3y = 10

5x - 2y = 6

5x - 2y = 6

2x + 3y = 10

são obviamente equivalentes, ou seja, possuem o mesmo conjunto solução. Observe que apenas mudamos a ordem de apresentação das equações.

T2 - um sistema de equações não se altera, quando multiplicamos ambos os membros de qualquer uma das equações do sistema, por um número real não nulo.

Exemplo: os sistemas de equações lineares

3x + 2y - z = 5

2x + y + z = 7

x - 2y + 3z = 1

3x + 2y - z = 5

2x + y + z = 7

3x - 6y + 9z = 3

são obviamente equivalentes, pois a terceira equação foi multiplicada membro a membro por 3.

T3: um sistema de equações lineares não se altera, quando substituímos uma equação qualquer por outra obtida a partir da adição membro a membro desta equação, com outra na qual foi aplicada a transformação T2.

Exemplo: os sistemas

15x - 3y = 22

5x + 2y = 32

15x - 3y = 22
...... - 9y = - 74
são obviamente **<u>equivalentes</u>** (ou seja, **<u>possuem o mesmo conjunto solução</u>**), pois a segunda equação foi substituída pela adição da primeira equação, com a segunda multiplicada por (-3).

Vamos resolver, a título de exemplo, um sistema de equações lineares, pelo método de Gauss ou escalonamento.

Seja o sistema de equações lineares:

. x + 3y - 2z = 3 .Equação 1
2x . - .y + z = 12 Equação 2
4x + 3y - 5z = 6 .Equação 3

SOLUÇÃO:
1 - Aplicando a transformação **T1**, permutando as posições das equações 1 e 2, vem:

2x .-...y + z = 12
x ..+ 3y - 2z = 3
4x + 3y - 5z = 6

2 - Multiplicando ambos os membros da equação 2, por (- 2) - <u>uso da transformação **T2**</u> - somando o resultado obtido com a equação 1 e substituindo a equação 2 pelo resultado obtido - <u>uso da transformação **T3**</u> - vem:

2x - ..y + z = 12
.....- 7y + 5z = 6
4x + 3y - 5z = 6

3 - Multiplicando ambos os membros da equação 1 por (-2), somando o resultado obtido com a equação 3 e substituindo a equação 3 pela nova equação obtida, vem:

2x - ..y + ..z = ...12
.....- 7y + 5z = ...6
........5y - 7z = - 18

4 - Multiplicando a segunda equação acima por 5 e a terceira por 7, vem:
2x -.....y + ...z =....12
.....- 35y +25z =... 30
.......35y - 49z = -126

5 - Somando a segunda equação acima com a terceira, e substituindo a terceira pelo resultado obtido, vem:
2x - .....y + ...z = ..12
.....- 35y + 25z = ..30
..............- 24z = - 96

6 - Do sistema acima, tiramos imediatamente que: z = (-96) / (-24) = 4, ou seja, z = 4.

Como conhecemos agora o valor de z, fica fácil achar os valores das outras incógnitas:

Teremos: - 35y + 25(4) = 30 \ y = 2.

Por analogia, substituindo os valores conhecidos de y e z na primeira equação acima, fica:

2x - 2 + 4 = 12 \ x = 5.

Portanto, x = 5, y = 2 e z = 4, constitui a solução do sistema dado. Podemos então escrever que o conjunto solução S do sistema dado, é o conjunto unitário formado por um terno ordenado (5,2,4) :

S = { (5, 2, 4) }

Verificação:

Substituindo os valores de x, y e z no sistema original, teremos:

$5 + 3(2) - 2(4) = 3$
$2(5) - (2) + (4) = 12$
$4(5) + 3(2) - 5(4) = 6$

o que comprova que o terno ordenado (5,4,3) é solução do sistema dado.

LISTA DE EXERCÍCIOS PARA CASA, COM CORREÇÃO NO DECORRER DO 4º BIMESTRE.

AVALIAÇÃO

- O aluno deverá reconhecer problemas que envolva conceitos de sistemas lineares;
- Mostrar que os alunos são capazes de verbalizar e definir os conceitos através das interpretações geométricas;
- Identificar e produzir exemplos;
- Avaliar a capacidade do aluno em usar as informações e se conseguem aplica-las em situações que requeiram raciocínio;
- A avaliação deve analisar a predisposição dos alunos em face desse conteúdo matemático e o modo como a valorizam.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

- Dante, Luiz Roberto ,Matemática, volume único: 1ª ed.-São Paulo : Ática ,2005.
- Matemática / Edwaldo Bianchini, Herval Paccola; ilustradores Adilson Secco, Paulo Manzi e Mário Azevedo Matsuda. – 1ª ed. – São Paulo: Moderna, 2004.
- Roteiro de Ação 4 – Gráficos e Sistemas – Curso de Aperfeicoamento oferecido por CECIERJ referente ao 2º ano do Ensino Medio – 4º bimestre/2012 – http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ acessado em 11/2012.
- http://pt.wikipedia.org/wiki/Sistema_de_equa%C3%A7%C3%B5es_lineares.
- http://www.somatematica.com.br/historia/sistemas.php.
- http://experienciasnamatematica.blogspot.com.br/2011/02/sistemas-lineares-1-ensino-fundamental.html.
- http://www.youtube.com/watch?v=1hC-hAwhg-w.
- http://www.algosobre.com.br/matematica/sistemas-lineares-metodo-de-eliminacao-de-gauss.html.