Formação Continuada em MATEMÁTICA

Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ

Matemática 9º ano – 3º Bimestre/2012

Plano de Trabalho

CÍRCULOS, CIRCUNFERÊNCIAS E RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

OBS.: As alterações feitas no plano de trabalho estão sombreadas com a cor amarela

Tarefa 2

Cursista: Leana Borba de Azevedo

Tutor: Sônia Sueli da Fonseca Conceição Alves

Sumário

Introdução

- Para a realização desse plano de trabalho, parti do seguinte problema de pesquisa: Como pode estar organizado um plano de ensino, relativo ao ensino da trigonometria, de forma tornar a aprendizagem, por parte dos alunos, mais significativa? Então, tracei os caminhos a serem seguidos, tendo como principal objetivo elaborar um plano de ensino, para os fundamentos da trigonometria, de forma fazer com que o aluno desperte curiosidade pela aprendizagem tornando-a mais significativa. Para isso fiz uso de pesquisa bibliográfica em diferentes instrumentos: livros, revistas, monografias e internet.
- Como suporte para alcançar tal objetivo, busquei atingir os seguintes objetivos específicos: investigar a importância da trigonometria, apresentando exemplos práticos, que despertem o interesse dos alunos pelo assunto; pesquisar como foram construídos os conceitos relativos à trigonometria, na sua origem, através de abordagem histórica; verificar quem foram os principais colaboradores para o desenvolvimento da trigonometria; reconhecer o que a trigonometria abrange e qual é a influência que ela causa; e identificar, e interpretar alguns problemas que envolvam trigonometria no cotidiano.
- O plano de ensino elaborado aqui traz em sua abordagem dinâmicas de ensino que fogem do método tradicional, priorizando a busca histórica, a problematização e a contextualização do conteúdo a ser ministrado. Por fim ressalto que é de total responsabilidade do professor, o despertar do interesse, no aluno, em relação aos assuntos propostos, pois a matemática é a construção permanente de conceitos, onde em cada um há uma maneira diferente de absorvê-los, basta apenas descobrir sua melhor maneira para que haja literalmente uma construção matemática, de forma competente, com curiosidade, interesse, desenvolvimento intelectual e lógico.

- Neste sentido, Santos et al. (2002) declara que para aprender Matemática, deve-se fazer Matemática, pois é importante que os alunos tenham oportunidades para fazê-la.
- O estudo da geometria no Ensino Fundamental é extremamente importante, em função de contribuir para a construção e abstração de diversos conceitos. Para tornar mais significativo seu estudo, um dos recursos que podemos utilizar é a história.

Desenvolvimento

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

➢ Iniciarei meu plano, contextualizando o ensino de trigonometria, mostrando de onde vem a ideia de trigonometria assim(com a ajuda de slides):

- A trigonometria possui uma infinidade de aplicações práticas. Desde a antiguidade já se usava da trigonometria para obter distâncias impossíveis de serem calculadas por métodos comuns.
- Os primeiros indícios de rudimentos de trigonometria surgiram tanto no Egito quanto na Babilônia, a partir do cálculo de razões entre números e entre lados de triângulos semelhantes. No Egito, isto pode ser observado no Papiro Ahmes, conhecido como Papiro Rhind, que data de aproximadamente 1650 a.C.
- Os babilônios tinham grande interesse pela Astronomia, tanto por razões religiosas, quanto pelas conexões com o calendário e as épocas de plantio. É impossível estudar as fases da Lua, os pontos cardeais e as estações do ano sem usar triângulos, um sistema de unidades de medidas e uma escala.
- A utilização da trigonometria para efeito de medida é muito antiga, e acompanha a geometria ao longo de sua história, cerca de 600 a.C, porém os principais estudos com relação as relações entre seus lados e ângulos deve-se a um astrônomo grego chamado Hiparco de Nicéia (190-125 a.C), considerado o pai da trigonometria.
- "Trigonometria é um vocábulo criado em 1595 pelo matemático alemão Bartholomaus Pitiscus (1561-1613), do grego *trigonon* (triângulo) e *metron* (medida)" (MARQUES, 2008), e trata-se da parte da matemática em que se estudam as funções trigonométricas e se estabelecem os métodos de resolução de triângulos (figura geométrica bidimensional com três lados que formam três ângulos internos. A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180º).

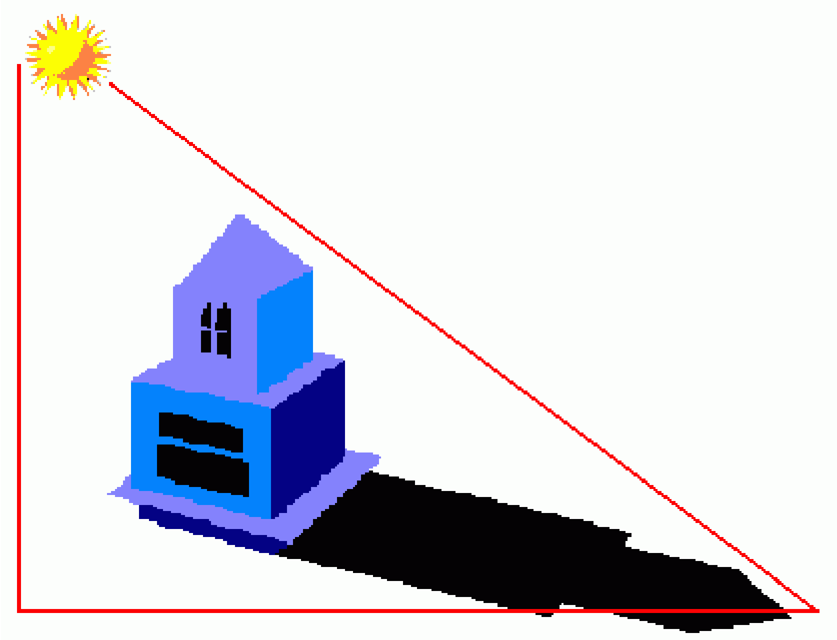
➢ Após isso, introduzirei o conteúdo a ser abordado com uma sugestão do currículo mínimo:

- Pedirei que os alunos construam um triângulo retângulo com um dos ângulos agudos pré-definido, deixando livre as medidas dos lados. Em seguida, pedir que os alunos façam as divisões das medidas dos catetos pela hipotenusa, induzindo a ideia do seno e do cosseno do ângulo; em seguida, da mesma forma, induzir a ideia de tangente do ângulo. Seria interessante, após essa atividade, falar da existência de tabelas com esses valores, distribuindo algumas para a classe e pedindo que os alunos comparem os valores da tabela com aqueles que eles encontraram.

➢ Continuarei o meu plano...

Aqui estão algumas aplicações da trigonometria, que nos ajuda a compreender por quê estudar trigonometria:

- Determinação da altura de um certo prédio.



- Os gregos determinaram a medida do raio de terra, por um processo muito simples.
- Seria impossível se medir a distância da Terra à Lua, porém com a trigonometria se torna simples.
- Um engenheiro precisa saber a largura de um rio para construir uma ponte, o trabalho dele é mais fácil quando ele usa dos recursos trigonométricos.
- Um cartógrafo (desenhista de mapas) precisa saber a altura de uma montanha, o comprimento de um rio, etc. Sem a trigonometria ele demoraria anos para desenhar um mapa.

Tudo isto é possível calcular com o uso da trigonometria do triângulo retângulo.

➢ Mas como é mesmo um Triângulo Retângulo

É um triângulo que possui um ângulo reto, isto é, um dos seus ângulos mede noventa graus, daí o nome triângulo retângulo. Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, então os outros dois ângulos medirão 90°.

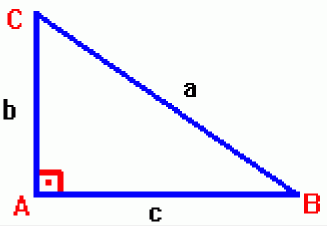
Observação: Se a soma de dois ângulos mede 90°, estes ângulos são denominados complementares, portanto podemos dizer que o triângulo retângulo possui dois ângulos complementares.

Lados de um triângulo retângulo

Os lados de um triângulo retângulo recebem nomes especiais. Estes nomes são dados de acordo com a posição em relação ao ângulo reto. O lado oposto ao ângulo reto é a hipotenusa. Os lados que formam o ângulo reto (adjacentes a ele) são os catetos.

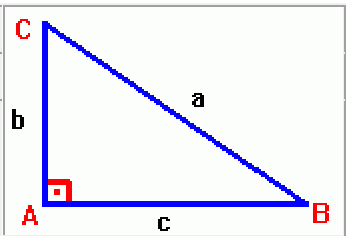
Termo	**Origem da palavra**
Cateto	**Cathetós:** **(perpendicular)**
Hipotenusa	**Hypoteinusa:** **Hypó(por baixo) + teino(eu estendo)**

Para padronizar o estudo da Trigonometria, adotaremos as seguintes notações:

Letra	**Lado**	**Triângulo**	**Vértice = Ângulo**	**Medida**
a	**Hipotenusa**		**A = Ângulo reto**	**A=90°**
b	**Cateto**		**B = Ângulo agudo**	**B<90°**
c	**Cateto**		**C = Ângulo agudo**	**C<90°**

Nomenclatura dos catetos

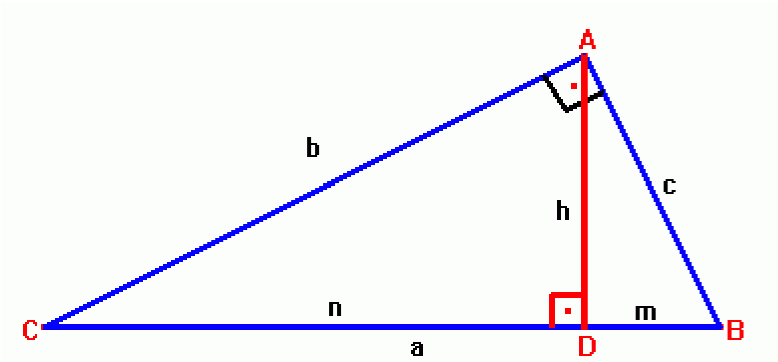
Os catetos recebem nomes especiais de acordo com a sua posição em relação ao ângulo sob análise. Se estivermos operando com o ângulo C, então o lado oposto, indicado por c, é o cateto oposto ao ângulo C e o lado adjacente ao ângulo C, indicado por b, é o cateto adjacente ao ângulo C.

Ângulo	**Lado oposto**	**Lado adjacente**	
C	**c cateto oposto**	**b cateto adjacente**	
B	**b cateto oposto**	**c cateto adjacente**	

Um dos objetivos da trigonometria é mostrar a utilidade do conceitos matemáticos no nosso cotidiano. Iniciaremos estudando as propriedades geométricas e trigonométricas no triângulo retângulo. O estudo da trigonometria é extenso e minucioso.

Propriedades do triângulo retângulo

1. **Ângulos:** Um triângulo retângulo possui um ângulo reto e dois ângulos agudos complementares.
2. **Lados:** Um triângulo retângulo é formado por três lados, uma hipotenusa (lado maior) e outros dois lados que são os catetos.
3. **Altura:** A altura de um triângulo é um segmento que tem uma extremidade num vértice e a outra extremidade no lado oposto ao vértice, sendo que este segmento é perpendicular ao lado oposto ao vértice. Existem 3 alturas no triângulo retângulo, sendo que duas delas são os catetos. A outra altura (ver gráfico acima) é obtida tomando a base como a hipotenusa, a altura relativa a este lado será o segmento AD, denotado por h e perpendicular à base.



A hipotenusa como base de um triângulo retângulo

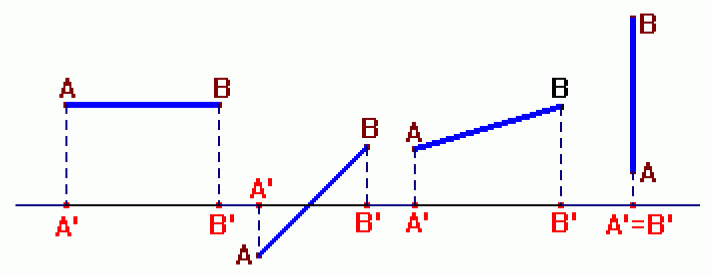
Tomando informações da mesma figura acima, obtemos:

1. o segmento AD, denotado por h, é a altura relativa à hipotenusa CB, indicada por a.
2. o segmento BD, denotado por m, é a projeção ortogonal do cateto c sobre a hipotenusa CB, indicada por a.
3. o segmento DC, denotado por n, é a projeção ortogonal do cateto b sobre a hipotenusa CB, indicada por a.

Projeções de segmentos

Introduziremos algumas idéias básicas sobre projeção. Já mostramos, no início deste trabalho, que a luz do Sol ao incidir sobre um prédio, determina uma sombra que é a projeção oblíqua do prédio sobre o solo.

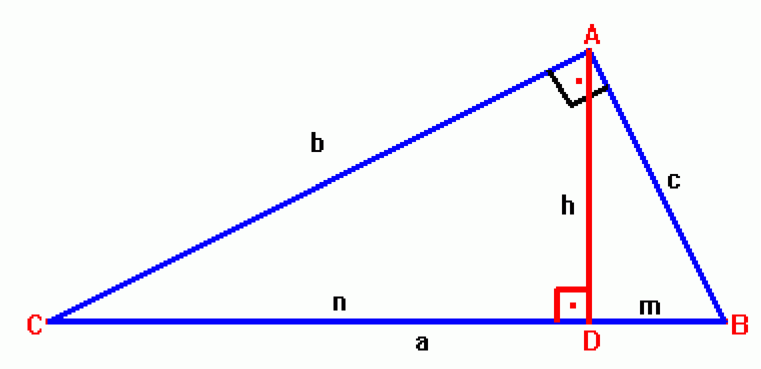
Tomando alguns segmentos de reta e uma reta não coincidentes é possível obter as projeções destes segmentos sobre a reta.



Nas quatro situações apresentadas, as projeções dos segmentos AB são indicadas por A'B', sendo que no último caso A'=B' é um ponto.

Projeções no triângulo retângulo

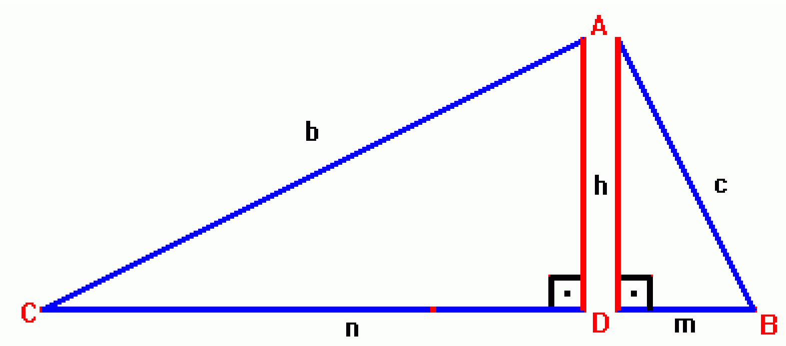
Agora iremos indicar as projeções dos catetos no triângulo retângulo.



1. m = projeção de c sobre a hipotenusa.
2. n = projeção de b sobre a hipotenusa.
3. a = m+n.
4. h = média geométrica entre m e n. Para saber mais, clique sobre [média geométrica].

Relações Métricas no triângulo retângulo

Para extrair algumas propriedades, faremos a decomposição do triângulo retângulo ABC em dois triângulos retângulos menores: ACD e ADB. Dessa forma, o ângulo A será decomposto na soma dos ângulos CÂD=B e DÂB=C.



Observamos que os triângulos retângulos ABC, ADC e ADB são semelhantes.

Triângulo	**hipotenusa**	**cateto maior**	**cateto menor**
ABC	**a**	**b**	**c**
ADC	**b**	**n**	**h**
ADB	**c**	**h**	**m**

Assim:

$a/b = b/n = c/h$
$a/c = b/h = c/m$
$b/c = n/h = h/m$

logo:

$a/c = c/m$ equivale a $c^2 = a.m$
$a/b = b/n$ equivale a $b^2 = a.n$
$a/c = b/h$ equivale a $a.h = b.c$
$h/m = n/h$ equivale a $h^2 = m.n$

Existem também outras relações do triângulo inicial ABC. Como $a=m+n$, somando c^2 com b^2, obtemos:

$c^2 + b^2 = a.m + a.n = a.(m+n) = a.a = a^2$

que resulta no Teorema de Pitágoras:

$a^2 = b^2 + c^2$

A demonstração acima, é uma das várias demonstrações do Teorema de Pitágoras.

Funções trigonométricas básicas

As Funções trigonométricas básicas são relações entre as medidas dos lados do triângulo retângulo e seus ângulos. As três funções básicas mais importantes da trigonometria são: seno, cosseno e tangente. O ângulo é indicado pela letra x.

Função	Notação	Definição
seno	**sen(x)**	$\dfrac{\textbf{medida do cateto oposto a x}}{\textbf{medida da hipotenusa}}$
cosseno	**cos(x)**	$\dfrac{\textbf{medida do cateto adjacente a x}}{\textbf{medida da hipotenusa}}$
tangente	**tan(x)**	$\dfrac{\textbf{medida do cateto oposto a x}}{\textbf{medida do cateto adjacente a x}}$

Tomando um triângulo retângulo ABC, com hipotenusa H medindo 1 unidade, então o seno do ângulo sob análise é o seu cateto oposto CO e o cosseno do mesmo é o seu cateto adjacente CA. Portanto a tangente do ângulo analisado será a razão entre seno e cosseno desse ângulo.

$$\text{sen}(x) = \frac{CO}{H} = \frac{CO}{1} \qquad \cos(x) = \frac{CA}{H} = \frac{CA}{1} \qquad \tan(x) = \frac{CO}{CA} = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$$

Relação fundamental: Para todo ângulo x (medido em radianos), vale a importante relação:

$\cos^2(x) + \text{sen}^2(x) = 1$

- Testando os conhecimentos obtidos, elaborei atividades a serem discutidas e realizadas em sala de aula:

1) Calcular os catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 6 cm e um dos ângulos mede 60º.

2) Quando o ângulo de elevação do sol é de 65 º, a sombra de um edifício mede 18 m. Calcule a altura do edifício. (sen 65º = 0,9063, cos 65º = 0,4226 e tg 65º = 2,1445)

3) Quando o ângulo de elevação do sol é de 60º, a sombra de uma árvore mede 15m. Calcule a altura da árvore, considerando $\sqrt{3} = 1,7$.

4) Uma escada encostada em um edifício tem seus pés afastados a 50 m do edifício, formando assim, com o plano horizontal, um ângulo de 32º. A altura do edifício é aproximadamente: (sen 32º = 05299, cos 32′ = 0,8480 e tg 32º = 0,6249)

a) 28,41m b) 29,87m c) 31,24 m d) 34,65 m

5) Um avião levanta vôo sob um ângulo de 30º. Depois de percorrer 8 km, o avião se encontra a uma altura de:

a)2 km b)3 km c)4 km d)5 km

6) Um foguete é lançado sob um ângulo de 30 º. A que altura se encontra depois de percorrer 12 km em linha reta?

7) Do alto de um farol, cuja altura é de 20 m, avista-se um navio sob um ângulo de depressão de 30º. A que distância, aproximadamente, o navio se acha do farol? (Use $\sqrt{3} = 1,73$)

8) Num exercício de tiro, o alvo está a 30 m de altura e, na horizontal, a 82 m de distância do atirador. Qual deve ser o ângulo (aproximadamente) de lançamento do projétil? (sen 20º = 0,3420, cos 20º = 0,9397 e tg 20º = 0,3640)

9) Se cada ângulo de um triângulo equilátero mede 60 º, calcule a medida da altura de um triângulo equilátero de lado 20 cm.

10) Um alpinista deseja calcular a altura de uma encosta que vai escalar. Para isso, afasta-se, horizontalmente, 80 m do pé da encosta e visualiza o topo sob um ângulo de 55º com o plano horizontal. Calcule a altura da encosta. (Dados: sem 55º = 0,81, cos 55º = 0,57 e tg 55º = 1,42)

Gabarito:

1) $3\sqrt{3}$ e 3

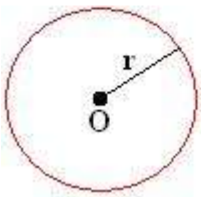
6) 6 km	2) 38,6m
7) 34,6m	3) 25,Sm
8) 20º	4) 31,24m
9) $10\sqrt{3}$	5) 4 km
1O) 113,6m	

CÍRCULO E CIRCUNFERÊNCIA

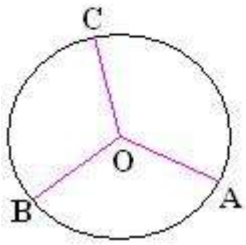
Conceito de Circunferência e Círculo

- Este conteúdo será iniciado com questionamentos sobre o que é círculo e o que é circunferência. Para isso, vou propor aos alunos que desenhem em uma folha de ofício uma circunferência e um círculo e esperarei para ver qual será a reação deles. Após isso, mostrarei como reconhecer e identificar círculos e circunferências e seus elementos.

  - Dado um ponto **O** de um plano, vamos marcar nesse plano os pontos que estão em uma mesma distância **r** de **O**:



A figura obtida chama-se circunferência de centro **O** e raio **r**. Qualquer segmento determinado pelo centro e por um ponto da circunferência é igual ao **raio**.



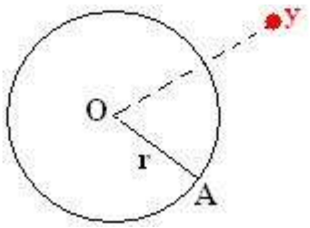
AO = OB = OC = raio

Dados um ponto **O** de um plano e uma distância **r**, chamamos de circunferência de centro **O** e raio **r** o conjunto dos pontos do plano que distam **r** de **O**.

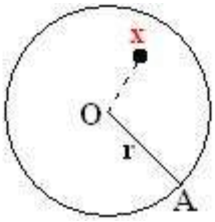
A medida do segmento indicada por **r** e a circunferência de centro **O** e raio **r** por:

C(O, r)

Todo ponto do plano cuja distância em relação ao centro da circunferência é maior que o raio chama-se de ponto externo à circunferência. A reunião de todos esses pontos externos denomina-se região externa à circunferência.

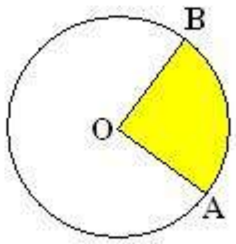


Todo ponto do plano cuja distância em relação ao centro da circunferência é menor que o raio chama-se ponto interno à circunferência. A reunião desses pontos internos chama-se de região interna da circunferência.



Portanto:

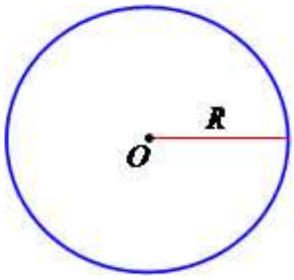
Círculo é a região da circunferência com sua região interna.



Setor circular é a parte do círculo limitada por dois raios.

Comprimento de uma circunferência- como pode ser encontrado?

Considere uma circunferência de centro O e raio R, como na figura:



Essa circunferência possui um comprimento. Para determiná-lo basta medir o contorno da região circular com um barbante.

Feita a medida, relaciona-se o comprimento da circunferência (medida do barbante) com o seu diâmetro (2*R), dessa forma, nota-se que o comprimento possui um valor pouco superior ao diâmetro. Realizando esses cálculos em qualquer região circular, o resultado dessa relação é proporcionalmente o mesmo. Isso ocorre porque quando se divide o comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro, encontra-se um valor fixo, um número irracional denominado pi (representado pela letra grega π), que possui valor aproximado de 3,141592... . Com base no valor constante de π, para encontrar o comprimento de uma circunferência basta aplicar a seguinte definição:

$$\frac{C}{d} = \pi \Rightarrow C = d * \pi \Leftrightarrow C = 2r * \pi$$

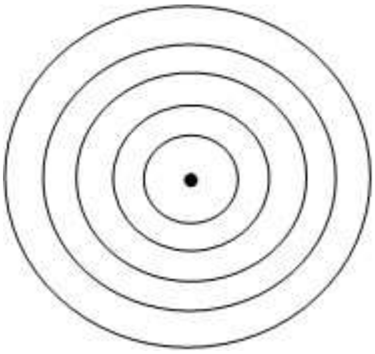
É possível optar por duas expressões matemáticas no cálculo do comprimento da circunferência:

Com base no diâmetro: $C = d * \pi$

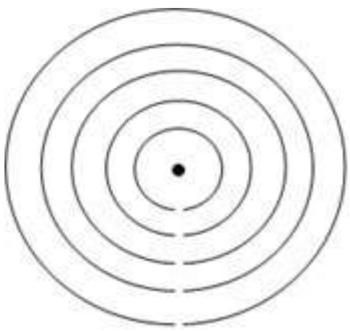
Com base no raio: $C = 2 * r * \pi$

Área

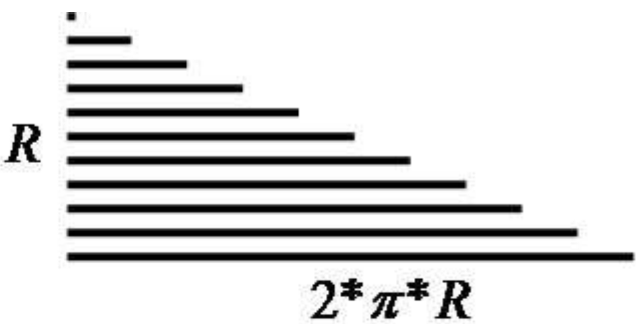
Para determinar a área de uma circunferência, parte-se da definição de circunferências concêntricas, que são regiões circulares que possuem o mesmo centro, observe a ilustração:



Vamos supor que as circunferências concêntricas sejam fios (barbantes). Traçando um corte do centro até a extremidade do maior círculo, tem-se a figura a seguir:



Esticando os fios, a figura formada lembra um triângulo. Se calcularmos sua área, determinaremos a área da circunferência, mas vale ressaltar que a altura desse triângulo corresponde ao raio da maior circunferência; e a base do triângulo, ao comprimento da circunferência.



Lembrando que a área do triângulo é calculada de acordo com a seguinte expressão:

$$A = \frac{b * h}{2}$$
.

Assim, a área da circunferência será:

$$A = \frac{2\pi R * R}{2} \Rightarrow A = \frac{2\pi R^2}{2} \Rightarrow \boxed{A = \pi R^2}$$

Exercícios para análise do grau de aprendizagem e acompanhamento dos alunos serão passados.

Avaliação

Como no plano de trabalho sobre funções, a avaliação consistirá em aplicação de teste, trabalho de verificação de conhecimento, prova bimestral e prova de recuperação paralela bimestral, além da análise da participação e colaboração dos alunos durante todo o plano. Esse seria o plano de trabalho que utilizaria para trabalhar com os alunos o conteúdo de razões trigonométricas no triângulo retângulo, círculos e circunferências.

Descritores Utilizados:

H9 = Reconhecer o círculo ou a circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.
H11 = Utilizar relações métricas do triângulo retângulo para resolver problemas significativos.
H12 = Resolver problemas envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°).

Aspectos positivos:

Todos esses conteúdos abordados foram passados para os alunos em data show, o que possibilitou que os alunos acompanhassem, questionassem e interrompessem as aulas para perguntar e discutir suas dúvidas. Trabalhamos de forma que tudo foi passado sem deixar questionamentos para trás. Trabalhei devagar os conteúdos.

Aspectos Negativos:

Nesse momento, com o trabalho desses conteúdos, pude perceber a defasagem de conteúdos anteriores relacionados a eles. Através da quantidade de perguntas feitas, observei que a dificuldade vinha de anos anteriores e que eu precisamos ajudá-los ainda mais do que discutir os assuntos em sala e por meio de materiais concretos como barbante e desenhos. Foi aí que resolvi partir a turma em equipes e orientá-los a confeccionar cartazes explicativos com fórmulas e desenhos para serem afixados nas paredes da sala para consulta e memorização.

Impressões dos alunos

Posso dizer que os alunos, em sua maioria, foram bem sucedidos na avaliação bimestral passada pelo governo, graças ao nosso trabalho. Eles acompanharam a aula e ficaram satisfeitos com sua aprendizagem a tal ponto de poder escutar um comentário como esse: “- Ah Leana, esse era o conteúdo que vc falou que seria difícil pra gente aprender...?Isso é muito fácil!”

Ouvir isso não é gratificante?!

COM CERTEZA!!!

Referências Bibliográficas

BIANCHINI, Edwaldo. Matemática, 6º ano, 6ª edição. São Paulo: Moderna, 2006, 350 p.

GIOVANNI Júnior, José Rui & CASTRUCCI, Benedicto. A conquista da Matemática, 9º ano, ed. Renovada, São Paulo: FTD, 2009, 368p.

APLICANDO A MATEMÁTICA - Alexandre Luís Trovon de Carvalho, Lourisnei Fortes Reis- Casa Publicadora Brasileira. 6º ano do Ensino Fundamental

MATEMÁTICA –IDEIAS E DESAFIOS –Iracema e Dulce. Saraiva Livreiros Editores. 6º ano do Ensino Fundamental

IMENES, Luiz Márcio, Marcio Lellis, Matemática: Imenes e Lellis,1ª edição, 9º ano, editora Scipione, São Paulo, 2009, 304p

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática.** (1.ed. 1941) 2.ed. Lisboa: Gradiva, 1998.

Vídeos utilizados nas aulas expositivas:

http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/handle/mec/10565

http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/handle/mec/14666

http://www.youtube.com/watch?v=r16Aw0wWGxU

http://www.youtube.com/watch?v=r16Aw0wWGxU