FORMAÇAO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA - FUNDAÇÃO CECIERJ/SEEDUC-RJ

3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO – 3º BIMESTRE

Tarefa 3

Avaliação da Execução do Plano de Trabalho 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Cursista: Edilaine de Melo Souza

Tutor: Claudio Rocha de Jesus

Rio de Janeiro

2012

Avaliação da Execução do Plano de Trabalho 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Pontos positivos

Com o plano foi possível prever barreiras e já trazer alternativas para ultrapassá-las. As charges utilizadas foram um atrativo inclusive para iniciar o conteúdo através da história da matemática, ao passo que o uso do Geogebra aproximou os alunos de conceitos abstratos, difíceis de serem “imaginados” e mais esclarecidos quando visíveis. A utilização do papel quadriculado para a construção dos gráficos permitiu uma melhor organização e avanço em relação à ordem numérica, já que muitos alunos (ainda) tinham dúvidas em relação à posição dos números nos eixos. Interessante também que alguns alunos conseguiram associar com os vetores estudados em Física.

Pontos negativos

Na maioria das aulas houve a participação ativa dos alunos, porém, como se trata do ensino noturno, há muitos alunos faltosos e estes quando aparecem, normalmente ficam “perdidos” na aula, fazendo o possível para atrapalhar. Outro ponto negativo foi o fato de não ter planejado uma aula prévia para tratar de equações do 2º grau. A maioria não lembrava que graficamente teríamos uma parábola, ou que os valores de x são as raízes da equação e que, quando o discriminante é maior que zero, são nestes pontos que a parábola intercepta o eixo dos x. Tive que acelerar em outros momentos, pois foi preciso abrir um parêntese para abordar todos estes tópicos. Outro grande problema foram os cálculos algébricos: muitas dúvidas com sinais (para todo e qualquer cálculo a turma utilizava a frase “menos com menos é mais”, e isso claro, não se aplica a adição e subtração), e muitas dificuldades com produtos notáveis ou até mesmo a propriedade distributiva (a maioria começa multiplicando e termina somando). Isso demandou um tempo maior com conteúdos anteriores e fez com que o conteúdo atual fosse abordado num tempo menor.

Alterações

Como de forma geral havia dúvidas em relação a conteúdos anteriores, a alteração seria na adequação do tempo, reservando um momento previamente especificado para estes conteúdos. Para isto, apresentaria apenas um gráfico relativo à equação do 2º grau com duas raízes reais e um gráfico com raízes complexas; e, só para efeito de curiosidade, um gráfico de uma equação do 3º grau. Assim, sobraria mais tempo para uma aula inicial em forma de resumo de conceitos anteriores como produtos notáveis, raízes de uma equação do 2º grau e sua relação com o gráfico, bem como cálculos com números irracionais.

Impressões dos alunos

Inicialmente foi uma barreira e tanto, pois a turma de 3ª série na qual trabalho é muito variada em relação a seus objetivos. Apenas 5% da turma pensa em prosseguir com alguma forma de estudo, a maioria está focada em arrumar um emprego. Conceitos que eles conseguem perceber sua presença no cotidiano até é interessante, mas fora isso... No entanto, ao organizá-los em duplas e trazer à tona os aspectos históricos do conteúdo, ficou mais intensa a participação. Eles sentiram muitas dificuldades porque, embora quase todos lembrassem como resolver uma equação do 2º grau (a fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ era conhecida por todos), apenas 2 alunos lembravam das relações como soma e produto de raízes, ponto de intersecção no eixo das abscissas como raízes da equação e também produtos notáveis (quando estava abordando a divisão de números complexos).

De acordo com a autoavaliação (realizada no último encontro relativo a esta aula), mais de 65% dos alunos responderam "sim" à questão 10 (*10. Você está satisfeito com a aprendizagem decorrente da disciplina*). Por outro lado, mais de 50% responderam "não" à questão 15 (*15. Aplica seus próprios métodos e processos de trabalho visando uma melhor execução das tarefas propostas*). Percebe-se assim, que a maioria ainda não desenvolve sua autonomia na resolução de questões, repetindo mecanicamente o que é apresentado pelo professor. Pouquíssimos foram os alunos que perceberam, por exemplo, que o produto de i^2 por qualquer número é igual ao seu oposto.

<u>Plano de Trabalho 1</u>

NÚMEROS COMPLEXOS

Introdução

O presente plano de trabalho tem por objetivo principal proporcionar uma melhor compreensão acerca da solução de equações polinomiais que não possuem raízes reais e, discutir assim a formulação de um significado para essas “novas” raízes por meio da construção de um novo conjunto numérico: o conjunto dos números complexos. Normalmente, até a 3ª série do Ensino Médio os alunos percebem que determinadas equações não possuem solução. No entanto, ao analisar o gráfico relativo a essas funções, vem à tona a seguinte questão: como algo que algebricamente é “impossível” de se resolver tem uma representação geométrica?

O assunto será apresentando aos alunos focando principalmente a interação e o espírito investigativo. Por meio de aulas projetadas com o uso de datashow, além de um pouco de história da matemática e exemplos de aplicações deste assunto no campo da Engenharia, Aerodinâmica e outros, o tema será abordado com o objetivo de se atingir um número máximo de alunos. Antes de introduzir o conceito de número complexo, será realizada em conjunto com a turma uma lista de atividades relacionadas aos pré-requisitos mencionados no desenvolvimento deste plano.

A apresentação do assunto, sua aplicabilidade, a resolução de atividades referentes ao tema e as avaliações serão realizadas em 15 tempos de cinquenta minutos cada um.

Desenvolvimento

Atividade 1 – ***Números Complexos – Um papo inicial***

Duração: 150 minutos (3 aulas)

Objetivos: Ampliar a visão em relação aos conjuntos numéricos e compreender a construção deste conjunto do ponto de vista histórico.

Habilidades e Descritores relacionados:
H57: Resolver problemas envolvendo função do 2º grau.
C3: Resolver problemas que recaiam na resolução de uma equação do 2º grau da forma $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$.

Pré-requisitos: Resolução de equações do 1º e 2º graus.

Organização da turma: Em duplas

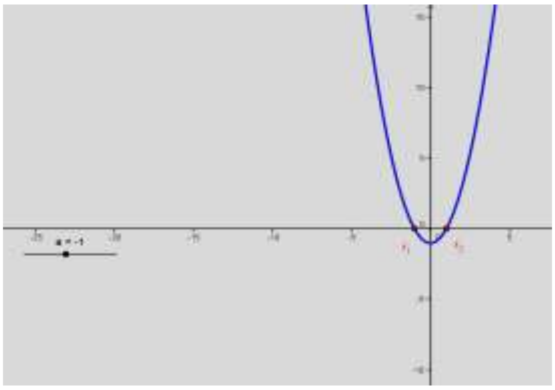
Recursos: Computador com Geogebra instalado, Datashow, folhas de atividades, livro didático e charge impressa em folha A4.

Metodologia:

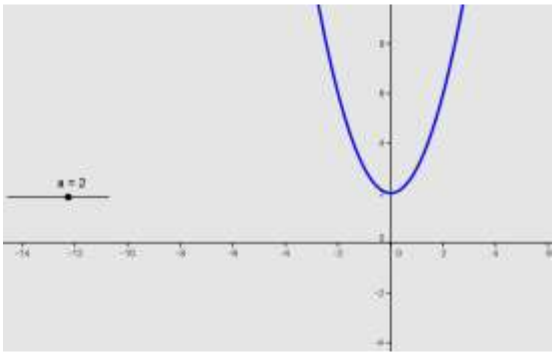
Apresentar a charge abaixo e um pequeno texto sobre a história do surgimento dos números complexos, levantando questões como a disputa pela descoberta, os aspectos humanísticos envolvidos e, principalmente, toda indagação ao redor das fórmulas utilizadas por nós até hoje.

A partir de então, apresentar a função polinomial do tipo $f(x) = ax^3 + bx + c$, especificamente a função $f(x) = x^3 - 15x - 4$, citando $x = 4$ como uma de suas raízes reais e levantando a questão: como encontrar as outras raízes?

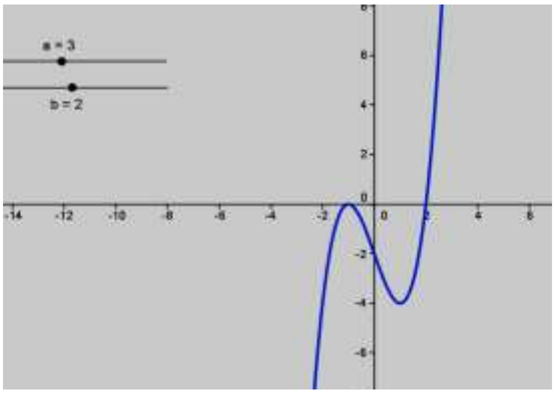
Projetar então os gráficos a seguir com o Datashow identificando que se trata de uma função do tipo f(x) = x^2 + a, ou seja, o coeficiente de x é nulo e quando a < 0, esta possui duas raízes reais e distintas.



Em seguida, alterar o parâmetro *a* para um valor positivo e assim, trazer à tona a observação sobre a forma do gráfico e a intersecção com o eixo das abscissas.



Apresentar então, a questão 1 da lista de exercícios que já foi previamente distribuída. Mostrar a relação entre o valor do discriminante e as raízes de uma equação, bem como a relação entre o valor do coeficiente de x^2 e a concavidade da parábola.



Neste momento lança-se a função do 3º grau f(x) = x^3 - 3x – 2 para mostrar como fica o gráfico e citar, com base neste gráfico, a parte histórica envolvendo os estudos de Cardano e Tartaglia, no século XVI, que gerou a seguinte fórmula para resolver equações do tipo $x^3 = px + q$:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Com a fórmula apresentada, pedir aos alunos que encontrem uma raiz da função f(x) = x^3 - 3x – 2. Em seguida, e lançando mão da mesma fórmula, pedir que encontrem uma raiz da função f(x) = x^3 - 15x – 4. Quando os alunos se depararem com a expressão x = $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ é o momento para mostrar que a presença da raiz negativa foi o pontapé para a construção do novo conjunto numérico.

A partir de então, apresentar a unidade imaginária **i** como $\left(\sqrt{-1}\right)$ e mostrar que é possível substituir $\sqrt{-121}$ pela expressão $\sqrt{121}.\sqrt{-1}$, o que resulta em 11i.

Finalizar com um exemplo de raiz de um número negativo sugerido por um aluno escolhido aleatoriamente, além de distribuir a tirinha abaixo.

Para fixar...

Exercícios: Livro didático e folha de atividades – Resolução de equações do tipo $x^2 + a = 0$, quando $a > 0$.

Curiosidade...

Lançar para os alunos o seguinte nome para ser pesquisado na Internet: *Raj Mohan Nair*.

Atividade 2 – ***Números Complexos***

Duração: 150 minutos (3 aulas)

Objetivos: Operar algebricamente com números complexos.

Habilidades e Descritores relacionados:

H36: Efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica.
H57: Resolver problemas envolvendo função do 2º grau.

Pré-requisitos: Construção de gráficos e adição e subtração de termos algébricos.

Organização da turma: Em duplas

Recursos: Folhas de atividades, livro didático e charge impressa em folha A4.

Metodologia:

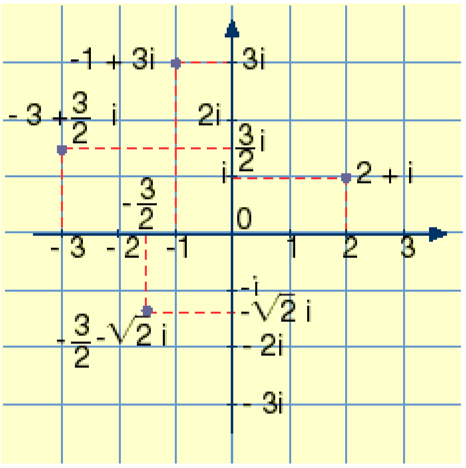
Após fazer referência ao “Electro-Man” e sua relação com conceitos da Física e do Conjunto C, chega-se o momento de apresentar a forma algébrica dos números complexos, tendo identificadas sua parte real e sua parte imaginária. Os alunos serão levados a relembrar sobre os eixos das abscissas e das ordenadas, bem como a relação destes com a Física, quando vetores são representados no plano cartesiano. Cabe relembrar a representação da velocidade instantânea, por exemplo, no plano de Argand-Gauss.

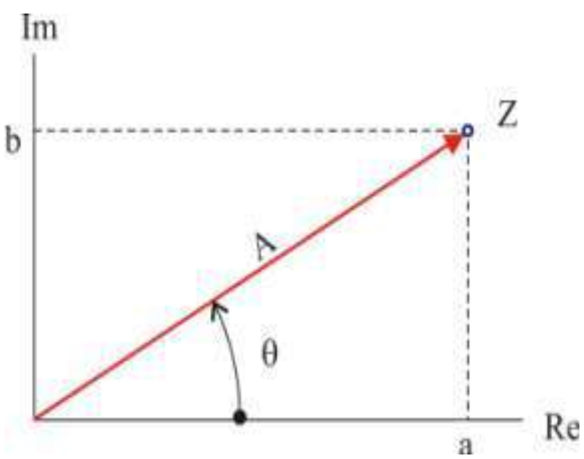
É o momento também de começar a apresentar as definições de modo mais formalizado.

Definição: *Chamaremos de conjunto dos números complexos, o conjunto definido por:*

C = { a + bi / a, b ; i2 = -1}, onde i é chamado de unidade imaginária.

Folhas de papel quadriculado serão distribuídas a cada aluno para que representem os números complexos dados na lista de atividade. Apresentar a ideia de que todo número real é um número complexo, mas que nem todo número complexo é um número real. Reconhecer que se a parte imaginária for nula (igual a 0) o número é real; e se a parte real for nula, o número é chamado de imaginário puro.





Serão tratados assuntos como igualdade entre números complexos, conjugado de um complexo, bem como a operacionalização dos mesmos.

A partir de então, serão realizadas as operações de adição e subtração entre números complexos. Vale realçar a importância de se operar considerando a parte imaginária como uma incógnita e a parte real, outra. Adicionando parte real com parte real e parte imaginária com imaginária.

Cada dupla receberá uma adição e uma subtração entre números complexos para ser calculada. A partir de então, solicitar aos alunos que representem estes resultados no plano de Argand-Gauss construído na folha de papel quadriculado, e expô-los no mural da sala.

Recursos: Livro didático e listas de exercícios complementares com questões de concursos anteriores.

Para fixar...

Exercícios: Livro didático e folha de atividades – Adição e subtração de números complexos e construção gráfica.

Curiosidade...

Pegar o e-mail dos alunos e enviar o vídeo *Dimensions* disponível em http://www.dimensions-math.org/Dim_PT.htm.

Atividade 3 – Operações com *Números Complexos*

Duração: 150 minutos (3 aulas)

Objetivos: Operar algebricamente com números complexos.

Habilidades e Descritores relacionados:

H36: Efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica.

Pré-requisitos: Potenciação, construção de gráficos e multiplicação de termos algébricos, produtos notáveis.

Organização da turma: Em duplas

Metodologia:

Distribuir uma lista de atividades em forma de "resumão" contendo: cálculo de potências de base literal e expoente inteiro, propriedades das potências como multiplicação e divisão de potências de mesma base, produto da soma pela diferença de dois termos.

EXERCÍCIOS SOBRE PROPRIEDADES DE POTÊNCIAS

QUESTÃO 01 – Determine o valor da expressão $2^5 \cdot 2^2 \cdot 2^4 \cdot 2$ utilizando as propriedades de potência:

a) 2^{40}
b) 2^{11}
c) 2^{12}
d) 2^{-2}

QUESTÃO 02 – Dada a expressão $5^{10} \div 5^8 \div 5^{15} \div 5^3 \div 5$, determine a sua forma simplificada utilizando as propriedades de potência:

a) 5^{37}
b) 5^{36}
c) 5^{3600}
d) 5^{-17}

QUESTÃO 03 – Valendo-se de seus conhecimentos sobre as propriedades de potência, qual a forma mais simplificada de escrever a expressão $\left\{\left[\left(3^2\right)^5\right]^4\right\}^3$

QUESTÃO 04 – Utilizando as propriedades de potência, simplifique a expressão $8^5 \cdot 8^{12} \cdot 8^3 \div 8 \div 8^7$

a) 8^{28}
b) 8^{27}
c) 8^{13}
d) 8^{12}

QUESTÃO 05 – Simplifique a expressão $\left\{\left[\left(3^7 \cdot 3 \div 3^4 \cdot 3^8 \cdot 3 \div 3^9\right)^4\right]^5\right\}^2$

a) 3^{160}
b) 3^{330}
c) 3^{480}
d) 3^{56}

Produtos notáveis

PRODUTO DA SOMA PELA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS

$$\underbrace{(x+y)}_{\text{Soma dos termos}} \cdot \underbrace{(x-y)}_{\text{Diferença dos termos}} = \underbrace{x^2}_{\text{Quadrado do 1º termo}} - \underbrace{y^2}_{\text{Quadrado do 2º termo}}$$

O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo.

$(4x + 7)(4x – 7) = (4x)^2 – (7)^2 =$ **$16x^2 – 49$**

$(11x^2–5x)(11x^2+5x)=(11x^2)^2–(5x)^2 =$ **$121x^4– 25x^2$**

$(12x + 8)(12x – 8) = (12x)^2 – (8)^2 =$ **$144x^2 – 64$**

$(20b – 30)(20b + 30)=(20b)^2–(30)^2 =$ **$400b^2–900$**

EXERCÍCIOS

1) Calcule o produto da soma pela diferença de dois termos:

a) $(x + y) . (x - y) =$ (R : $x^2 - y^2$)
b) $(y - 7) . (y + 7) =$ (R : $y^2 - 49$)
c) $(x + 3) . (x - 3) =$ (R: $x^2 - 9$)
d) $(2x + 5) . (2x - 5) =$ (R: $4x^2 - 25$)
e) $(3x - 2) . (3x + 2) =$ (R: $9x^2 - 4$)
f) $(5x + 4) . (5x - 4) =$ (R: $25x^2 - 16$)
g) $(3x + y) (3x - y) =$ (R: $9x^2 - y^2$)

De forma análoga, mostrar as potências de **i,** bem como a multiplicação de um complexo por outro diferente dele – mostrar a importância da propriedade distributiva e dos produtos notáveis. Associar a unidade i como uma incógnita (um x, por exemplo) e mostrar que o produto de qualquer número por i^2 é igual ao oposto deste número.

Enfatizar, por exemplo, que ao aparecer no denominador $4 - 2i^2$, isso pode ser encarado como 4+2.

Recursos: Papel quadriculado, livro didático e lista de atividades.

Para fixar...

Exercícios: Livro didático e folha de atividades – Cálculo das potências de i, multiplicação e divisão de números complexos e construção gráfica.

Curiosidade...

Pedir aos alunos que tragam imagens de ***fractais*** encontradas na Internet e enviem para meu e-mail dizendo o que descobriram sobre a relação destes com números complexos.

Atividade 4 – Operações com *Números Complexos*

Duração: 150 minutos (3 aulas)

Objetivos: Operar algebricamente com números complexos.

Habilidades e Descritores relacionados:

H36: Efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica.

Pré-requisitos: Divisão por números irracionais, produtos notáveis.

Organização da turma: Em duplas

Recursos: Computador, Datashow, lista de atividades, livro didático e papel quadriculado.

Metodologia:

Relembrar o conjugado de um número complexo e mostrar a sua importância no momento da divisão. Associar isso com a divisão por números irracionais e assim, efetuar a divisão com números complexos. Realizar a lista de atividades envolvendo potências, multiplicação e divisão de números complexos, representando os resultados no plano de Argand-Gauss.

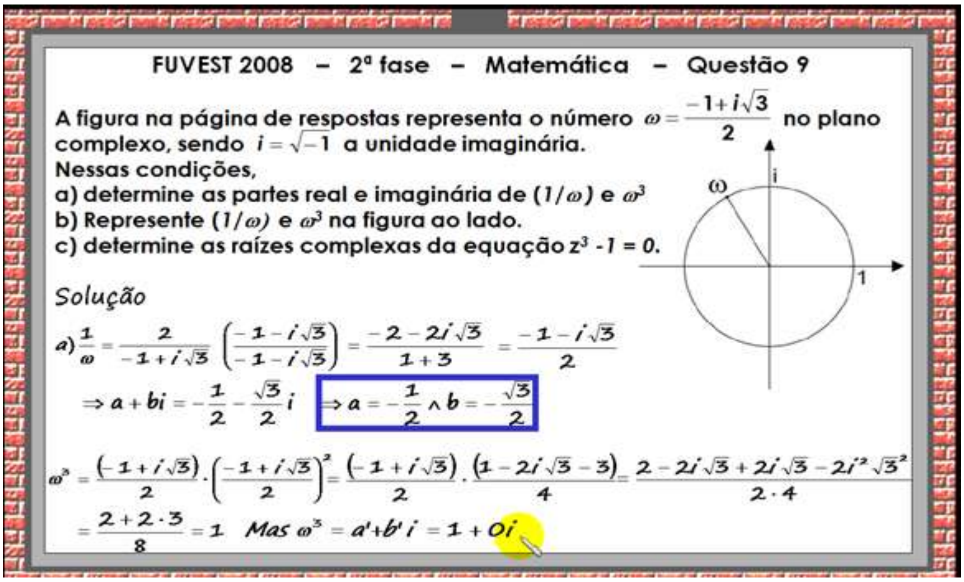
Apresentar o passo a passo da divisão com projeções do Datashow, como a seguir:

Ao dividirmos dois números complexos devemos escrevê-los em forma de fração e multiplicarmos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, veja como:

Dados dois números complexos z_1 e z_2, para efetuarmos a divisão dos dois devemos seguir a seguinte regra:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Atividade proposta: Observar a questão a seguir e resolver as letras a e b.



Recursos: Papel quadriculado, livro didático e lista de atividades.

Para fixar...

Exercícios: Livro didático e folha de atividades – Divisão de números complexos.

Avaliação

Duração: 150 minutos (3 aulas)

Os alunos serão avaliados continuamente por meio de listas de atividades, discussões com o grupo acerca dos assuntos apresentados, um simulado de exercícios, além de uma autoavaliação realizada na última aula. As avaliações sinalizarão dificuldades e obstáculos a serem eliminados para que os alunos cheguem ao final das aulas capazes de:

C1 - Efetuar a adição de dois ou mais números complexos na forma algébrica;	C3 - Efetuar a multiplicação de dois ou mais números complexos na forma algébrica
C2 - Efetuar a subtração de dois ou mais números complexos na forma algébrica	C4 - Efetuar a divisão de dois ou mais números complexos na forma algébrica.

Em anexo, o questionário para a autoavaliação dos alunos.

Referências Bibliográficas

BARROSO, Juliane M. **Conexões com a Matemática**. São Paulo: Moderna, 2010.

LANDAU: Provas e gabaritos de conteúdos matemáticos. Disponível em http://landauglobal.co.uk/index.php?pr=Grafico_de_Funcoes. Acesso em 19 set. 2012.

VESTIBULAR BRASIL ESCOLA: Simulados e questões de vestibulares anteriores. Disponível em http://vestibular.brasilescola.com/simulado/. Acesso em 19 set. 2012.

WEBEDUC: O portal de conteúdos educacionais do MEC. Disponível em http://webeduc.mec.gov.br/. Acesso em 19 set. 2012.

Anexo – Questionário para autoavaliação

Para cada pergunta foram apresentadas cinco alternativas, exceto em algumas, com duas alternativas ("sim" e "não"), as quais estão identificadas nas questões. As alternativas são:

- *Sempre*
- *Quase sempre*
- *Às vezes*
- *Nunca*
- *Não se aplica*

1. As aulas corresponderam às suas expectativas:
2. O professor domina o conteúdo e está atualizado.
3. O professor tem bom relacionamento com os alunos e é aberto ao diálogo.
4. Os recursos didáticos utilizados na disciplina são de boa qualidade.
5. Você conseguiu acompanhar os conteúdos apresentados.
6. A sequência e organização dos conteúdos da disciplina são adequadas.
7. Existe um bom relacionamento entre os alunos.
8. A turma é assídua às aulas, comprometida e responsável.
9. Há interesse e envolvimento da turma com a aprendizagem na disciplina.
10. Você está satisfeito com a aprendizagem decorrente da disciplina.
11. Você esteve atento e concentrado durante as apresentações dos conteúdos temáticos da disciplina e empenhado na execução das tarefas propostas.
12. Você mostra em preocupação em ser autônomo na realização das tarefas.
13. Desempenha papel social positivo no funcionamento da turma como um grupo.
14. Você esclarece suas dúvidas em devido tempo.
15. Aplica seus próprios métodos e processos de trabalho visando uma melhor execução das tarefas propostas.