Reforço escolar • Matemática •

Potências e logaritmos, tudo a ver!

Dinâmica 1

2ª Série | 1º Bimestre

Professor

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	2ª do Ensino Médio	Algébrico simbólico	Função Logarítmica

DINÂMICA	Potências e logaritmos, tudo a ver!
HABILIDADE BÁSICA	H52 – Resolver problemas com números reais, envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação).
HABILIDADES PRINCIPAL	H34 – Efetuar operações, utilizando as propriedades operatórias do logaritmo.
CURRÍCULO MÍNIMO	Calcular o logaritmo de um número real positivo.

Governo do Rio de Janeiro – Secretaria de Estado de Educação
Governo do Rio de Janeiro – Secretaria de Ciência e Tecnologia
Fundação CECIERJ – Consórcio cederj

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos.

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar ideias	Dados Potentes!	de 20 a 25 min	Em grupos de 3 ou 4	Individual
2	Um novo olhar...	Verdadeiro ou Falso?	de 10 a 15 min	Em grupos de 3 ou 4	Individual
3	Fique por dentro!	Procurando a alma gêmea	de 25 a 35 min	Em grupos de 3 ou 4	Individual
4	Quiz	Quiz	10 min	Individual	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quiz	15 min	Coletiva	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor, se tiver dúvidas.			

Apresentação

Caro Professor, no estudo dos logaritmos, é comum que os alunos mostrem dificuldade com o cálculo, quando se deparam com propriedades operatórias das potências. É muito importante que, neste estudo, o aluno perceba que o logaritmo é o expoente de um determinado número escrito como uma potência e que a compreensão da potenciação é fundamental para que se aprenda este novo conceito. Por esse motivo, nesta dinâmica, retomamos a definição de potenciação e algumas propriedades, para posteriormente trabalhar a definição de logaritmo.

Primeira Etapa
Compartilhar Ideias

Atividade · Dados Potentes!

Objetivo

Registrar e utilizar as propriedades de multiplicação e divisão de potências de mesma base e a definição de potência com expoente inteiro negativo

Descrição da atividade

Professor, nessa atividade, pretendemos revisar as propriedades de multiplicação e divisão de potências de mesma base por meio de um jogo de dados, cujo objetivo é calcular as potências para preencher os dois quadros e, ao mesmo tempo, utilizar as propriedades de potenciação ao longo (ou ao final) da atividade. Observe a descrição da atividade a seguir.

Vamos jogar o jogo Dados Potentes. No seu grupo, separe os dois dados e a folha com os Quadros 1 e 2, e a tabela. Antes de começar, decida com seus colegas uma ordem para começar o jogo. Observe as regras:

- Em sua vez, jogue os dois dados juntos. Os números das faces superiores desses dados são os expoentes de um número escrito como potência de base 2. Por exemplo, se as faces superiores dos dados apresentarem os números 3 e 6, os números escritos são 2^3 e 2^6.
- Ainda nessa mesma jogada, calcule o resultado da multiplicação desses dois números. Faça o mesmo com a divisão só que agora com o cuidado de dividir o número maior pelo número menor, caso os números não sejam iguais. Por exemplo, suponha que os números sorteados nos dados sejam 3 e 4. Então você deve calcular $2^3.2^4 = 128 = 2^7$ e $2^4 \div 2^3 = 2 = 2^1$.
- Para acelerar os cálculos, use a tabela com os valores das potências.
- Em seguida, com os resultados dos cálculos, preencha cada um dos quadros. Atenção, os quadros devem ser preenchidos com as potências!
- Passe a vez para o próximo jogador.
- O jogo termina após 5 rodadas.

Agora responda:

1. Pensando na multiplicação, qual a propriedade de potenciação você pode utilizar para preencher a tabela mais rapidamente? Usando essas propriedades, preencha o Quadro abaixo.

X	**2^1**	**2^2**	**2^3**	**2^4**	**2^5**	**2^6**
2^1						
2^2						
2^3						
2^4						
2^5						
2^6						

Matemática

Reposta

Para multiplicar duas potências de mesma base, repetimos a base e somamos os expoentes.

x	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9
2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}
2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}

2. Observe o Quadro. Existem valores que se repetem? Por quê?

Resposta

Sim, porque para obtermos 2^8, por exemplo, podemos fazer 2^6x 2^2, ou 2^2x 2^6, ou 2^5x 2^3, entre outros.

3. Com relação à divisão, qual a propriedade de potenciação você pode utilizar para preencher a tabela mais rapidamente? Usando essa propriedade, preencha o Quadro a seguir.

÷	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
2^1						
2^2						
2^3						
2^4						
2^5						
2^6						

Resposta

Para dividir duas potências de mesma base, repetimos a base e subtraímos os expoentes.

÷	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
2^1	2^0					
2^2	2^1	2^0				
2^3	2^2	2^1	2^0			
2^4	2^3	2^2	2^1	2^0		
2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	
2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

4. Utilizando a propriedade observada no item anterior, preencha as células em azul.

Resposta

Para efetuar tais divisões, encontramos como resultado expoentes negativos. Precisamos saber que $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$.

÷	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}
2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}
2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}
2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}
2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}
2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

Recursos necessários

- Dois dados
- Encarte do aluno
- Folha com os Quadros 1 e 2, e a tabela

Procedimentos Operacionais

Professor,

- *Organize a turma em trios ou, no máximo, em grupos de quatro alunos.*
- *Distribua uma folha com os Quadros 1 e 2, e a tabela, disponível no anexo, para cada grupo e um par de dados.*
- *Caso não haja dados, utilize o modelo disponível no anexo para a confecção dos mesmos. Não se esqueça de que neste caso, é necessário recortar e colar previamente a quantidade necessária para atender à sua turma, isto é, dois dados por grupo.*

Intervenção Pedagógica

Professor,

- *A ficha com os Quadros 1 e 2, e a tabela funciona como um tabuleiro para a realização do jogo. É muito importante dar uma atenção especial aos registros dos alunos, durante a realização do jogo.*
- *Para garantir que este registro ocorra, promova uma discussão coletiva ao final da etapa.*
- *Nas questões referentes às propriedades, é importante que os alunos registrem da sua maneira o que foi percebido. Ao final, promova uma discussão para que os alunos exponham a sua maneira, culminando num registro compartilhado. Neste momento, você pode relembrar a representação algébrica de cada propriedade (*$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ *e* $a^n \div a^m = a^{n-m}$ *).*
- *Na questão 2, seus alunos podem lembrar da comutatividade da multiplicação – observe que essa propriedade justifica alguns resultados iguais, mas que não garante todos, contudo, é importante, que você incentive que os alunos exponham a sua opinião.*

Professor

- *A questão 4 é uma oportunidade para você retomar com a turma a definição de potências de expoentes negativos.*

Segunda Etapa

Um novo olhar...

15 MINUTOS

Atividade • Verdadeiro ou Falso?

Objetivo

Avaliar ideias, envolvendo o cálculo de potências.

Descrição da Atividade

Professor, nesta atividade, continuamos a revisar as propriedades de potenciação em que os alunos em grupo deverão analisar afirmações e decidir se são verdadeiras ou falsas. A seguir temos a descrição da atividade.

Verifique se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas. Justifique as verdadeiras e corrija as falsas.

I. $5^2 . 5^3 = 5^5$

Resposta

Verdadeiro, pois $5^2 . 5^3 = 5^{2+3} = 5^5$.

II. $2^5 \times 2^3 = 10 \times 6 = 60$

Resposta

Falso, pois $2^5 = 32$ *e* $2^3 = 8$. *Logo,* $32 \times 8 = 256$.

III. $(3^4)^2 = 3^{16}$

Resposta

Falso, pois $(3^4)^2 = 3^{4.2} = 3^8$.

IV. $(2^3)^2 = 2^6 = 64$

Resposta

Verdadeiro, pois $(2^3)^2 = 2^{3.2} = 2^6$.

V. $7^3 \div 7^5 = 7^{-2}$

Resposta

Verdadeiro, pois $\frac{7^3}{7^5} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{1}{7 \cdot 7} = 7^{-2}$

VI. $5^5 \div 5^3 = 5^{-2}$.

Resposta

Falso, pois $5^5 \div 5^3 = 5^2$.

VII. $(7^4)^3 , (7^5 \cdot 7^7) = 0$

Professor

Resposta

Falso, pois $\left(7^4\right)^3 \div \left(7^5 \cdot 7^7\right) = 7^{12} \div 7^{12} = 7^0 = 1$

Recursos Necessários

- Encarte do aluno

Procedimentos Operacionais

Professor,

- *Continue com a turma organizada em grupos de 3 ou 4 alunos.*

Intervenção Pedagógica

Professor, as afirmações envolvidas na etapa abordam fatos importantes sobre potenciação, discutindo também alguns erros comuns. É interessante que você promova uma discussão ao final, destacando que

- *o item 2 prevê um erro comum no cálculo das potências, a saber: multiplicar a base pelo expoente no lugar de multiplicar a base por ela mesma tantas vezes quanto for o expoente.*
- *os itens 1, 3 e 5 mostram a utilização das propriedades corretamente (* $(a^n \cdot a^m = a^{(n+m)}; (a^m)^n = a^{(m.n)}; a^n \div a^m = a^{(n-m)}$ *, com* $a \neq 0$*)*
- *o item 7 apesar de utilizar as propriedades citadas antes corretamente, é falso, uma vez que não usa corretamente o fato de todo número elevado a zero ser 1.*
- *nos itens 4 e 6, há um erro ao aplicar as propriedades* $(a^m)^n = a^{m \cdot n}; a^n \div a^m = a^{n-m}$ *, com* $a \neq 0$ *respectivamente.*

Terceira Etapa
Fique por dentro!

35 MINUTOS

Atividade • Procurando a Alma Gêmea

Objetivo

Aplicar a definição de logaritmo e reconhecer algumas de suas propriedades imediatas.

Descrição da Atividade

Esta etapa visa trabalhar a definição de logaritmo, por meio de um jogo dos pares, disponível para recorte no Anexo.

Organizados em grupos, como na atividade anterior, cada grupo receberá um conjunto com 18 cartões, como ilustrado abaixo.

$\log_2 32$	$\log_5 \sqrt{5}$	$\log_4 64$
$\log_2 1$	$\log_2 \frac{1}{16}$	$\log_5 \frac{1}{25}$
$\log_{171} 171$	$\log_{10} 10000$	$\log_4 8$
5	**0**	$\frac{3}{2}$
$\frac{1}{2}$	**-4**	**-2**
3	**1**	**4**

Observe as regras do jogo e as questões propostas para os alunos.

Professor

Hora de jogar: Encontrando a alma gêmea!

- Seu grupo vai receber 18 cartões embaralhados e vocês devem reunir os pares correspondentes.
- Por exemplo, o cartão log2 8 é equivalente ao cartão 3: lembre-se log2 8 = 3 porque 23 = 8.
- Ganha o grupo que formar os 9 pares em menos tempo.
- Esse grupo expõe os pares que encontrou e os demais conferem.

Agora, responda:

1. Complete a tabela abaixo com os valores dos logaritmos.

$\log_2 32$	*5*
$\log_5 \sqrt{5}$	$\frac{1}{2}$
$\log_4 64$	*3*
$\log_2 1$	*0*
$\log_2 \frac{1}{16}$	*-4*
$\log_5 \frac{1}{25}$	*-2*
$\log_{171} 171$	*1*
$\log_{10} 10000$	*4*
$\log_4 8$	$\frac{3}{2}$

2. Baseado no que você observou anteriormente, complete as igualdades.
(a é um número real positivo e a ≠ 1)

a. $\log_a a^m = m$

b. $\log_a a = 1$

c. $\log_a 1 = 0$

d. $\log_{a^n} a^m = \dfrac{m}{n}$

Recursos necessários

- Cartões disponíveis no Anexo
- Encarte do aluno

Procedimentos Operacionais

- *Professor, continue com a turma organizada em grupos de 3 ou 4 alunos.*
- *Será preciso recortar, com antecedência, os cartões do jogo, disponíveis no Anexo,*
- *Distribua um conjunto de cartões para cada grupo.*

Intervenção Pedagógica

Professor:

- *É possível que seus alunos não recordem a definição de logaritmos. Caso perceba que eles estão reticentes em iniciar a atividade, relembre essa definição:*

  Dados dois números reais positivos a e b, onde $a \neq 1$,

  $\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b$*, e esse valor de x é único.*

- *Sinalize aos alunos que podemos calcular logaritmos, observando o expoente do logaritmando, sempre que podemos escrevê-lo como uma potência da base. Quase todos os logaritmos do jogo podem ser calculados dessa maneira, como é o caso, por exemplo, do $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$. Com isso, não é necessário resolver equações para a maioria dos cálculos e perceber as três primeiras propriedades* *da segunda questão: $\log_a a^m = m$, $\log_a a^0 = 0$ e $\log_a a^1 = 1$.*

- *Dê uma atenção especial ao cálculo dos logaritmos que envolvem frações e radicais. Estes são sempre causa de algumas dificuldades por parte dos alunos.*
- *Através do cálculo de $\log_4 8$, o único logaritmo apresentado em que inicialmente é necessária a resolução de uma equação, faça a relação com a quarta propriedade.*

Quarta Etapa
Quiz

10 MINUTOS

(U.E. Londrina) Supondo que exista, o logaritmo de *a* na base b é:

a. a potência de base b e expoente *a*.

b. a potência de base *a* e expoente b.

c. o número ao qual se eleva *a* para obter b.

d. a potência de base 10 e expoente *a*.

e. o número ao qual se eleva b para obter *a*.

Quinta Etapa
Análise das Respostas ao QUIZ

15 MINUTOS

Resposta

Aplicando a definição de logaritmo, tem-se $\log_b a = x$ se e só se $b^x = a$.

Gabarito: Letra (e).

Distratores

Os distratores são todos obtidos, quando o aluno não se apropria da definição de logaritmo. Um aluno pode, por exemplo, ao tentar aplicar a definição, confundir o logaritmo de a na base b com a potência de base b e expoente a, obtendo a^b e marcando a opção (a).

Da mesma forma, um aluno pode, ao tentar aplicar a definição, ter confundindo o logaritmo de a na base b com a potência de base a e expoente b, obtendo b^a e marcando a opção (b).

Um aluno pode ter aplicado a definição de logaritmo, confundindo a base e o logaritmando, fazendo $\log_a b = x$, obtendo $a^x = b$, marcando a opção (c).

Finalmente, um aluno pode ter usado a definição equivocadamente, como se tal fosse $\log b = a$, obtendo então $10^a = b$ e marcando a opção (d).

• • • • •

Etapa Flex

Para saber +

Quantos de nós, ao estudarmos a definição de logaritmo, já nos fizemos ou fizemos ao professor a seguinte pergunta:

Por que a e b têm *de ser positivos e, além disso, a tem que ser diferente de 1?*

Vamos contrariar estas afirmativas (fazendo justamente a negativo e depois $a = 1$) e aplicar a definição de logaritmo para ver o que acontece!

Se, por absurdo, fizéssemos $a = 1$, ao aplicar a definição, teríamos:

$$\log_1 b = x \leftrightarrow 1^x = b$$

Daí, para qualquer valor real de x, b seria sempre igual a 1, e não faria sentido tal cálculo.

Por outro lado, se tivéssemos, por exemplo, $b = -4$, ao aplicar a definição, teríamos:

$$\log_2(-4) = x \leftrightarrow 2^x = -4$$

Porém, para nenhum x real obtém-se um resultado negativo!

Por fim, se tivéssemos, por exemplo, $a = -2$ e $b = 8$, teríamos:

$$\log_{(-2)} 2 = x \leftrightarrow (-2)^x = 8$$

E, mais uma vez, nenhum número real satisfaz a tal condição.

Testando vários outros números, pode-se facilmente perceber a importância das condições de existência de um logaritmo.

Além disso, a definição de logaritmo também pode verificar algumas propriedades básicas muito úteis, tais como:

- $\log_a a = 1$ pois $a^1 = a$
- $\log_a 1 = 0$ pois $a^0 = 1$
- $\log_a a^n = n$ pois $a^n = a^n$.

Professor

Agora, é com você!

Que tal agora, exercitarmos o uso da definição de logaritmo?

Exercícios

1. Calcule os logaritmos a seguir:

a. $\log_5 125 = 3$ porque $5^3 = 125$

b. $\log 10000 = 4$ porque $10^4 = 10000$

c. $\log_{35} 35 = 1$

d. $\log_{104} 1 = 0$

e. $\log_2 2^{1317} = 1317$

f. $\log_7 7^{-13} = -7$

g. $\log_3 243 = 5$ porque $3^5 = 243$

h. $\log_5 \sqrt{125} = \frac{3}{2}$ porque $\sqrt{125} = 125^{\frac{1}{2}}$ e $125 = 5^3$, logo, $\sqrt{125} = 5^{\frac{3}{2}}$

2. Responda:

a. Qual o logaritmo de 0,25 na base 2?

R: $\log_2 0{,}25 = -2$ porque $0{,}25 = \frac{1}{4}$ e $4 = 2^2$, logo $0{,}25 = 2^{-2}$

b. Qual o logaritmo de 625 na base 5? E na base 25? E na base 125?

R: $\log_5 625 = 4$ porque $5^4 = 625$; $\log_{25} 625 = 2$ porque $5^4 = 25^2 = 625$ e

$\log_{125} 625 = \frac{4}{3}$ porque, se $x = \log_{125} 625$, então $125^x = 625$, mas $125 = 5^3$ e $625 = 5^4$, donde: $5^{3x} = 5^4$ e, então, $3x = 4$ e $x = \frac{4}{3}$.

c. Qual o número cujo logaritmo na base 3 vale 2?

R: se $\log_3 x = 2$, então, $x = 3^2$ ou seja $x = 9$

d. Qual a base na qual o logaritmo de $\frac{1}{4}$ vale -1?

R: Se $\log_x 41 = -1$ é porque $x^{-1} = 41$, ou seja, $\frac{1}{x} = 41$ donde $x = \frac{1}{41}$.

e. Qual a base na qual o logaritmo de 243 vale 5?

R. Se $\log_x 243 = 5$ é porque $x^5 = 243$, mas $243 = 3^5$, e, de $x^5 = 3^5$ vem que $x = 3$

Professor

Ficha para realização da Etapa 1 – Dados Potentes!

Tabela de Potências	
2^0	1
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	16
2^5	32
2^6	64
2^7	128
2^8	256
2^9	512
2^{10}	1024
2^{11}	2048
2^{12}	4096

Professor

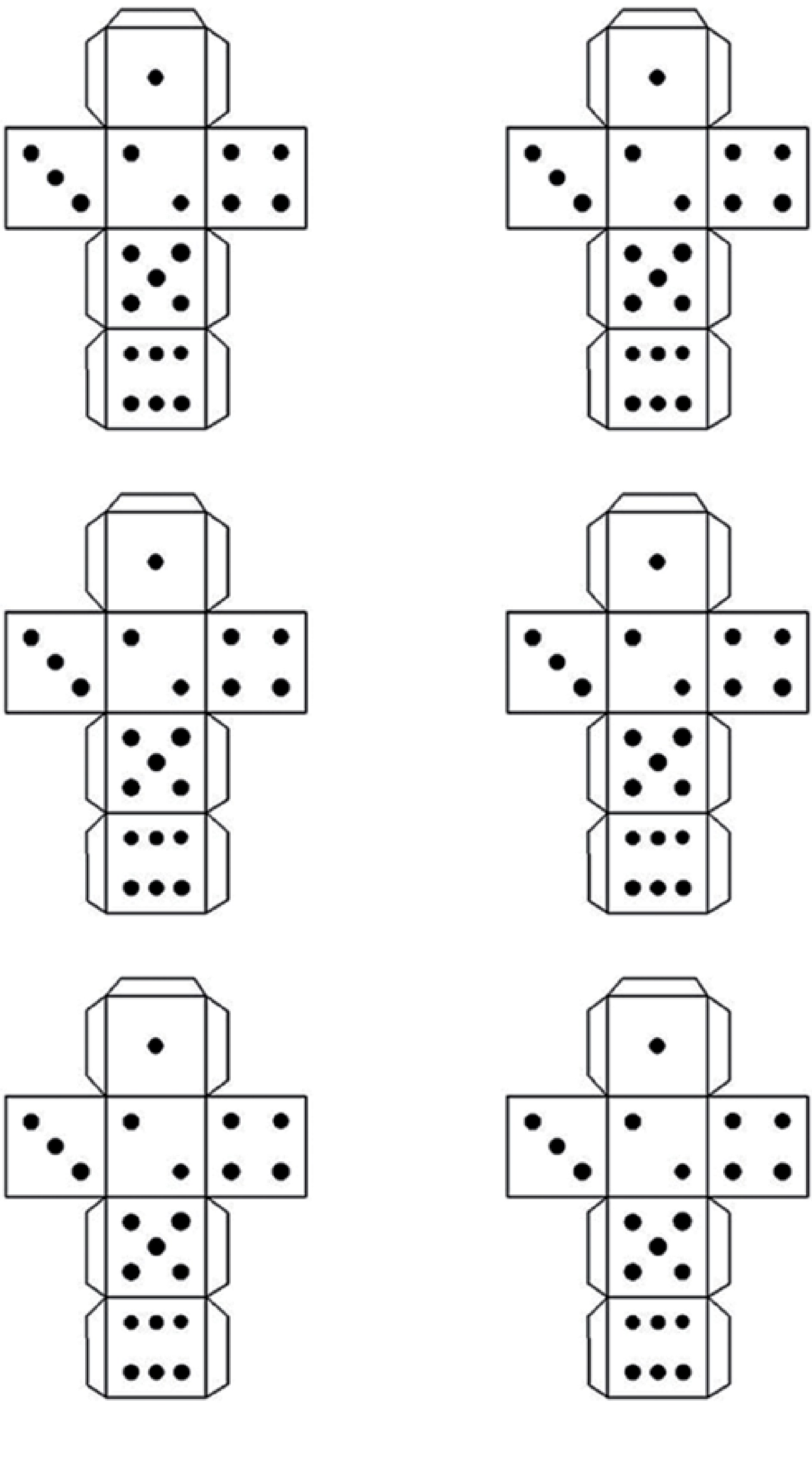
Quadro 1 – Multiplicação

x	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
2^1						
2^2						
2^3						
2^4						
2^5						
2^6						

Quadro 2 – Divisão

÷	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
2^1						
2^2						
2^3						
2^4						
2^5						
2^6						

Modelos de dados



Modelo de cartões para a Etapa 3 – Procurando a Alma Gêmea

$\log_2 32$	$\log_5 \sqrt{5}$	$\log_4 64$
$\log_2 1$	$\log_2 \frac{1}{16}$	$\log_5 \frac{1}{25}$
$\log_{171} 171$	$\log_{10} 10000$	$\log_4 8$
5	**0**	$\frac{3}{2}$
$\frac{1}{2}$	**-4**	**-2**
3	**1**	**4**

Anexo 1