FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA

Matemática 2º Ano – 4º Bimestre/2012

Plano de Trabalho 1

SISTEMAS LINEARES

Cursista: Izabel Leal Vieira

Tutor: Paulo Alexandre Alves de Carvalho

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este plano de trabalho tem por finalidade trabalhar com o aluno sistemas lineares, permitindo ao mesmo visualizar a resolução destes sistemas lineares em situações do cotidiano.

Este plano de trabalho será iniciado com uma revisão de resolução de sistemas de duas incógnitas trabalhando o método da substituição e o método da adição. Dessa forma o aluno poderá verificar qual o método adequado para resolução de cada sistema, e com isso escolher o que for mais conveniente para resolvê-lo. Neste plano também serão abordados dois métodos para a resolução de sistemas lineares, a regra de Cramer e o método do Escalonamento, para que o aluno também tenha a possibilidade de, quando precisar resolver algum sistema linear, possa optar pelo método que achar mais conveniente a ele.

É importante estimular o aluno a realmente compreender o que está sendo abordado, pois muitas vezes o aluno não vê a aplicabilidade de determinado conteúdo escolar na sua realidade, e com isso o aprendizado deixa de ser atrativo para ele. Portanto, é importante a utilização de questões contextualizadas que possa ter relação com o cotidiano do aluno.

Para trabalhar esse conteúdo serão necessários 11 tempos de 50 minutos para o desenvolvimento dos conteúdos e mais 2 tempos de 50 minutos para a atividade de avaliação da aprendizagem, o teste individual (além da avaliação que será feita no momento da aula, durante a realização das atividades).

DESENVOLVIMENTO

<u>ATIVIDADE 1</u>

HABILIDADE RELACIONADA: Identificar os sistemas lineares como modelos matemáticos que traduzem situações-problemas para a linguagem matemática; resolver problemas utilizando sistemas lineares.

PRÉ-REQUISITOS: Equações do 1º grau; sistemas de equações do 1º grau.

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Folhas xerocadas, quadro.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Duplas

OBJETIVOS: Revisar resolução de sistemas de equações com duas incógnitas (método da substituição e método da adição).

METODOLOGIA ADOTADA:

Revisar o tema apresentando ao aluno alguns exemplos de questões para se trabalhar sistemas de equações. Trabalhar alguns exercícios para revisar e fixar o conteúdo. Veja abaixo.

Vamos recordar dois métodos de resolução de um sistema de duas equações.

Método da substituição

A resolução por este método consiste em:

→ isolar, no 1º membro de uma das equações, uma das incógnitas;

→ substituir, na outra equação, a incógnita isolada, obtendo uma terceira equação;

→ resolver a terceira equação, e substituir o valor obtido para a sua incógnita, em uma das equações do sistema, para obter o valor da outra incógnita.

Veja os exemplos abaixo.

1) Luís pagou uma dívida de R$ 89,00 com notas de R$ 5,00 e de R$ 2,00. Ao todo, Luís usou 22 notas. Quantas foram as notas de R$ 5,00 e de R$ 2,00?

Resolvendo:

$$\begin{cases} x + y = 22 \\ 5x + 2y = 89 \end{cases}$$

1º) $x + y = 22$

$x = 22 - y$

2º) $5 \cdot (22 - y) + 2y = 89$

$110 - 5y + 2y = 89$

$-3y = -21$

$y = 7$

3º) $x = 22 - 7$

$x = 15$

Logo, foram 15 notas de R$ 5,00 e 7 notas de R$ 2,00.

2) Em um estacionamento, há 14 veículos, entre carros e motos. Sabe-se que o número total de rodas é 48. Quantos carros e quantas motos há nesse estacionamento?

Resolvendo:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 4x + 2y = 48 \end{cases}$$

1º) $x + y = 14$

$x = 14 - y$

2º) $4 \cdot (14 - y) + 2y = 48$

$56 - 4y + 2y = 48$

$-2y = -8$

$y = 4$

3º) $x = 14 - 4$

$x = 10$

Logo, há nesse estacionamento 10 carros e 4 motos.

<u>Método da Adição</u>

A resolução de um sistema por este método consiste em:

→ multiplicar todos os termos de cada uma das equações por um número conveniente (quando necessário), de modo que os novos coeficientes de uma das incógnitas sejam números opostos;

→ adicionar os primeiros membros e os segundos membros das novas equações, obtendo uma terceira equação com uma só incógnita;

→ resolver a terceira equação e substituir o valor obtido para a sua incógnita, em uma das equações do sistema, para obter o valor da outra incógnita.

Veja os exemplos.

1) A soma das idades de dois irmão é 29 anos e a diferença entre elas é 5 anos. Indique a idade de cada um deles.

Resolvendo:

$$\begin{cases} x + y = 29 \\ x - y = 5 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{array}{l} x + y = 29 \\ \underline{x - y = \ 5} \end{array}$$

1º)
$$\begin{array}{rl} & x + y = 29 \\ + & \underline{x - y = \ 5} \\ & 2x = 34 \\ & x = 17 \end{array}$$

2º)
$$\begin{array}{l} x + y = 29 \\ y = 12 \end{array}$$

As idades deles são 17 anos e 12 anos.

2) Resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 8x - 2y = 65 \\ 3x - 2y = 15 \quad x \ (-1) \end{cases}$

Resolvendo:

1º)
$$\begin{array}{rl} & 8x - 2y = 65 \\ + & \underline{-3x + 2y = -15} \\ & 5x = 50 \\ & x = 10 \end{array}$$

2º)
$$\begin{array}{l} 3x - 2y = 15 \\ 3 \cdot 10 - 2y = 15 \\ -2y = -15 \\ y = 7{,}5 \end{array}$$

S = {(10; 7,5)}

b) $\begin{cases} 4x + y = 7 \\ 2x - 5y = 9 \quad x\ (-2) \end{cases}$

Resolvendo:

1º) $4x + y = 7$

$+$

$\underline{-4x + 10y = -18}$

$11y = -11$

$y = -1$

2º) $4x + y = 7$

$4x + (-1) = 7$

$4x = 8$

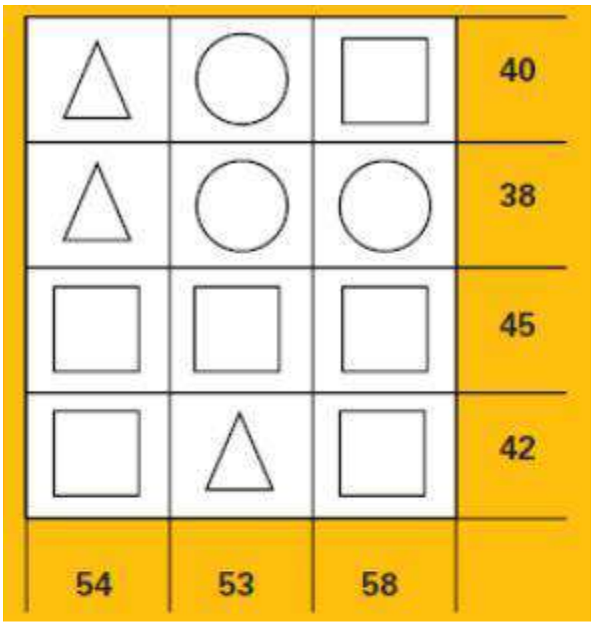
$x = 2$

$S = \{(2, -1)\}$

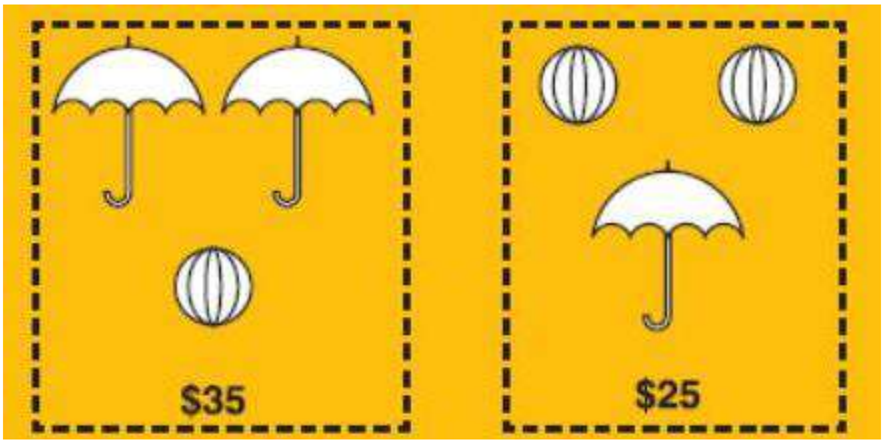
→ *<u>Modelos de questões para serem trabalhadas.</u>*

Observe as questões abaixo e tente resolvê-las.

1. Qual o valor do triângulo, do círculo e do quadrado?



2. Quanto vale o guarda-chuva e a bola?



→ *Resolva usando o método que achar mais conveniente:*

▸ 1) Pedrinho comprou duas coxinhas e um refrigerante pelos quais pagou R$ 7,00. Seu irmão Joãozinho comprou uma coxinha e um refrigerante a mais, pagando R$ 11,50. Qual é o preço do refrigerante e o da coxinha?

▸ 2) A soma de dois números é 530 e a diferença entre eles é 178. Quais são estes números?

▸ 3) Um certo jogo possui fichas com duas ou quatro figuras cada uma. Certo jogador possui 8 fichas com um total de 22 figuras. Quantas fichas de cada tipo possui este jogador?

▸ 4) Tenho R$ 2.300,00 em notas de R$ 50,00 e R$ 100,00, totalizando 30 notas. Quantas notas tenho de cada valor?

ATIVIDADE 2

HABILIDADE RELACIONADA: Identificar os sistemas lineares como modelos matemáticos que traduzem situações-problemas para a linguagem matemática; resolver problemas utilizando sistemas lineares.

PRÉ-REQUISITOS: Equações do 1º grau; sistemas de equações do 1º grau.

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático, folhas xerocadas, quadro.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual

OBJETIVOS: Trabalhar sistemas lineares; sistemas lineares equivalentes e sistemas lineares homogêneos; classificação de sistemas lineares.

METODOLOGIA ADOTADA:

Veja abaixo.

Equação Linear

Equação linear é uma equação da forma:

$$\boxed{a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + ... + a_{1n} x_n = b_1}$$

onde

- x_1, x_2, ..., x_n são as incógnitas;
- a_{11}, a_{12}, ...,a_{1n} são os coeficientes;
- b_1 é o termo independente.

Exemplos de equações lineares:

$4x + 3y - 2z = 0$

$2x - 3y + 0z - w = -3$

Sistemas lineares

Numa lanchonete os pastéis têm preço único e os refrigerantes também. Nesse lugar, paguei R$ 11,60 por 5 pastéis e 3 copos de refrigerante e meu amigo pagou R$ 7,20 por 3 pastéis e copos de refrigerante. Qual o preço do pastel e do refrigerante?

Para equacionar essa equação, vamos chamar de:

→ x o preço do pastel
→ y o preço do refrigerante

Então,

$$\begin{cases} 5x + 3y = 11{,}60 \\ 3x + 2y = 7{,}20 \end{cases}$$

Temos, assim, um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas.

Para achar a solução desse sistema, podemos utilizar o método da adição (que revisamos anteriormente).

$$\begin{cases} 5x + 3y = 11{,}60 & \times (3) \rightarrow & 15x + 9y = 34{,}80 \\ 3x + 2y = 7{,}20 & \times (-5) \rightarrow & -15x - 10y = -36{,}00 \end{cases}$$

$$-y = -1{,}20$$

$$y = 1{,}20$$

Daí, temos:

$5x + 3 \cdot 1{,}20 = 11{,}60$

$5x + 3{,}60 = 11{,}60$

$x = 1{,}60$

Logo, o pastel custa R$ 1,60 e o refrigerante custa R$ 1,20.

O par ordenado (1,60 ; 1,20) é a solução do sistema.

O conjunto de todas as soluções de um sistema é chamado de conjunto solução (S) ou conjunto verdade (V).

De uma maneira geral, podemos dizer que denomina-se sistema linear um conjunto de **m** equações lineares de **n** incógnitas ($x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$) do tipo:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$

$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3$

....

....

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n$

Exemplo:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -8 \\ 4x - 3y + 2z = 4 \\ 7x + 2y - 3z = 2 \end{cases}$$

Temos acima um sistema de 3 equações e 3 incógnitas (ou variáveis). Os termos a_{11}, a_{12}, ... , a_{1n}, ... , a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn} são denominados <u>coeficientes</u> e b_1, b_2, ... , b_n são os <u>termos independentes</u>. Os termos x_1, x_2, ..., x_n são as incógnitas.

Exemplo: O terno ordenado (2, 3, 1) é solução do sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 7 \\ 3x + 2y - z = 11 \\ x + 2z = 4 \\ 3x - y - z = 2 \end{cases}$$

pois todas as equações são satisfeitas para x=2, y=3 e z=1.

<u>Sistemas lineares equivalentes</u>

Dois sistemas lineares que admitem o mesmo conjunto solução são ditos equivalentes. Por exemplo, os sistemas:

$$\begin{cases} x - 2y = -3 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 3x - 4y = -5 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

são equivalentes, pois ambos têm como conjunto solução S = {(1, 2)}.

Observe que estes sistemas são equivalentes, embora as equações que os formam não o sejam.

<u>Classificação de um sistema linear</u>

Sistema Possível e Determinado (SPD): ao ser resolvido encontraremos uma única solução, isto é, apenas um único valor para as incógnitas. O sistema a seguir é considerado um sistema possível e determinado, pois a única solução existente para ele é o par ordenado (4,1).

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Sistema Possível e Indeterminado (SPI): esse tipo de sistema possui infinitas soluções, os valores de x e y assumem inúmeros valores. Observe o sistema a seguir, x e y podem assumir mais de um valor, (0,4), (1,3), (2,2), (3,1) e etc.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 0x - 0y = 0 \end{cases}$$

Sistema Impossível (SI): ao ser resolvido, não encontraremos soluções possíveis para as incógnitas, por isso esse tipo de sistema é classificado como impossível. O sistema a seguir é impossível.

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$\text{Sistema} \begin{cases} \text{Possível} \begin{cases} \text{Determinado} \\ \text{Indeterminado} \end{cases} \\ \\ \text{Impossível} \end{cases}$$

Sistemas lineares homogêneos

Um sistema linear é homogêneo quando os termos independentes de todas as equações são nulos. Todo sistema linear homogêneo admite pelo menos a solução trivial, que é a solução identicamente nula. Assim, todo sistema linear homogêneo é possível. Este tipo de sistema poderá ser determinado se admitir somente a solução trivial ou indeterminado se admitir outras soluções além da trivial.

Exemplo: O sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 4x + 2y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

é determinado, pois possui a solução x = 0, y = 0 e z = 0.

→Utilizar exercícios e situações-problema existentes no livro didático.

ATIVIDADE 3

HABILIDADE RELACIONADA: Identificar os sistemas lineares como modelos matemáticos que traduzem situações-problemas para a linguagem matemática; resolver problemas utilizando sistemas lineares.

PRÉ-REQUISITOS: Determinantes.

TEMPO DE DURAÇÃO: 150 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático; folhas xerocadas, quadro.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual

OBJETIVOS: Resolver sistemas lineares utilizando a Regra de Cramer.

METODOLOGIA ADOTADA:

Veja abaixo.

Regra de Cramer

A regra de Cramer é uma das maneiras de resolver um sistema linear, mas só poderá ser utilizada na resolução de sistemas que o número de equações e o número de incógnitas forem iguais.

Portanto, ao resolvermos um sistema linear de n equações e n incógnitas para a sua resolução devemos calcular o determinante (D) da equação incompleta do sistema e depois substituirmos os termos independentes em cada coluna e calcular os seus respectivos determinantes e assim aplicar a regra de Cramer que diz:

Os valores das incógnitas são calculados da seguinte forma:

$$x_1 = \frac{D1}{D}$$

$$x_2 = \frac{D2}{D}$$

$$x_3 = \frac{D3}{D} \quad \ldots \quad x_n = \frac{Dn}{D}$$

Veja no exemplo abaixo como aplicar a regra de Cramer:

Dado o sistema linear $\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$, para resolvê-lo podemos utilizar da regra de Cramer, pois ele possui 3 equações e 3 incógnitas, ou seja, o número de incógnitas é igual ao número de equações.

Devemos encontrar a matriz incompleta desse sistema linear que será chamada de A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Agora calculamos o seu determinante que será representado por D.

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right.$$

D = 1 + 6 + 2 + 3 – 1 + 4

D = 15.

Agora devemos substituir os temos independentes na primeira coluna da matriz A, formando assim uma segunda matriz que será representada por Ax.

$$Ax = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Agora calcularmos o seu determinante representado por Dx.

$$Dx = \left|\begin{array}{ccc|cc} 8 & 2 & 1 & 8 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right.$$

Dx = 8 + 4 + 3 + 2 – 8 + 6

Dx = 15

Substituímos os termos independentes na segunda coluna da matriz incompleta formando a matriz Ay.

$$Ay = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Agora calcularmos o seu determinante Dy.

$$Dy = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 8 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right.$$

Dy = -3 + 24 +4 – 9 – 2 + 16

Dy = 30

Substituindo os termos independentes do sistema na terceira coluna da matriz incompleta formaremos a matriz Az.

$$Az = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Agora calculamos o seu determinante representado por Dz.

$$Dz = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 8 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right|$$

Depois de ter substituído todas as colunas da matriz incompleta pelos termos independentes, iremos colocar em prática a regra de Cramer.

A incógnita $x = \frac{Dx}{D} = \frac{15}{15} = 1$

A incógnita $y = \frac{Dy}{D} = \frac{30}{15} = 2$

A incógnita $z = \frac{Dz}{D} = \frac{45}{15} = 3$

Portanto, o conjunto verdade desse sistema será V = {(1,2,3)}.

Veja outros exemplos:

01. Resolva pela regra de CRAMER:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \qquad x = \frac{Dx}{D} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \qquad y = \frac{Dy}{D} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$S = \{(1\ ;\ 2)\}$$

02. Resolva pela regra de CRAMER:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3 - 2 - 3 - 1 + 4 = 3$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 6 - 6 - 3 = 3 \qquad x = \frac{Dx}{D} = \frac{3}{3} = 1$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -9 + 12 + 6 - 12 = -3 \qquad y = \frac{Dy}{D} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$Dz = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 - 9 + 12 = 3 \qquad z = \frac{Dz}{D} = \frac{3}{3} = 1$$

$$S = \{(1; -1; 1)\}$$

→Utilizar exercícios e situações-problema existentes no livro didático para fixar o conteúdo.

ATIVIDADE 4

HABILIDADE RELACIONADA: Identificar os sistemas lineares como modelos matemáticos que traduzem situações-problemas para a linguagem matemática; resolver problemas utilizando sistemas lineares.

PRÉ-REQUISITOS: Operações matemáticas (adição, subtração, multiplicação e divisão).

TEMPO DE DURAÇÃO: 200 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático, folhas xerocadas, quadro, exemplos para apresentar em slides.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual

OBJETIVOS: Resolver sistemas lineares utilizando o Método do Escalonamento.

METODOLOGIA ADOTADA:

Veja abaixo.

Método de eliminação de Gauss ou método do escalonamento

O método de eliminação de Gauss para solução de sistemas de equações lineares, também conhecido como escalonamento, baseia-se em três transformações elementares, a saber:

T1 - um sistema de equações não se altera, quando permutamos as posições de duas equações quaisquer do sistema.

Exemplo: os sistemas de equações lineares

$$\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ 5x - 2y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 2y = 6 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$$

são obviamente equivalentes, ou seja, possuem o mesmo conjunto solução. Observe que apenas mudamos a ordem de apresentação das equações.

T2 - um sistema de equações não se altera, quando multiplicamos ambos os membros de qualquer uma das equações do sistema, por um número real não nulo.

Exemplo: os sistemas de equações lineares

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 5 \\ 2x + y + z = 7 \\ x - 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 5 \\ 2x + y + z = 7 \\ 3x - 6y + 9z = 3 \end{cases}$$

são obviamente equivalentes, pois a terceira equação foi multiplicada membro a membro por 3.

T3 - um sistema de equações lineares não se altera, quando substituímos uma equação qualquer por outra obtida a partir da adição membro a membro desta equação, com outra na qual foi aplicada a transformação T2.

Exemplo: os sistemas

$$\begin{cases} 15x - 3y = 22 \\ 5x + 2y = 32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15x - 3y = 22 \\ ...... - 9y = - 74 \end{cases}$$

são obviamente equivalentes (ou seja, possuem o mesmo conjunto solução), pois a segunda equação foi substituída pela adição da primeira equação, com a segunda multiplicada por (-3).

Vamos resolver, a título de exemplo, um sistema de equações lineares, pelo método de Gauss ou escalonamento.

Seja o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 3 \text{ .Equação 1} \\ 2x \text{ . - .} y + z = 12 \text{ Equação 2} \\ 4x + 3y - 5z = 6 \text{ .Equação 3} \end{cases}$$

SOLUÇÃO:

1 - Aplicando a transformação T1, permutando as posições das equações 1 e 2, vem:

$$\begin{cases} 2x \text{ .} - y + z = 12 \\ x + 3y - 2z = 3 \\ 4x + 3y - 5z = 6 \end{cases}$$

2 - Multiplicando ambos os membros da equação 2, por (- 2) - uso da transformação T2 - somando o resultado obtido com a equação 1 e substituindo a equação 2 pelo resultado obtido - uso da transformação T3 - vem:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 12 \\ -7y + 5z = 6 \\ 4x + 3y - 5z = 6 \end{cases}$$

3 - Multiplicando ambos os membros da equação 1 por (-2), somando o resultado obtido com a equação 3 e substituindo a equação 3 pela nova equação obtida, vem:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 12 \\ -7y + 5z = 6 \\ 5y - 7z = -18 \end{cases}$$

4 - Multiplicando a segunda equação acima por 5 e a terceira por 7, vem:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 12 \\ -35y + 25z = 30 \\ 35y - 49z = -126 \end{cases}$$

5 - Somando a segunda equação acima com a terceira, e substituindo a terceira pelo resultado obtido, vem:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 12 \\ -35y + 25z = 30 \\ -24z = -96 \end{cases}$$

6 - Do sistema acima, tiramos imediatamente que: $z = (-96) / (-24) = 4$, ou seja, $z = 4$.

Como conhecemos agora o valor de z, fica fácil achar os valores das outras incógnitas:

Teremos: $-35y + 25(4) = 30 \rightarrow y = 2$.

Analogamente, substituindo os valores conhecidos de y e z na primeira equação acima, fica:

$2x - 2 + 4 = 12 \rightarrow x = 5$.

Portanto, $x = 5$, $y = 2$ e $z = 4$, constitui a solução do sistema dado. Podemos então escrever que o conjunto solução S do sistema dado, é o conjunto unitário formado por um terno ordenado (5, 2, 4):

$$\mathbf{S = \{ (5, 2, 4) \}}$$

Verificação:

Substituindo os valores de x, y e z no sistema original, teremos:

$$\begin{cases} 5 + 3(2) - 2(4) = 3 \\ 2(5) - (2) + (4) = 12 \\ 4(5) + 3(2) - 5(4) = 6 \end{cases}$$

o que comprova que o terno ordenado (5, 2, 4) é solução do sistema dado.

Veja outro exemplo:

Dado o sistema de equações $\begin{cases} 2x+y+z=8 \\ x+y+4z=15 \\ 3y+2z=9 \end{cases}$, vamos escrevê-lo na forma de uma matriz completa dos coeficientes.

$$\left|\begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{matrix}\right| \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

Vamos subtrair os elementos da linha 2(L2) pela metade dos elementos da linha 1(L1).

L2 – L1 x 1/2

$$\left|\begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1/2 & 7/2 & 11 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{matrix}\right| \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

Vamos subtrair os elementos da linha 3(L3) pelo sêxtuplo dos elementos da linha 2(L2).

L3 – 6 x L2

$$\left|\begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1/2 & 7/2 & 11 \\ 0 & 0 & -19 & -57 \end{matrix}\right| \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

Observe que ao realizarmos as operações demonstradas, conseguimos zerar alguns elementos da matriz e, respectivamente, coeficientes do sistema de equações. Veja o sistema simplificado que obtemos com o escalonamento da matriz completa dos coeficientes numéricos:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 8 \\ \dfrac{y}{2} + \dfrac{7z}{2} = 11 \\ -19z = -57 \end{cases}$$

–19z = –57

19z = 57

z = 3

$$\frac{y}{2} + \frac{7z}{2} = 11$$
$$\frac{y}{2} + \frac{7*3}{2} = 11$$
$$\frac{y}{2} + \frac{21}{2} = 11$$
$$y + 21 = 22$$
$$y = 22 - 21$$
$$y = 1$$

2x + y + z = 8

2x + 1 + 3 = 8

2x = 8 – 4

2x = 4

x = 2

O conjunto solução do sistema proposto é: *x = 2, y = 1 e z = 3.*

O sistema de escalonamento de matrizes completas dos coeficientes numéricos de um sistema de equações lineares possui a finalidade de simplificar o sistema através de operações entre os elementos pertencentes às linhas da matriz.

→Utilizar exercícios e situações-problema existentes no livro didático para fixar o conteúdo.

AVALIAÇÃO

A avaliação dos alunos ocorrerá durante todas as atividades (1, 2, 3 e 4). Os alunos serão avaliados no momento da realização dos exercícios, bem como o envolvimento deles nas atividades. Serão observadas as dificuldades apresentadas e através dessa observação serão dadas explicações extras que possam auxiliá-los. Os alunos poderão trocar ideias entre si, um ajudando o outro.

A avaliação também será feita por meio de vistos nos cadernos referentes aos exercícios deixados para serem feitos em casa e também do teste individual que será aplicado envolvendo as atividades 3 e 4 trabalhadas. Para a realização do teste será reservada duas aulas de 50 minutos.

Através dessas avaliações, pode-se observar como foram desenvolvidas as competências trabalhadas e a compreensão dos alunos acerca dos conteúdos abordados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ROTEIROS DE AÇÃO – Sistemas lineares - Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 2º ano do Ensino Médio – 4º bimestre – disponível em http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. Matemática Completa-2ª série Ensino Médio.2ª ed. FTD, São Paulo: 2005.

Endereços eletrônicos acessados de 05/11/2012 a 12/11/2012, citados ao longo do trabalho:

http://www.algosobre.com.br/matematica/sistemas-lineares-ii.html

http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/matrizes/sistemas

http://www.matematicadidatica.com.br/SistemasEquacoesPrimeiroGrauDuasIncognitasExercicios.aspx#anchor_ex2

http://www.brasilescola.com/matematica/classificacao-um-sistema-linear.htm

http://www.brasilescola.com/matematica/regra-cramer.htm

http://www.educacional.com.br/spe/MostraAtividade_cadernodeatividades.asp?

http://www.algosobre.com.br/matematica/sistemas-lineares-metodo-de-eliminacao-de-gauss.html