FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA

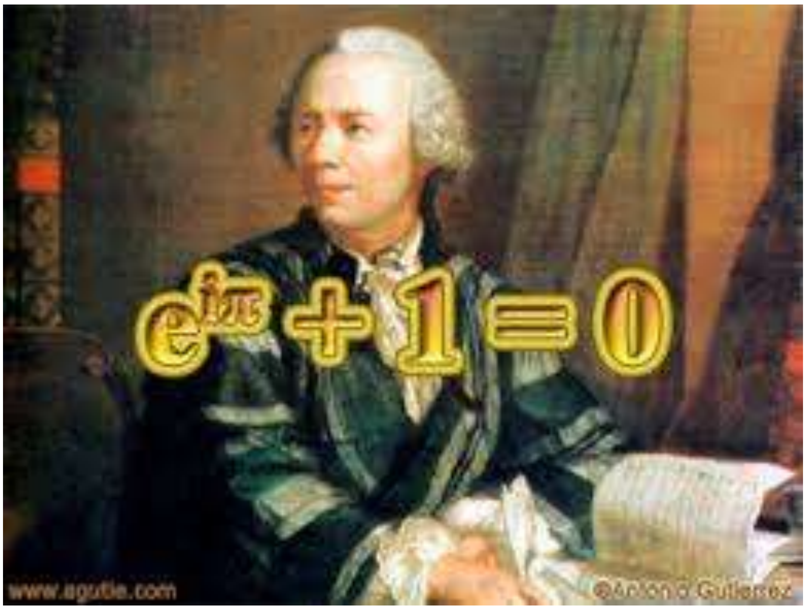
FUNDAÇÃO CECIERJ/CEDERJ

MATEMÁTICA 1º ANO - 4º BIMESTRE/2013

Aline Nunes Costa

alineprof31@hotmail.com

FUNÇÃO EXPONENCIAL



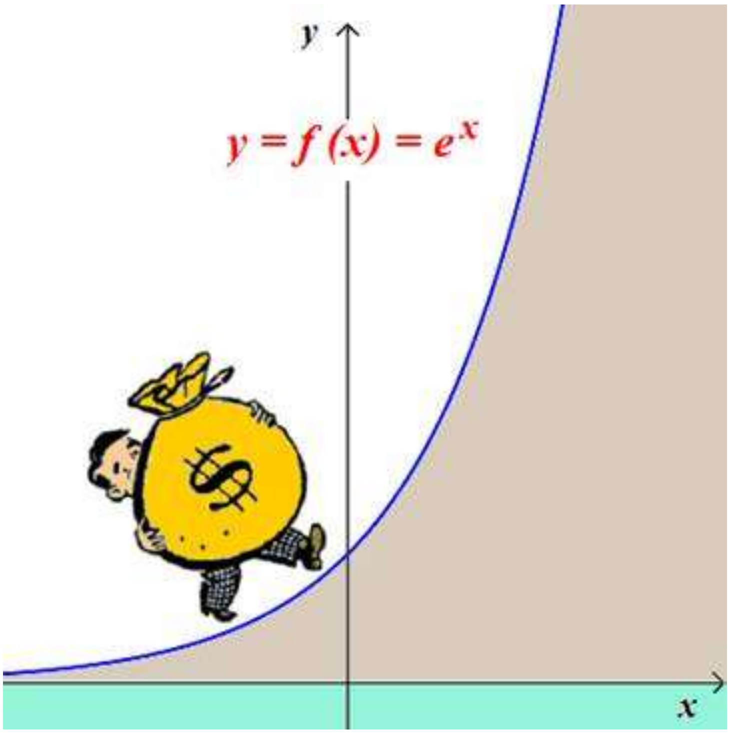
TAREFA 1 – PLANO DE TRABALHO :

FUNÇÕES EXPONENCIAIS

CURSISTA: ALINE NUNES COSTA

TUTOR: Marcelo Rodrigues GRUPO:01

SUMÁRIO



HABILIDADES:

- Identificar fenômenos que crescem ou decrescem exponencialmente.

- Identificar a representação algébrica e gráfica de uma função exponencial.

- Resolver problemas significativos utilizando a função exponencial..

- Resolver equações exponenciais simples.

INTRODUÇÃO:

As primeiras noções do que é uma função foram inventadas para uma melhor compreensão do real - que tem na fluência/variabilidade uma de suas características principais. Assim, um caminho natural para o estudo das funções seria caracterizá-las conforme a maneira com que variam, estabelecendo-se, desta maneira, uma verdadeira conexão com a realidade e sua origem histórica. Partindo do caráter formativo de tais conceitos, a verdade é que a grande maioria dos alunos que prosseguem os estudos superiores onde a Matemática continua a ser estudada, não voltam à abordar o aperfeiçoamento do que vêm já de trás, muito em especial as funções exponenciais que exploram , recordando e ampliando o conceito de potenciação. Portanto cabe a nós, o comprometimento de ensinar de forma clara para que ao longo da vida isso permaneça como um conhecimento adquirido, servindo de pré-requisitos para próximas etapas do processo de ensino aprendizagem.

Como as funções fazem parte da vida do aluno mesmo sem que eles percebam e eles precisam estar habituados a desenvolvê-las com desembaraço, utilizando todos os processos válidos para reconhecer, construir e encontrar as soluções de problemas que envolvam funções, mesmo as mais complexas como as exponenciais que se destacam por um aumento considerável.

O trabalho apresentado neste plano de atividade busca promover atitudes para aprimorar seu conhecimento sobre potenciação e funções, sistematizando os já possuem e ampliando para funções exponenciais, onde precisará operar com as propriedades das potencias, descobrindo gráficos e sempre verificando os resultados obtidos. Tendo por objetivo permitir que os estudantes entendam as aplicações do conteúdo chamado “FUNÇÕES EXPONENCIAIS”. Uma função exponencial é utilizada na representação de situações em que a taxa de variação é considerada grande, por exemplo, em rendimentos financeiros capitalizados por juros compostos, no decaimento radioativo de substâncias químicas, desenvolvimento de bactérias e micro-organismos, crescimento populacional entre outras situações.

O trabalho visa, também, transmitir o conhecimento através da interpretação gráfica feita pelos estudantes com resoluções de situações-problemas e generalizações.

Na maioria das vezes o estudante tem dificuldades em associar o estudo a situações comuns, suas aplicações e por isso é necessário utilizar assuntos que possam ser interessantes.

DESENVOLVIMENTO:

O trabalho é desenvolvido individualmente ou em grupos de 2 alunos de acordo com o espaço e organização da turma. Será dividido em quatro etapas, onde cada etapa é compreendida por uma aula de 50 minutos.

A primeira etapa será uma revisão de potenciação, utilizando o roteiro de ação 2 , sugerido pelo curso e que aborda de maneira lúdica essa revisão. Partindo daí, falaremos sobre equações exponenciais, sua aplicabilidade e representatividade como função, destacando suas características próprias.

A segunda etapa poderá ser desenvolvida na própria sala de aula, abordando o conteúdo através de explicações , aproveitando exemplos clássicos e partindo para alguns exercícios oferecidos pelo próprio livro didático

A terceira etapa consiste em aplicar um exercício desafio em dupla, para construírem uma paródia abrangendo regras e propriedades da potência e assim colocarem em prática tudo que viram na aula anterior. Ao final do exercício, faremos uma apresentação com as paródias, tendo em vista que a turma apresenta grupos distintos e um péssimo relacionamento entre eles. Isso fará com que possamos minimizar as diferenças, facilitando o convívio da turma de forma descontraída.

A quarta etapa consiste numa lista de exercícios que avaliará se compreenderam a definição e as abordagens mais significativas verificando o aprendizado do aluno, fixando o conteúdo e sanando dúvidas existentes. Nesta atividade os alunos estarão em duplas para um trabalho de verificação e troca de idéias e também poderão fazer uso da calculadora, como recurso facilitador no processo de aprendizagem.

.

Função Exponencial

Uma **função** é uma maneira de associar a cada valor do argumento x um único valor da função f(x). Isto pode ser feito especificando através de uma fórmula um relacionamento gráfico entre diagramas representando os dois conjuntos, e/ou uma regra de associação, mesmo uma tabela de correspondência pode ser construída; entre conjuntos numéricos é comum representarmos funções por seus gráficos, cada par de elementos relacionados pela função determina um ponto nesta representação, a restrição de unicidade da imagem implica em um único ponto da função em cada linha de chamada do valor independente x.

Equações exponenciais:

As equações exponenciais são aquelas que apresentam a incógnita no expoente.
Observe os exemplos:

$\mathbf{2^x = 256}$
$\mathbf{3^{x+1} = 9}$
$\mathbf{4^x = 1024}$
$\mathbf{2^{x+2} = 512}$

As equações exponenciais possuem um método de resolução diferenciado, precisamos igualar as bases para aplicarmos a propriedade de igualdade entre os expoentes.
Observe a resolução da seguinte equação:

$5^x = 625$ ***(fatorando 625 temos: 5^4)***
$5^x = 5^4$
$x = 4$
A solução da equação exponencial será $x = 4$.

Observação: fatorar significa decompor o número em fatores primos, isto é, escrever o número através de uma multiplicação de fatores iguais utilizando as regras de potenciação.

Acompanhe outro exemplo:

Vamos determinar a solução da equação $2^{x + 8} = 512$.

Devemos escrever 512 na forma fatorada, $512 = 2^9$.
Então:
$2^{x + 8} = 2^9$
$x + 8 = 9$
$x = 9 – 8$
$x = 1$
A solução da equação exponencial $2^{x + 8} = 512$ é $x = 1$.

Exemplo 3

Resolva a equação $2^x = \sqrt[5]{128}$.
Transforme a raiz quinta em potência:
$2^x = 128^{1/5}$

Pela fatoração do número 128 temos 27, então:
$2^x = (2^7)^{1/5}$
$x = 7 . 1/5$
$x = 7/5$

Portanto, a solução da equação exponencial $2^x = \sqrt[5]{128}$ é $x = 7/5$.

Exemplo 4

Encontre o valor de x que satisfaça a equação exponencial $2^{x^2 - 7x + 12} = 1$.

Para igualar as bases, vamos lembrar a regra da potenciação que diz o seguinte: ***"todo número diferente de zero elevado a zero é igual a 1."***
Com base na regra, podemos dizer que $1 = 2^0$, então:

$2^{x^2 - 7x + 12} = 2^0$
$x^2 - 7x + 12 = 0$, temos uma equação completa do 2º grau que deverá ser resolvida pelo teorema de Bháskara. Aplicando o método resolutivo descobrimos os seguintes valores: ***x' = 3*** e ***x" = 4***.
Portanto, os valores que satisfazem a equação exponencial $2^{x^2 - 7x + 12} = 1$ é $x = 3$ e $x = 4$.

Definição

Toda relação de dependência, em que uma incógnita depende do valor da outra, é denominada função. A função exponencial também possui essa mesma relação de dependência, com a diferença de que sua parte variável, representada por x, se encontra no expoente. As **funções exponenciais** são aquelas que crescem ou decrescem muito rapidamente. Elas desempenham papéis fundamentais na Matemática e nas ciências envolvidas com ela, como: Física, Química, Engenharia, Astronomia, Economia, Biologia, Psicologia e outras.

A função exponencial é a definida como sendo a inversa da função logarítmica natural, isto é:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Podemos concluir, então, que a função exponencial é definida por:

$$y = a^x,\ com\ 1 \neq a > 0$$

Como nos exemplos seguintes:

$y = 3^x$
$y = 2^x + 8$
$y = 0{,}2^x$
$y = 12^x$

A lei de formação de uma função exponencial indica que a base elevada ao expoente x precisa ser maior que zero e diferente de um, conforme a seguinte notação:

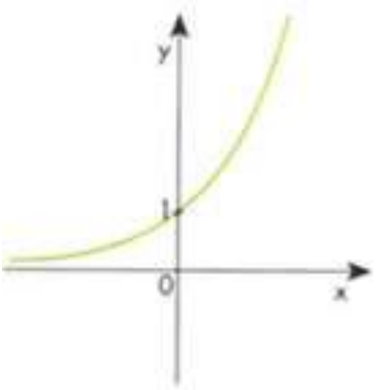
$f: R \rightarrow R$ tal que $y = a^x$, sendo que $a > 0$ e $a \neq 1$.

As funções exponenciais são usadas para representar situações em que a taxa de variação é considerada grande, por exemplo, em rendimentos financeiros capitalizados por juros compostos, no decaimento radioativo de substâncias químicas, desenvolvimento de bactérias e micro-organismos, crescimento populacional entre outras situações.

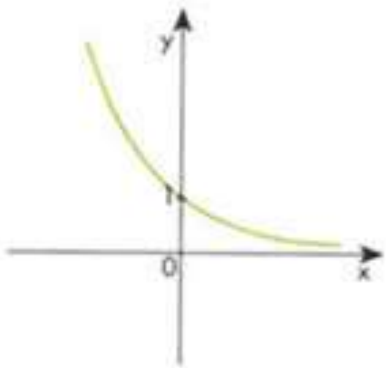
As funções exponenciais devem ser resolvidas utilizando, se necessário, as regras envolvendo potenciação.

Uma função pode ser representada através de um gráfico, e no caso da exponencial, temos duas situações: $a > 0$ e $0 < a < 1$. Observe como os gráficos são constituídos respeitando as condições propostas.

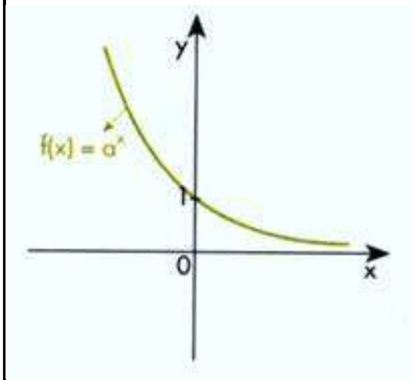
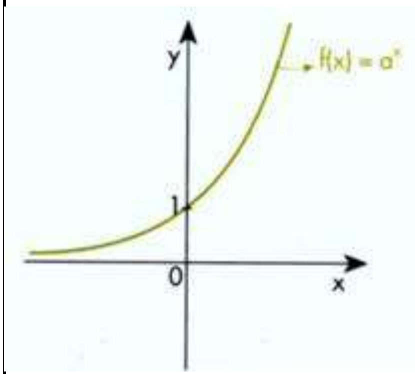
$a > 0$



$0 < a < 1$



GRÁFICOS DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Função exponencial $0 < a < 1$	Função exponencial $a > 1$
f: IR $\longrightarrow$ IR x $\longrightarrow$ a^x	f: IR $\longrightarrow$ IR x $\longrightarrow$ a^x
	
● Domínio = IR ● Contradomínio = IR^+ ● f é injectiva ● $f(x) > 0$, $\forall x \in IR$ ● f é continua e diferenciável em IR ● A função é estritamente decrescente. ● $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ ● $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$ ● $y = 0$ é assimptota horizontal	● Domínio = IR ● Contradomínio = IR^+ ● f é injectiva ● $f(x) > 0$, $\forall x \in IR$ ● f é continua e diferenciável em IR ● A função é estritamente crescente. ● $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ ● $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ ● $y = 0$ é assimptota horizontal

PROPRIEDADES DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Se a, x e y são dois números reais quaisquer e k é um número racional, então:

- $a^x a^y = a^{x + y}$
- $a^x / a^y = a^{x - y}$
- $(a^x)^y = a^{x.y}$
- $(a\ b)^x = a^x\ b^x$
- $(a / b)^x = a^x / b^x$
- $a^{-x} = 1 / a^x$

Estas relações também são válidas para exponenciais de base e (e = número de Euller = 2,718...)

- $y = e^x$ se, e somente se, $x = \ln(y)$
- $\ln(e^x) = x$
- $e^{x+y} = e^x.e^y$
- $e^{x-y} = e^x/e^y$
- $e^{x.k} = (e^x)^k$

A CONSTANTE DE EULER

Existe uma importantíssima constante matemática definida por e = exp(1)

O número e é um número irracional e positivo e em função da definição da função exponencial, temos que:

Ln(e) = 1

Este número é denotado por e em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), um dos primeiros a estudar as propriedades desse número.

O valor deste número expresso com 40 dígitos decimais, é:

e = 2,718281828459045235360287471352662497757

Se x é um número real, a função exponencial exp(.) pode ser escrita como a potência de base e com expoente x, isto é:

$e^x = \exp(x)$

Apresentando alguns exemplos envolvendo o uso de funções exponenciais.

Exemplo 1

(Unit-SE) Uma determinada máquina industrial se deprecia de tal forma que seu valor, t anos após a sua compra, é dado por $v(t) = v_0 * 2^{-0,2t}$, em que v_0 é uma constante real. Se, após 10 anos, a máquina estiver valendo R$ 12 000,00, determine o valor que ela foi comprada.
Temos que v(10) = 12 000, então:

$v(10) = v0 * 2^{-0,2*10}$

$12\ 000 = v0 * 2^{-2}$

12 000 = v0 * 1/4

12 000 : 1/ 4 = v0

v0 = 12 000 * 4

v0 = 48 000

A máquina foi comprada pelo valor de R$ 48 000,00.

Exemplo 2

(EU-PI) Suponha que, em 2003, o PIB (Produto Interno Bruto) de um país seja de 500 bilhões de dólares. Se o PIB crescer 3% ao ano, de forma cumulativa, qual será o PIB do país em 2023, dado em bilhões de dólares? Use $1,03^{20} = 1,80$.

Temos a seguinte função exponencial

$P(x) = P0 * (1 + i)^t$

$P(x) = 500 * (1 + 0,03)^{20}$

$P(x) = 500 * 1,03^{20}$

P(x) = 500 * 1,80

P(x) = 900

O PIB do país no ano de 2023 será igual a R$ 900 bilhões.

Observações sobre o desenvolvimento do Plano de Trabalho:

- ***O que o aluno poderá aprender com esta aula***

- Identificar a função exponencial e aprender noções básicas, assim como suas aplicações no dia a dia.

- Compreender através da Função Exponencial a forma de reprodução de bactérias.

- Resolver problemas relativos à Função Exponencial com o uso da calculadora em atividades envolvendo o cálculo de juros compostos e na descrição da evolução de populações.

- ***Conhecimentos prévios trabalhados pelo professor com o aluno***

Expoente inteiro não-negativo

Expoente inteiro negativo

Propriedades das potências

Definição da Função Exponencial e o reconhecimento da sua lei de formação

Gráfico da Função Exponencial

Exercícios a serem utilizados com auxilio da calculadora, onde estarei ensinando as teclas adequadas pois anteriormente foi solicitado que todos baixassem o aplicativo da calculadora cientifica: (atividade avaliativa)

1- Uma população de bactérias aumenta 50% em cada dia. Se no início da contagem havia 1 milhão de bactérias, quantas haverá ao fim de t dias?

Solução:

milhões de bactérias
Ao fim de 1 dia $1 + 0,5 = 1,5$
Ao fim de 2 dias $1,5 + 0,5x1,5 = 1,5(1 + 0,5) = 1,5^2$
Ao fim de 3 dias $1,5 + 0,5x1,5^2 = 1,5^2 (1 + 0,5) = 1,5^3$
......
Ao fim de t dias .... $1,5^t$

Vemos que o número de milhões de bactérias, ao fim de t dias, é dado por uma potência de expoente variável (exponencial).

Sabemos que esta potência tem significado para qualquer valor real de t; no início da contagem é $t = 0$ e antes desse instante é $t < 0$.

Sabemos, também, que os valores de 1,5t são sempre positivos. Portanto, temos a correspondência:

$$f: \mathbb{R} \quad \mathbb{R}$$

$$t \quad 1{,}5^t$$

que se chama **função exponencial de base 1,5**.

2- Um país contraiu em 1829 um empréstimo de 1 milhão de dólares, para pagar em cem anos, à taxa de juros de 9% ao ano. Por problemas de balança comercial, nada foi pago até hoje, e a dívida foi sendo "rolada", com capitalização anual dos juros. Qual era, aproximadamente, o valor da dívida em 1989? Para os cálculos, adotados, adote $(1{,}09)^8 = 2$ e $2^{10} = 10^3$.

Solução:

Valor do empréstimo é o Capital inicial: C = 1.000.000 transformando em potência 10^6

Taxa de Juros Compostos: i = 9% ao ano ou 0,09 a.a

Tempo: t = 1989 – 1829 = 160 anos = 8.20

Aplicando na fórmula de Juros Compostos

$J = C(1 + i)^t$

$J = 10^6(1 + 0{,}09)^{8.20}$

$J = 10^6\,((1{,}09)^8)^{20}$

$J = 10^6\,(\,2^{10})^{\,2}$

$J = 10^6\,.\,10^{\,3}$

$J = 10^9 = 1.000.000.000$

Total da dívida em cem anos: Capital + Juros: 1.000.000 + 1.000.000.000 = 1.001.000.000

3- A análise de uma cultura de bactérias registrou que existem, inicialmente, 1000 bactérias presentes e, após t minutos, a quantidade de bactérias é $N(t) = 1000.2^{0,8t}$. verifique se, em 10 minutos, a quantidade de bactérias presentes na cultura será superior a 2.10^5 .

Solução:

$N(t) = 1000.2^{0,8.10}$

$N(t) = 1000.2^8$

$N(t) = 1000.256$

$N(t) = 256000$

Logo, 256000 é maior que $2.10^5 = 200000$

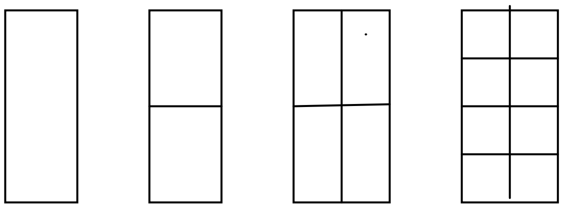
4-Sabendo que é necessário preservar as reservas naturais para evitar desperdício, um funcionário de uma gráfica começou a dobrar a cartolina antes de recortá-la para confeccionar cartões de Natal. Obteve, assim, com:

1 dobra = 2^1 = 2 folhas

2 dobras = 2^2= 4 folhas

3 dobras = 2^3 = 8 folhas

n dobras = 2^n = ... folhas



Ao dobrar a cartolina em partes iguais, percebeu que havia uma relação entre o número de dobras e o número de folhas obtidas. Caso ele queira obter 128 cartões, quantas dobras deverão ser feitas?

5- Utilizando o conhecimento que já desenvolveu, sobre potência, é possível calcular 5^{-3}; $2^{\frac{3}{2}}$; $8^{0,2}$;$3^{\sqrt{2}}$. Porém, nesta atividade faça uso da tecla Y^x e efetue as operações indicadas.

- **Tempo de Duração:**

  100minutos: 1ª. e 2ª. etapas. (Revisão e iniciação de conteúdo com vídeo aula)

  50 minutos: 1 aula (atividade do roteiro de ação e ampliação do conteúdo)

50 minutos: 1 aula (4ª etapa-lista de exercícios avaliativa.)

- **Objetivo:**

Apresentar o tema visando a sua aplicabilidade e entendimento dos conceitos iniciais de funções exponenciais.

- **Recursos Educacionais Utilizados:**

Xerox para os alunos do roteiro de ação e lista de exercícios avaliativa, piloto, quadro, livro didático, tablet educacional e data show para exibição do vídeo da canção das potências .

Organização da turma:

As tarefas deverão ser realizadas em dupla, exceto os exercícios de revisão que será individual.

AVALIAÇÃO:

A avaliação acontece de forma constante, desde a observação dos conhecimentos prévios, como nas sugestões oferecidas durante o processo de aprendizagem, verificando se são capazes de solucionar cálculos com potências, compreender um crescimento exponencial, reconhecer uma função, construir e interpretar gráficos e investigar de forma a encontrar a solução correta de problemas que envolvam equações exponenciais.

Uma lista de exercícios contendo situações problemas que recaiam em funções exponenciais fechará o processo para avaliar a compreensão do conteúdo abordado.

O trabalho em dupla como exercício desafio funciona como recuperação paralela a fim de sanar dúvidas existentes além de proporcionar espírito investigativo, raciocínio lógico, concentração e construção de seu conhecimento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- BARRETO, Benigno Filho; SILVA, Cláudio Xavier Da. Matemática aula por aula. 1 ed. São Paulo: FTD, 2003
- DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**, Volume único. São Paulo: Ática, 2005.
- ROTEIROS DE AÇÃO 2 –**Função Exponencial-** Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 1º ano do Ensino Médio – 4º. bimestre/2013

Endereços eletrônicos acessados de 16/10/2013 a 27/10/2013, citados ao longo do trabalho:

http://guiadoestudante.abril.com.br/estudar/matematica/resumo-matematica-funcao-exponencial-646791.shtml
http://www.brasilescola.com/matematica/funcao-exponencial-1.htm

https://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=NvHut_Rv4eU

Aline Nunes Costa
alineprof31@hotmail.com