FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA

FUNDAÇÃO CECIERJ / CONSÓRCIO CEDERJ

MATEMÁTICA 3.º ANO – ENSINO MÉDIO

3.º BIMESTRE/ 2014

PLANO DE TRABALHO 2

GEOMETRIA ANALÍTICA

TAREFA 2
CURSISTA: **Vera Lúcia Rocha de Carvalho Motta**
TUTORA: **Danúbia de Araújo Machado**
GRUPO 2

RIO DE JANEIRO, 06/09/2014

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Este plano de trabalho tem por objetivo que o aluno resolva problemas utilizando a distância entre dois pontos. Que seja capaz de identificar e determinar as equações geral e reduzida da reta. Foi elaborado visando à construção do conhecimento pelo aluno através de atividades que levem o aluno a pensar.

Inicialmente, trabalharemos com o cálculo das distâncias entre dois pontos que se encontram localizados em retas paralelas aos eixos coordenados. Posteriormente, a partir de dois pontos dados, construiremos triângulos retângulos, em que as hipotenusas são definidas pelas coordenadas dos pontos fornecidos. Finalmente, com a ajuda do Teorema de Pitágoras, calcularemos a medida de cada hipotenusa, de onde pretendemos induzir a criação de uma expressão algébrica que irá determinar, de forma geral, a distância entre dois pontos.

Falaremos sobre o coeficiente angular de uma reta e sobre a forma de calcular a equação de uma reta.

Tomamos como base o Currículo Mínimo do 3.º ano do Ensino Médio, a Matriz de Referência do Saerjinho, os Roteiros de Ação e alguns Livros Didáticos..

Este Plano de Trabalho foi elaborado de acordo com a realidade dos alunos do 3.º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Armando Gonçalves que se localiza no bairro do Salgueiro em São Gonçalo. Terá uma duração de 6 horas/aula (uma semana e meia).

DESENVOLVIMENTO

Atividade 1 – Como calcular a distância entre dois pontos

HABILIDADE RELACIONADA:

H 16 - Resolver problemas que envolvam a distância entre dois pontos no plano cartesiano.

PRÉ-REQUISITOS: Identificar um ponto no plano, através das suas coordenadas; Teorema de Pitágoras; módulo de um número real.

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Folha de atividades, quadro branco, piloto, régua, caneta e papel quadriculado.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Turma organizada em grupo de três alunos, propiciando trabalho organizado e colaborativo.

OBJETIVOS:

- Determinar a equação que permite calcular a distância entre dois pontos, conhecendo as suas coordenadas.
- Resolver problemas utilizando o cálculo da distância entre dois pontos.

METODOLOGIA ADOTADA:

Através da conversa informal e das atividades retiradas do Roteiro de Ação 1 com algumas adaptações, iremos trabalhar a distância entre dois pontos.

FOLHA DE ATIVIDADES 1:

1. Observando a Figura 1, identifique as coordenadas dos pontos indicados e complete as Tabelas 1, 2 e 3.

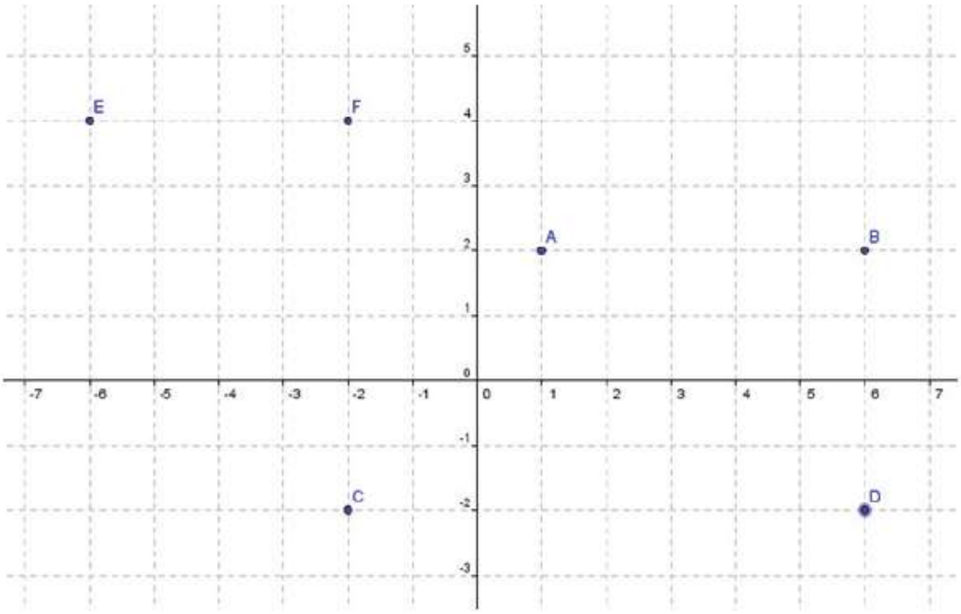


Figura 1

Ponto	Coordenada
A	(,)
B	(,)
Tabela 1	

Ponto	Coordenada
C	(,)
D	(,)
Tabela 2	

Ponto	Coordenada
E	(,)
F	(,)
Tabela 3	

2. Considerando como unidade de medida o tamanho do quadrado da malha; determine a distância entre os pares de pontos: A e B, C e D, E e F, C e F, D e B. Isto é, calcule o comprimento dos segmentos AB, CD, EF, CF e DB, mostrados nas Figuras 2 e 3. Complete as Tabelas 4 e 5 para organizar as informações.

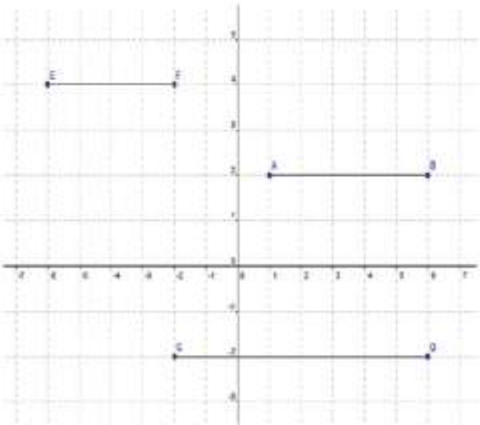


Figura 2

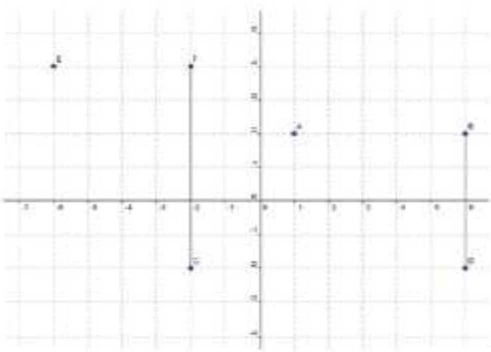


Figura 3

Segmento	Medida
AB	5
CD	
EF	
Tabela 4	

Segmento	Medida
DB	
CF	
Tabela 5	

3. Para encontrar as distâncias pedidas no item 2, você deve ter contado o número de quadrados existentes entre os pontos, pois a medida dos lados de cada quadrado da malha apresenta comprimento unitário. Esse procedimento pode ser confirmado algebricamente, fazendo apenas a diferença entre os valores das coordenadas que apresentam valores diferentes. Verifique esse fato e complete as Tabelas 7, 8, 9 e 10, seguindo o exemplo mostrado na Tabela 6, onde d(A, B) representa a distância entre os pontos A e B (o comprimento do segmento AB).

Ponto	Coord.
A	(1 , 2)
B	(6 , 2)
d(A, B) = 6 - 1 = 5	
Tabela 6	

Ponto	Coord.
C	(,)
D	(,)
D(C, D) =	
Tabela 7	

Ponto	Coord.
E	(,)
F	(,)
D(E, F) =	
Tabela 8	

Ponto	Coord.
C	(,)
F	(,)
D(C, F) =	
Tabela 9	

Ponto	Coord.
B	(,)
D	(,)
D(B, D) =	
Tabela 10	

Neste último exercício do item 3, para manter o sinal positivo no valor da distância, foi necessário manter uma ordem na subtração. Dessa forma, as coordenadas dos pontos que se encontram à direita devem ser subtraídas das coordenadas dos pontos que se encontram à esquerda, assim como, as coordenadas dos pontos que se encontram na parte superior devem ser subtraídas das coordenadas dos pontos que se encontram na parte inferior. Para simplificar esse procedimento, basta tomar apenas o módulo da diferença das coordenadas de valores diferentes. Veja o exemplo:

$$d(A, B) = |6 - 1| = |1 - 6| = 5.$$

4. Você seria capaz de escrever uma fórmula para distância entre pontos? Pense nos exemplos que vimos até agora, troque ideias com seus colegas e registre a seguir suas conclusões.

5. Na Tabela 11, você deve escrever uma equação que permita determinar a distância entre dois pontos que possuem a mesma abscissa. Na Tabela 12, por sua vez, você deve escrever uma equação que permita calcular a distância entre dois pontos que possuem a mesma ordenada. Lembre-se: o módulo é importante, pois estamos tratando de medida!

Ponto	Coordenada
M	(x_1, y_1)
N	(x_1, y_2)
$d(M, N) = \| \quad \|$	
Tabela 11	

Ponto	Coordenada
P	(x_1, y_1)
Q	(x_2, y_1)
$d(P, Q) = \| \quad \|$	
Tabela 12	

Neste momento, esperamos que os alunos cheguem a:

$$d(M, N) = |y_1 - y_2| \text{ e } d(P, Q) = |x_1 - x_2|$$

Nesta segunda atividade trabalharemos com a construção de triângulos retângulos cujas hipotenusas são definidas por dois pontos dados e cujos catetos são paralelos aos eixos coordenados.

É importante destacar que essa construção será sempre possível, desde que os pontos fornecidos não se encontrem na mesma linha horizontal ou na mesma linha vertical. Veja, como exemplo, as Figuras 4 e 5.

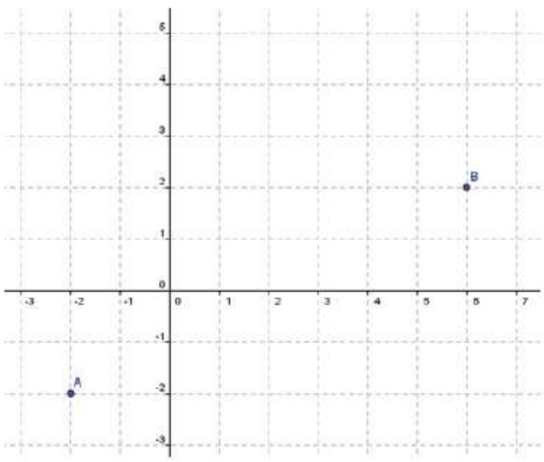


Figura 4

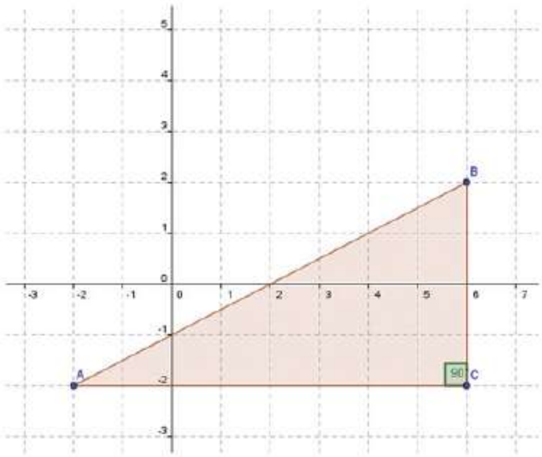


Figura 5

Como você deve ter observado, na Figura 5 foi necessário inserir um ponto auxiliar (ponto C). Esse ponto se encontra na linha horizontal que passa pelo ponto A e na linha vertical que passa pelo ponto B. Isso nos garante que temos um ângulo reto nesse vértice.

6. Utilizando um papel quadriculado com os eixos coordenados desenhados, identifique e marque os pontos A(3,-8), B(-5, -2), E(7, 10) e D(4,5).

7. Ligue os pontos A e B através de um segmento de reta. Faça o mesmo para os pontos D e E.

8. Feito isso, desenhe dois triângulos retângulos cujas hipotenusas são definidas pelos segmentos AB e DE, com catetos paralelos aos eixos coordenados. Em seguida, marque os pontos auxiliares C e F, os quais completam o terceiro vértice em cada um dos triângulos desenhados.

Nas Tabelas 13 e 14, indique as coordenadas dos pontos C e F, respectivamente.

Triângulo 1	
A	(-3 , 8)
B	(-5 , -2)
C	(,)

Tabela 13

Triângulo 2	
E	(7 , 10)
D	(4 , 5)
F	(,)

Tabela 14

Compare os seus resultados com os de seus colegas.

Veja a figura 6.

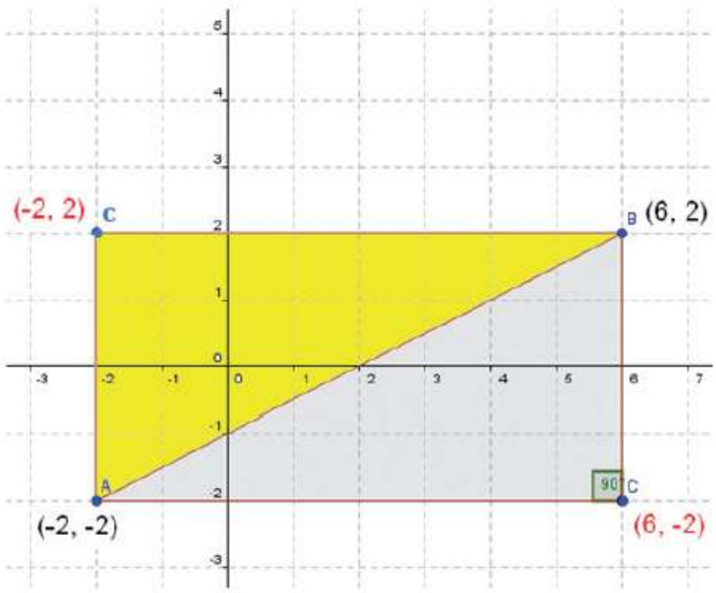
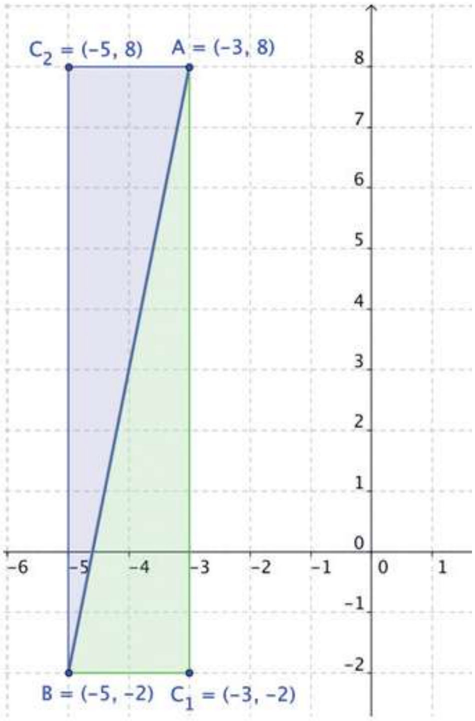


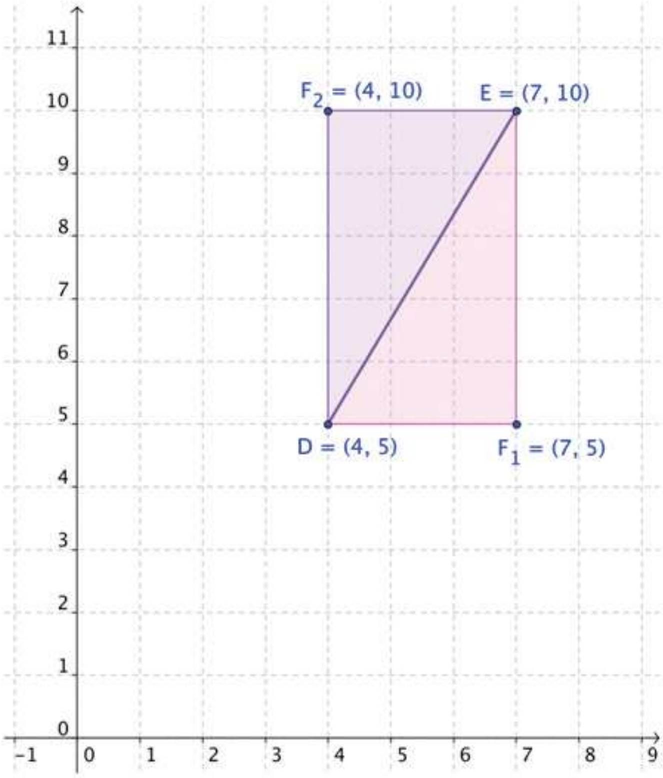
Figura 6

Com os dados fornecidos nos itens 1, 2 e 3, seus alunos devem chegar aos seguintes triângulos:

Triângulo 1



Triângulo 2



Como destacamos acima, para cada par de pontos, temos dois triângulos possíveis com as características citadas.

9. Observe os triângulos retângulos ABC e DEF desenhados no item anterior. Como você determinaria a distância entre os pontos A e B e entre os pontos D e E? Troque ideias com seus colegas e registre a seguir suas conclusões.

10. Determine a medida dos lados de cada um dos triângulos, utilize as Tabelas 15 e 16 para registrar os valores.

Triângulo 1	
Lado	**Medida**
AC	d(A,C) = | |
BC	d(B,C) = | |
AB	$d(A,B) = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2} =$

Tabela 15

Triângulo 2	
Lado	**Medida**
DF	d(D,F) = | |
FE	d(F,E) = | |
DE	$d(D,E) = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2} =$

Tabela 16

11. Observando a Figura 7 e lembrando o que fizemos até agora, você seria capaz de determinar as coordenadas do ponto C indicado na figura? Converse com seus colegas sobre as coordenadas encontradas e chegue, junto com eles, a um valor único.

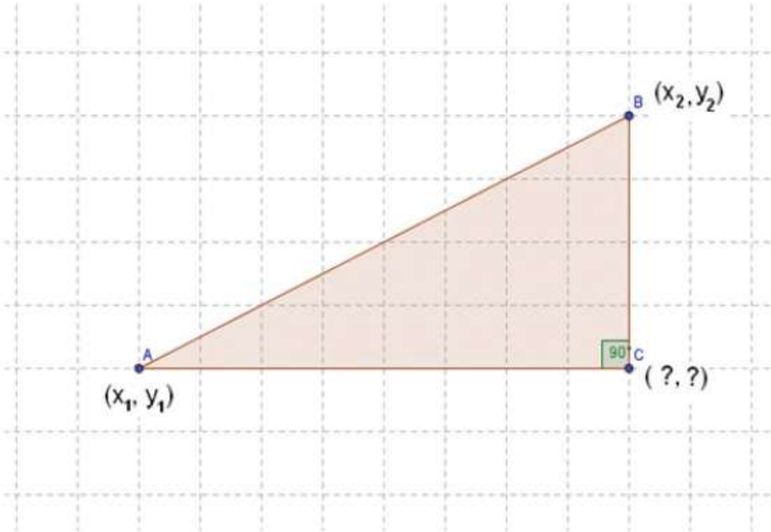


Figura 7

12. Considerando dois pontos A e B, mostrados na Figura 7, de coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2), respectivamente, e o ponto C encontrado no item anterior, determine a medida dos catetos AC e BC.

13. Usando o Teorema de Pitágoras, encontre a expressão que calcula a distância entre os pontos A e B. Complete as suas respostas nas Tabelas 17 e 18.

Triângulo ABC	
A	(x_1, y_1)
B	(x_2, y_2)
C	(,)

Tabela 17

Triângulo ABC	
Lado	**Medida**
AC	d(A,C) = | |
BC	d(B,C) = | |
AB	$d(A,B) = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2} =$

Tabela 18

Neste item 8, os alunos devem usar a propriedade

$$|x_1 - x_2|^2 = |x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 \text{ e } |y_1 - y_2|^2 = |y_2 - y_1|^2 = (y_2 - y_1)^2$$

para chegar à expressão:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

.

Essa é a equação que determina a distância entre dois pontos quaisquer $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$, no plano cartesiano.

Atividade 2 – Encontrando a equação de uma reta

HABILIDADE RELACIONADA:

H 15 – Identificar a equação de uma reta apresentada, a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.

PRÉ-REQUISITOS: Identificar um ponto no plano, através das suas coordenadas. Desenhar uma reta definida por dois pontos. Conhecer e identificar o ângulo de inclinação de uma reta. Conhecer a definição da razão trigonométrica tangente. Identificar e saber calcular esta razão em triângulos retângulos.

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Folha de atividade, régua, caneta, papel quadriculado, transferidor, régua de 30 cm e calculadora científica.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Turma organizada em grupo de três alunos, propiciando trabalho organizado e colaborativo.

OBJETIVOS:

- Relembrar os conceitos sobre o ângulo de inclinação definido por uma reta.
- Compreender o conceito de coeficiente angular de uma reta.
- Perceber que, para o cálculo do coeficiente angular e a equação de uma reta é necessário e suficiente, conhecer as coordenadas de dois pontos dessa reta.
- Identificar e determinar as equações geral e reduzida de uma reta.

METODOLOGIA ADOTADA:

Utilizaremos as atividades retiradas do Roteiro de Ação 2 com algumas adaptações.

FOLHA DE ATIVIDADES 2:

Calculando o Coeficiente Angular

1. Fazendo uso de um papel quadriculado, com os eixos coordenados desenhados na parte central e utilizando como unidade de medida o tamanho da malha retangular do papel (como é visto na figura 1), marque os pontos A(2,4) e B(11,10). Em seguida, usando uma régua e uma caneta, faça o desenho de uma reta definida por estes dois pontos.

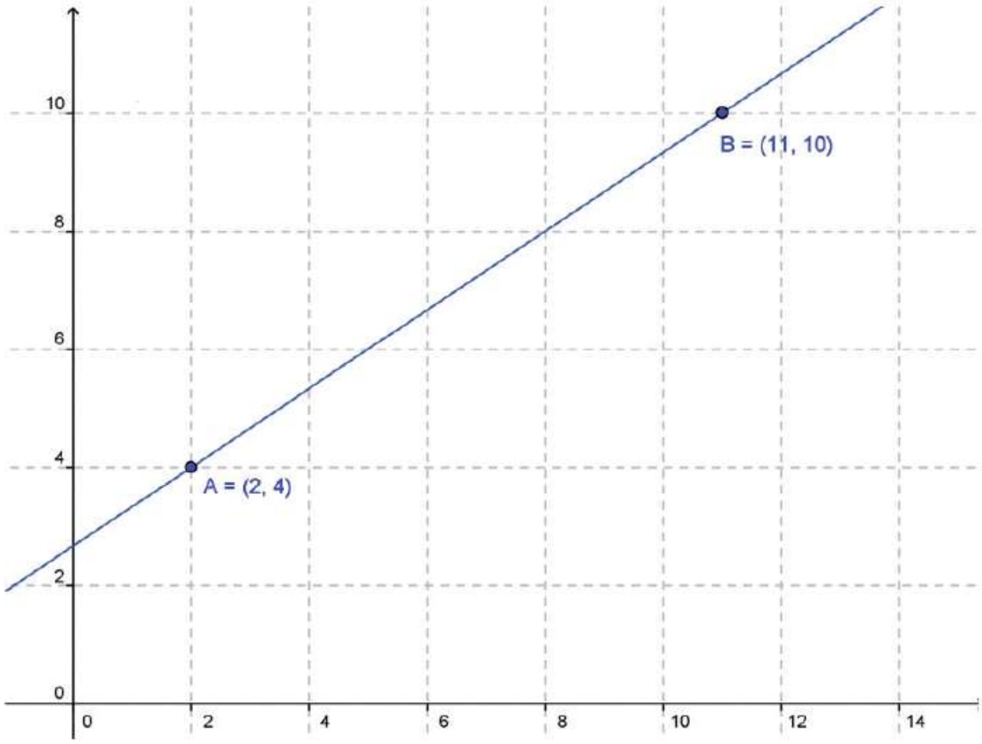


Figura 1
Fonte: Figura feita pelo autor.

Professor, neste momento é válido relembrar com o seu aluno a seguinte definição:

Dados $A(x_A, y_A)$ *e* $B(x_B, y_B)$, *denominamos o coeficiente angular da reta definida por estes dois pontos, a seguinte expressão:*

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{\text{Variação das ordenadas}}{\text{Variação das abscissas}}.$$

No cálculo do coeficiente angular, é importante ter cuidado com a ordem da posição dos valores na subtração, pois isto pode levá-lo a cometer um erro muito comum de sinal, observe:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\left(\frac{y_A - y_B}{x_B - x_A}\right).$$

Portanto,

$$\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \neq \frac{y_A - y_B}{x_B - x_A}$$

2. Calcule o coeficiente angular *m* da reta definida pelos pontos A(2,4) e B(11,10) e registre o resultado a seguir.

3. Utilizando o mesmo papel quadriculado do item 1, marque os pontos C(5,6), D(-4,0) e E(- 10,-4).

4. Os pontos C, D e E, do item 3, se encontram na reta desenhada?

5. Calcule o coeficiente angular das retas definidas pelos pares de pontos indicados no item 3 e complete a Tabela1, a seguir:

Pares de Pontos	Coeficiente Angular
Pontos C e D	$m_1 = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{[\quad]-[\quad]}{[\quad]-[\quad]} = [\quad]$
Pontos D e E	$m_2 = \frac{y_E - y_D}{x_E - x_D} = \frac{[\quad]-[\quad]}{[\quad]-[\quad]} = [\quad]$
Pontos C e E	$m_3 = \frac{y_E - y_C}{x_E - x_C} = \frac{[\quad]-[\quad]}{[\quad]-[\quad]} = [\quad]$

Tabela 1

6. Observando todos os resultados obtidos, responda as seguintes perguntas:

a) Uma reta pode ter mais de um coeficiente angular? Justifique sua resposta.

b) O valor do coeficiente angular de uma reta independe dos pontos encolhidos sobre ela? Justifique sua resposta.

7. Considerando as conclusões obtidas no item anterior, determine o valor de *b*, para que o ponto H(-1, b) se encontre na mesma reta definida pelos pontos A e B, dos itens anteriores.

8. Sugestão: Determine a expressão que calcula o coeficiente angular, usando os pontos A e H ou os pontos B e H. Em seguida, iguale esta expressão ao coeficiente angular esperado.

9. Verifique se o seu resultado encontrado algebricamente é, de fato, correto, localizando o ponto H no gráfico da reta.

Relacionando o Coeficiente angular com o ângulo de inclinação

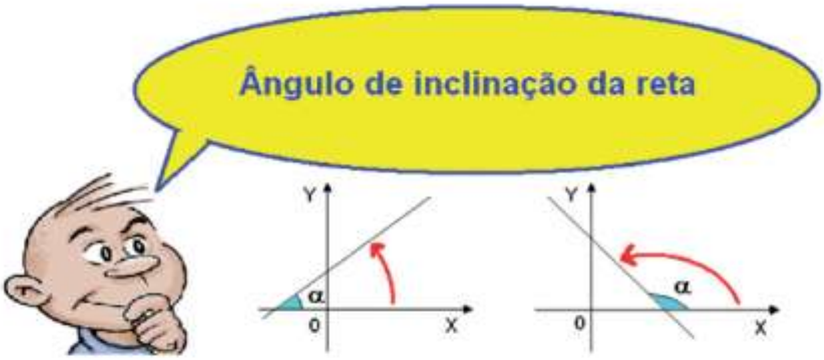


Figura 2
Fonte: Figura feita pelo autor.

10. Com ajuda de um transferidor, faça a medida do ângulo de inclinação da reta desenhada na atividade anterior. Anote o resultado.

11. Compare o valor da tangente do ângulo de inclinação com o coeficiente angular, usando no máximo duas casas decimais. Desconsiderando as pequenas diferenças em consequência das aproximações, existe alguma relação entre estes valores? Justifique sua resposta.

12. Usando o mesmo papel quadriculado dos itens anteriores, escolha e marque outros dois pontos quaisquer, os quais devem definir uma reta com ângulo de inclinação maior do que 90º (veja, como exemplo, a figura 3).

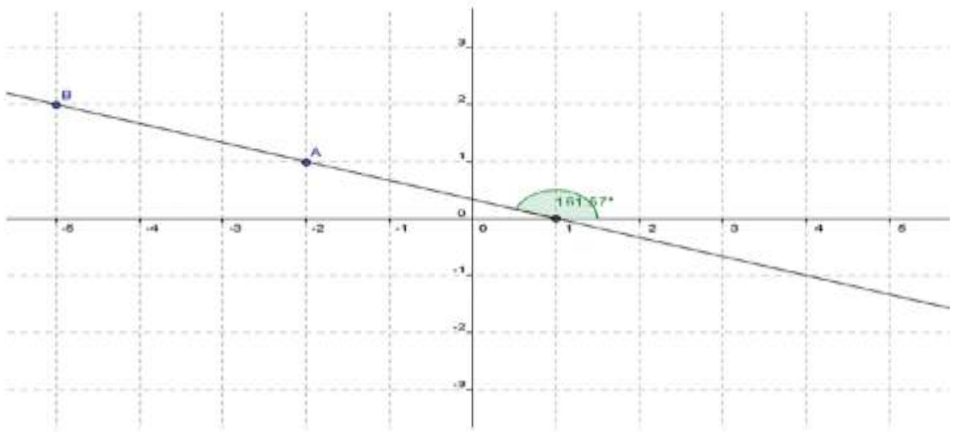


Figura 3
Fonte: Figura feita pelo autor.

13. A seguir, determine o ângulo de inclinação desta nova reta e calcule depois a sua tangente. Anote o ângulo e o valor de sua tangente a seguir.

14. Calcule o valor do coeficiente angular definido por estes dois pontos e compare-o com o valor obtido no item 4. Comente com seus colegas, confirme suas conclusões e registre-as a seguir.

Atividade 3 – Encontrando a equação de uma reta

HABILIDADE RELACIONADA:

H 15 – Identificar a equação de uma reta apresentada, a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.

PRÉ-REQUISITOS: Identificar um ponto no plano, através das suas coordenadas. Desenhar uma reta definida por dois pontos. Conhecer e identificar o ângulo de inclinação de uma reta. Conhecer a definição da razão trigonométrica tangente. Identificar e saber calcular esta razão em triângulos retângulos.

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Folha de atividade, régua, caneta, papel quadriculado, transferidor, régua de 30 cm e calculadora científica.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Turma organizada em grupo de três alunos, propiciando trabalho organizado e colaborativo.

OBJETIVOS:

- Relembrar os conceitos sobre o ângulo de inclinação definido por uma reta.
- Compreender o conceito de coeficiente angular de uma reta.
- Perceber que, para o cálculo do coeficiente angular e a equação de uma reta é necessário e suficiente, conhecer as coordenadas de dois pontos dessa reta.
- Identificar e determinar as equações geral e reduzida de uma reta.

METODOLOGIA ADOTADA:

Utilizaremos as atividades retiradas do Roteiro de Ação 2 com algumas adaptações e algumas atividades do livro didático.

FOLHA DE ATIVIDADES 3:

Descobrindo a equação da Reta

Considere a reta r, mostrada na figura 4.

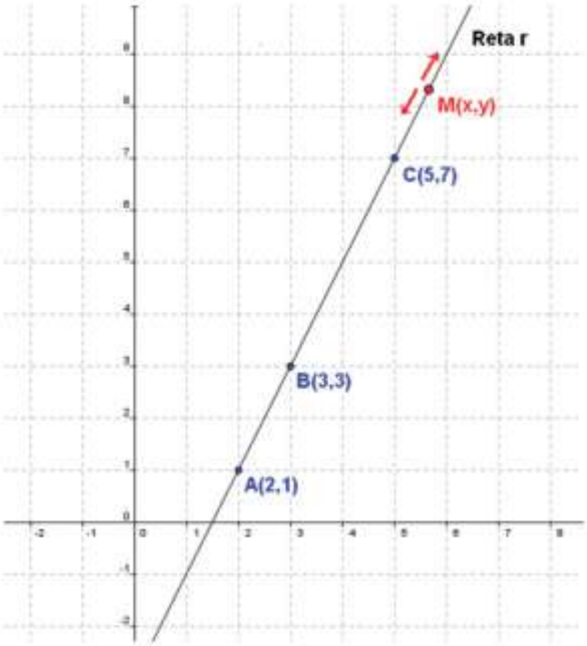


Figura 4
Fonte: Figura feita pelo autor.

1. Determine o coeficiente angular *m* da reta *r* e verifique a sua igualdade, completando a Tabela 2 com as expressões correspondentes.

Pares de Pontos	Coeficiente Angular
Pontos A e B	$m_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{3-2} = \frac{2}{1} = 2$
Pontos A e C	$m_2 = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{[\quad]-[\quad]}{[\quad]-[\quad]} = [\quad]$
Pontos B e C	$m_3 = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{[\quad]-[\quad]}{[\quad]-[\quad]} = [\quad]$

Tabela 2

2. Tomando os pontos A e M, determine a expressão que permite calcular o coeficiente angular da reta *r*. Observe que a sua equação deve apresentar as variáveis *x*, *y* e *m*.

3. O valor do coeficiente angular m, na equação do item 2, pode ser substituído pelo valor 2? Comente com seus colegas e justifique a sua resposta.

4. Após ter substituído a expressão *m* pelo valor 2, a equação encontrada é válida para qualquer ponto (x, y) na reta? E no ponto A, ela também é válida? Discuta com seus colegas e justifique a sua resposta.

5. Se fizermos agora, uma pequena manipulação algébrica, para eliminar o denominador, isto é,

$$\frac{y-1}{x-2} = 2 \text{ que implica em } (y-1)=2.(x-2)=2x-4.$$

De onde segue

$$y=2x-3.$$

Esta nova equação será válida para qualquer ponto (x,y) na reta? Comente com os seus colegas e justifique a sua resposta.

6. Verifique se os pontos A, B, e C pertencem à reta *r*, isto é, substitua as coordenadas dos pontos na equação $y=2x-3$.

Veja um exemplo:

Verificando se o ponto C(5,7) pertence à reta:

Considerando x=5 e substituindo na equação, temos y= 2(5)-3 = 7. Logo, o ponto C(5,7) pertence à reta, pois as suas coordenadas satisfazem a equação.

7. Para finalizar, proceda de forma análoga ao item 2, ou seja, utilize um ponto genérico que chamamos de M e o ponto B, determinando uma expressão que permite calcular o coeficiente angular da reta r. Com isto, obtenha novamente uma equação com variáveis *x*, *y* e *m*. Faça as manipulações algébricas necessárias para eliminar o denominador. Registre a equação encontrada a seguir.

8. Que relação existe entre as equações encontradas? Comente com seus colegas e registre suas conclusões.

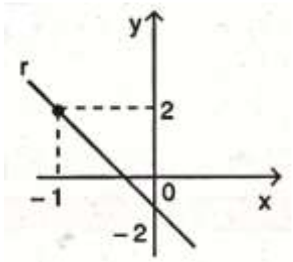
9. Para fechar a nossa atividade, vamos testar os conhecimentos adquiridos. Considere a reta *r* definida pelos pontos A(1,4) e B(2,1).

a) Encontre o coeficiente angular da reta *r*.

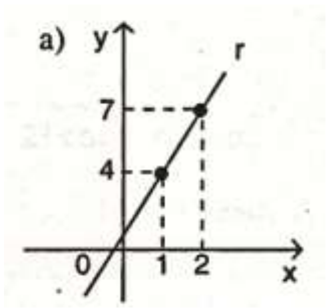
b) Determine a equação da reta *r*.

10. Determine a equação de uma reta r que passa pelo ponto A(-1,-2), e tem coeficiente angular 3.

11. Determine a equação geral da reta r:



12. Determine a equação reduzida da reta r.



AVALIAÇÃO

A avaliação será realizada através da observação e da participação do aluno nas atividades propostas em sala de aula e através dos exercícios de fixação (folha de atividades).

Ao término do Plano de Trabalho 2 será aplicado um teste, no decorrer do bimestre será aplicado o Saerjinho e ao final do bimestre será aplicada a prova.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática. Vol. Único. São Paulo: Ática, 2008.

IEZZI, Gelson et al. Matemática: Ciência e Aplicações. Vol. 3. São Paulo: Saraiva, 2010.

_________________. Matemática. Vol. Único. São Paulo: Atual, 2011.

LAPA, Cintia Bagatin et al. Matemática. Vol. 3. Curitiba: Positivo, 2010.

PAIVA, Manoel. Matemática. Vol. 3. São Paulo: Moderna, 2009.

ROTEIROS DE AÇÃO: Geometria Analítica – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 3.º ano do Ensino Médio – 3.º bimestre/2014. Disponível em: http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ acessado em 05/09/2014.