FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ
COLÉGIO: COLÉGIO ESTADUAL OLAVO BILAC
PROFESSOR(A): SOLANGE OLIVEIRA PIRES DOS SANTOS
SÉRIE: 3º ANO – ENSINO MÉDIO
TUTOR(A): EDESON DOS ANJOS SILVA

PLANO DE TRABALHO SOBRE PROBABILIDADE

[Solange Oliveira Pires dos Santos]
[solangematceob@gmail.com]

1. Introdução:

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN´s) desde 1997 introduziram conceitos de probabilidade e estatística nos programas da disciplina de Matemática no Ensino Fundamental e Médio. A partir deste fato, vários pesquisadores na área de Educação Matemática conduziram suas pesquisas para a Educação Estatística, procurando constituir uma base teórica/prática que forneça aos professores de Matemática subsídios importantes para a preparação de suas aulas de estatística.

Debates sobre as habilidades e competências que devem ser desenvolvidas nos alunos durante seus anos de escola são cada vez mais frequentes em um mundo que sofre transformações cotidianamente. Não há como não cogitar que os programas e currículos das disciplinas nas escolas devam ser analisados e reconsiderados de tempos em tempos com o objetivo de "adaptar" os conhecimentos necessários à realidade atual, ao contexto em que se vive atualmente. Este cenário não poderia ser diferente quando se fala em Matemática: Quais as habilidades matemáticas que devem ser desenvolvidas nos alunos? Quais os conteúdos de matemática que são indispensáveis na formação de um cidadão crítico, analítico e capaz de resolver seus problemas de forma racional?

O desenvolvimento que se verificou no mundo na segunda metade deste século contribuiu para um aumento da importância da Estatística devido às necessidades crescentes do Estado, das organizações sociais e profissionais, do cidadão comum por informação.

Todas estas questões fizeram com que o currículo da disciplina de Matemática nas escolas sofresse alterações e uma delas foi a inclusão da probabilidade e da estatística nos programas de matemática no Ensino Fundamental e Médio.

A Probabilidade na escola está associada à Estatística, historicamente esta associação nem sempre ocorreu. A Estatística é mais antiga, pois a coleta de dados sobre populações, colheitas, impostos já era usada pelos hebreus, egípcios e gregos. A Estatística surge como uma forma organizada realizar a contagem dos elementos em pauta, dispondo seus resultados em tabelas e gráficos para serem visualizados de forma mais clara e entendidos de forma mais fácil, bem como auxiliar na tomada de decisões através da análise quantitativa de dados e do estudo das relações entre variáveis. A probabilidade é uma ferramenta indispensável em estudos estatísticos que envolvam inferências para uma população através de uma amostra.

Os primeiros conceitos de probabilidade datam do século XVII, e os encontramos no interior da Matemática. Era uma tentativa dos matemáticos da época de medir a incerteza. Motivados pelos jogos de azar, que movimentavam uma elevada soma de dinheiro, o desenvolvimento do conceito de probabilidade muito se deve a esses jogos. O estudo desses jogos deu margem à criação de um campo específico denominado de Teoria dos Jogos.

Em resumo, a Teoria das Probabilidades se apresenta como um estudo teórico de fenômenos envolvendo a incerteza utilizando ferramentas básicas do Cálculo Matemático. Esses fenômenos, conhecidos como aleatórios, estocásticos ou não determinísticos, são aqueles que a sua repetição, em condições idênticas, produzem resultados diferenciados, isto é, não é possível determinar, com exatidão, qual o seu resultado. Esses fenômenos, na verdade, são predominantes em todas as áreas do conhecimento.

2. História:

Apresentação do software:

http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/1643/open/file/mat5_ativ1.htm

3. Estratégias adotadas no Plano de Trabalho:

A proposta dos PCN's insere o ensino da probabilidade e da estatística no bloco de conteúdos chamado de "tratamento das informações" que tem por objetivo desenvolver no aluno posicionamento crítico sobre as informações provenientes de estudos estatísticos, bem como a capacidade de fazer previsões e tomar decisões à luz de informações estatísticas. Em relação à probabilidade os PCN´s destacam que seu estudo promove a compreensão de acontecimentos do cotidiano que são de natureza aleatória, devendo a escola promover um ensino em que situações sejam desenvolvidas objetivando a realização de experiências e observações de experimentos.

O trabalho com probabilidade na escola deve iniciar com jogos e atividades construtivistas que despertem no aluno o interesse e a curiosidade de resolver os problemas propostos. Experiências com materiais como moedas, bolas, dados, urnas, etc., são uma forma eficaz de familiarizar o aluno com as questões sobre a aleatoriedade de um experimento, bem como trabalhar com os conceitos referentes a eventos possíveis, impossíveis, prováveis, muito prováveis, certos.

A introdução da Estatística e das probabilidades no currículo pode também ser justificada por constituir um meio de abordar, de uma forma natural, diferentes temas e aplicações da Matemática. Temos ainda que, a Estatística e as Probabilidades são adequadas ao currículo por que:

- proporcionam aplicações matemáticas com significados em todos os níveis;
- proporcionam métodos para lidar com a incerteza;
- ajudam a compreender argumentos estatísticos, bons ou maus, com os quais somos confrontados no dia a dia através dos resultados divulgados de pesquisas realizadas;
- ajudam a distinguir a utilização correta dos procedimentos estatísticos da utilização viciada e tendenciosa
- constituem temas intrinsecamente interessantes, excitantes e motivadores para a maioria dos alunos.

4. Atividades:

ATIVIDADE 1 - 1º dia de aula:

1ª Etapa: Introdução do conceito e da história da Introdução à Probabilidade.

2ª Etapa: Apresentação de vídeos – utilizando o computador com acesso a internet e o datashow.

3ª Etapa: Laboratório de informática – em duplas em cada computador, os alunos irão utilizar o software:

http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/1643/open/file/mat5_ativ1a.htm

4ªEtapa: Os alunos deverão pesquisar na WEB sobre o conteúdo: história, utilidades, aplicações e curiosidades. Os discentes deverão elaborar um trabalho com as informações obtidas através de sites.

ATIVIDADE 2 - Demais dias de aulas:

Objetivo geral:

Aprender a resolver problemas de probabilidade, desenvolvendo o raciocínio lógico e a capacidade de resolver problemas de um modo geral.

Habilidades e competências:

No final do curso, o aluno deverá ser capaz de:

- resolver aplicações matemáticas com significados em todos os níveis;
- utilizar métodos para lidar com a incerteza;
- compreender argumentos estatísticos, bons ou maus, com os quais somos confrontados no dia a dia através dos resultados divulgados de pesquisas realizadas;
- distinguir a utilização correta dos procedimentos estatísticos da utilização viciada e tendenciosa.

Metodologia:

Aulas expositivas com resoluções de problemas.

PROBABILIDADE

A história da teoria das probabilidades teve início com os jogos de cartas, dados e de roleta. Esse é o motivo da grande existência de exemplos de jogos de azar no estudo da probabilidade. A teoria da probabilidade permite que se calcule a chance de ocorrência de um número em um experimento aleatório.

Experimento Aleatório

É aquele experimento que quando repetido em iguais condições, podem fornecer resultados diferentes, ou seja, são resultados explicados ao acaso.

Abandonar um dado e anotar o número da face que ficará voltada para cima é chamado experimento aleatório; o seu resultado não pode ser determinado antes de realizá-lo. Neste experimento temos seis resultados possíveis, que são os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6, entretanto, é impossível prever qual destes números aparecerá quando o dado for lançado, e a repetição do experimento mostrará que, nas mesmas condições, podemos ter resultados diferentes.

Para estudar os experimentos aleatórios utilizaremos a ***Teoria das Probabilidades***. Na ignorância do resultado, procuremos descobrir as *"chances"* de ocorrência de cada um dos possíveis resultados do experimento. Representaremos estas *"chances"* em números e, a partir daí, teremos uma visão global do experimento, que nos permitirá tirar conclusões valiosas sobre o seu resultado, mesmo sem conhecê-lo.

Exemplo 1:

Num grupo de 15 lâmpadas, 3 são defeituosas. Consideremos o experimento "Uma lâmpada é escolhida ao acaso e observamos se é ou não defeituosa". Trata-se de um experimento aleatório com dois resultados possíveis:

d: a lâmpada escolhida é *defeituosa*;

b: a lâmpada escolhida é *boa*

Como há muito mais lâmpadas boas (12) que defeituosa (3), dizemos que *é mais provável* que a lâmpada escolhida seja boa. Mais objetivamente, podemos ainda dizer que a *probabilidade de a lâmpada escolhida ser boa é quatro vezes maior que a probabilidade de ser defeituosa*.

Espaço Amostral

É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. A letra que representa o espaço amostra é $\mathbf{\Omega}$.

Exemplos:

a) Se jogarmos um dado e observamos o número na face superior, temos o espaço amostral

   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

b) Se lançarmos uma moeda e observamos a face superior, temos $\Omega = \{k, c\}$ (onde: k = ocorrência de cara; c = ocorrência de coroa};

c) Numa partida de futebol, observamos o resultado obtido por uma das equipes; temos: $\Omega = \{v, d, e\}$ (onde: v = vitória da equipe observada; d = derrota; e = empate)

d) No caso do Exemplo 1, $\Omega = \{b, d\}$.

Eventos

Um conjunto qualquer de resultados de um experimento aleatório é chamado **evento**. Em outras palavras, um evento é um subconjunto qualquer do espaço amostral **Ω.**

Exemplo 2:

Experimento aleatório: lançamento de um dado e observação da face superior.

Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Alguns eventos:

evento A: ocorrência de número par: $A = \{2, 4, 6\}$

evento B: ocorrência de múltiplo de 3: $B = \{3, 6\}$

evento C: ocorrência de número menor que 7: $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$

evento D: ocorrência do número 5: $D = \{5\}$

evento E: ocorrência de número maior que 6: $E = \{\ \}$ ou $E = Ø$

Exemplo 3:

Experimento aleatório: lançamento de uma moeda duas vezes consecutivo e observação da face superior.

Espaço amostral: $\Omega = \{(k, k); (k, c); (c; c); (c, k)\}$

Alguns eventos:

evento A: ocorrência de cara no 1º. Lançamento: $A = \{(k, k); (k, c)\}$

evento B: ocorrência de pelo menos uma coroa: $B = \{(c, c); (k, c); (c, k)\}$

evento C: ocorrência de exatamente uma coroa: $C = \{(k, c); (c, k)\}$

Observações:

Observando o Exemplo 2 acima, é importante notar que consideramos eventos o *próprio espaço amostral*, Ω, chamado **evento certo**, e o subconjunto *vazio* de Ω, que chamaremos **evento impossível**. Consideramos também eventos com um *só elemento*; tais eventos são chamados **eventos elementares**.

Logo, podemos afirmar que: C é o **evento certo**; D é um **evento elementar** e E é o **evento impossível**.

1) Finalmente, destacamos que combinaremos eventos para formar novos eventos, como o evento **união** de A com B, o evento **interseção** de A com B ou o evento **complementar** de A.

Consideremos agora mais alguns eventos com relação ao Exemplo 2:

- ✓ evento F: ocorrência de um número par ou múltiplo de 3: F = {2, 4, 6, 3}

Notemos que F = A U B

- ✓ evento G: ocorrência de um número par que também seja múltiplo de 3: G = {6}

Notemos que $G = A \cap B$

- ✓ evento H: ocorrência de um número que não seja múltiplo de 3: H = {1, 2, 4, 5}

Notemos que $H = C_{\Omega} B = B^C$ complementar de B em relação a Ω.

- ✓ Notemos ainda que os eventos B e D são tais que $B \cap D = \emptyset$; eventos assim são chamados **mutuamente exclusivos.** Também são eventos mutuamente exclusivos dois eventos complementares, como por exemplo, H e B.

Exercícios:

1) Para o lançamento de uma moeda duas vezes consecutivo temos o seguinte espaço amostral:

Ω = {(k, k); (k, c) ; (c, k), (c, c)}. Determinar os seguintes eventos:

a) A = ocorrência de duas caras;
b) B = ocorrência de exatamente uma cara;
c) C = ocorrência de pelo menos uma cara;
d) D = ocorrência de duas coroas;
e) E = ocorrência de exatamente uma coroa;
f) F = ocorrência de pelo menos uma coroa.

Soluções:

a) A = {k, k)

b) B = {(k, c); (c, k)}

c) C = {(k, k); (k, c); (c, k)} = A U B

d) D = {c, c)}

e) E = {(k, c); (c, k)} = B

f) F = {(K, c); (c, c); (c, k)} = D U E

2) Com relação aos eventos do problema anterior, classificar em verdadeiro ou falso:

a) A U D = Ω

b) A U F = Ω

c) D^C = C (D^C → complementar de D em relação a Ω → Ω – D)

d) E ∩ B = Ø

e) C e D são mutuamente exclusivos

f) A e D são complementares

g) B e F são mutuamente exclusivos

h) A e F são complementares

Soluções:

a) F

b) V

c) {(k, k); (c, c); (c, k)} – {(c, c)} = {(k, k); (k, c); (c, k)} →V

d) F

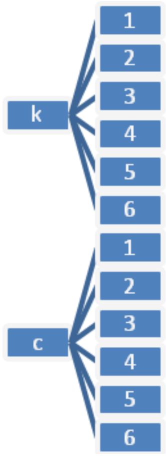
e) C ∩ D = Ø → V

f) A U D = Ω → F

g) B ∩ F = Ø → F

h) A U F = Ω → V

3) Lançando uma moeda e um dado, simultaneamente, sendo Ω o espaço amostral, constituído pelos 12 elementos: Ω = {k1, k2, k3, k4, k5, k6, c1, c2, c3, c4, c5, c6}



1. Escreva explicitamente os seguintes eventos: A = {caras e um número par aparece}, B = {um número primo aparece}, C = {coroas e um número ímpar aparecem}.
2. Idem, o evento em que:

   a) A ou B ocorrem;
   b) B e C ocorrem;
   c) Somente B ocorre.

3. Quais dos eventos A, B e C são mutuamente exclusivos.

Soluções:

1. Para obter A, escolhemos os elementos de Ω constituídos de um k e um número par:

   A = {k2, k4, k6}

   Para obter B, escolhemos os pontos de Ω constituídos de números primos:

   B = {k2, k3, k5, c2, c3, c5}

   Para obter C, escolhemos os pontos de Ω constituídos de um c e um número ímpar:

   C = {c1, c3, c5}

2. (a) A ou B = A U B = {k2, k4, k6, k3, k5, c2, c3, c5}

   (b) B e C = B ∩□C = {c3, c5}

   (c) Escolhemos os elementos de B que não estão em A ou C;

$B \cap A^c \cap C^c$ = {k2, k3, k5, c2, c3, c5} ∩ {k1,k3, k5, c1, c2, c3, c4, c5, c6} ∩ {k1, k2, k3, k4, k5, k6, c2, c4, c6} = {k3, k5, c2, c3, c5} ∩ {k1, k2, k3, k4, k5, k6, c2, c4, c6} = {k3, k5, c2}

ou B - (A U C) = {k2, k3, k5, c2, c3, c5} ∩ {k2, k4, k6, c1, c3, c5} = {k3, k5, c2}

3. A e C são mutuamente exclusivos, porque $A \cap C = \{\}$

Probabilidade em um espaço amostral finito

➢ Distribuição de probabilidades

Dado um experimento aleatório, na impossibilidade de prever seu resultado, desejamos fazer afirmações a respeito das *"chances"* de cada um dos possíveis resultados. Consideraremos apenas experimentos aleatórios em que o espaço amostral é finito, digamos, $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$.

Neste caso, queremos atribuir a cada evento elementar um número real que exprima sua *"chance"* de ser o resultado do experimento. Teremos, então, a associação:

- o evento $\{ a_1\}$ ocorre com *"chances"* p_1
- o evento $\{ a_2\}$ ocorre com *"chances"* p_2
- o evento $\{ a_3\}$ ocorre com *"chances"* p_3
- o evento $\{ a_4\}$ ocorre com *"chances"* p_4
- ....
- o evento $\{ a_n\}$ ocorre com *"chances"* p_n

Estes números p_1 ,p_2 ,p_3 , ... ,p_n , podem ser escolhidos de muitas formas. Um modo conveniente de escolhê-los é obrigá-los a satisfazer às seguintes condições:

- ✓ **cada p_i é maior ou igual a zero**
- ✓ **a soma $p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n$ deve ser igual a 1**

Escolhido deste modo, cada número p_i será chamado probabilidade de ocorrência do evento $\{a_i\}$, e escreveremos:

➢ **$P (\{a_i\}) = P (a_i) = p_i$**

Exemplo 1:

No lançamento de uma moeda e observação da face superior temos o espaço amostral $\Omega = \{k, c\}$. Com uma moeda equilibrada, devemos ter *"chances"* iguais para cara e coroa, ou seja, P(k) = P(c). Como P(k) + P(c) = 1, devemos ter P(k) = 0,5 e P(c) = 0,5, isto é:

- a probabilidade de ocorrer cara é 0,5;
- a probabilidade de ocorrer coroa é 0,5.

Exemplo 2:

Três cavalos c_1, c_2 e c_3 disputam um páreo, onde só se premiará o vencedor. Temos o espaço amostral $\Omega = \{ c_1, c_2, c_3\}$. Um conhecedor dos 3 cavalos afirma que as *"chances"* de c_1 vencer são o dobro das de c_2, e que c_2 tem o triplo das "*chances*" de c_3.

Neste caso, devemos ter: $P(c_1) = 2\,P(c_2)$ e $P(c_2) = 3\,P(c_3)$

Chamando $P(c_3)$ de p, temos: $P(c_3) = p$, $P(c_2) = 3p$ e $P(c_1) = 6p$

Como $P(c_1) + P(c_2) + P(c_3) = 1$, resulta: $6p + 3p + p = 1$, isto é: $p = 1/10$.

Assim, a probabilidade de c_1 vencer é 6/10, a probabilidade de c_2 vencer é 3/10 e a probabilidade de c_3 vencer é 1/10.

Exercício:

Os jogadores A, B, C e D disputam um torneio onde A e B têm *"chances"* iguais, C e D também têm *"chances"* iguais, mas A tem o dobro das *"chances"* de C. Qual a probabilidade de B vencer? Qual a probabilidade de D vencer?

Solução:

$P(A) = P(B)$

$P(C) = P(D)$

$P(A) = 2P(C)$

Logo:

$P(C) = p \rightarrow P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1 \rightarrow 2p + 2p + p + p = 1 \rightarrow 6p = 1 \rightarrow p = 1/6$

$P(B) = 2p \rightarrow P(B) = 2 \,.\, 1/6 = 1/3$

$P(D) = P(C) = p \rightarrow P(D) = 1/6$

➢ **Cálculo de probabilidades**

Introdução

Já vimos que, num espaço amostral finito $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$,são atribuídas probabilidades p_1 ,p_2 ,p_3, ... ,p_n aos eventos elementares de modo que $\mathbf{P(a_i) = p_i}$, $i = 1, 2, 3, ..., n$. Queremos agora atribuir probabilidades de ocorrência a um evento qualquer do espaço amostral Ω.

Exemplo 3:

Seja $\Omega = \{c_1 ,c_2 ,c_3\}$ o espaço amostral do **Exemplo 2**. Consideremos o evento A: o vencedor é o cavalo c_1 ou o cavalo c_3. E o evento A ocorre quando ocorrer o evento elementar $\{c_1\}$ (o cavalo c_1 vence) ou quando ocorrer $\{c_3\}$ (o cavalo c_3 vence). Temos: $A = \{c_1\} \cup \{c_3\} = \{c_1, c_3\}$. As "chances" de A ocorrer são as chances de $\{c_1\}$ mais as de $\{c_3\}$. Dizemos que a probabilidade de A ocorrer é a soma das probabilidades atribuídas a $\{c_1\}$ e a $\{c_3\}$, ou seja:

$$P(A) = P(\{c_1, c_3\}) = P(\{c_1\}) + P(\{c_3\}) = P(c_1) + P(c_3) = 6/10 + 1/10 = 7/10$$

Probabilidade de um evento

De modo geral, se A é um evento com k elementos, $A = \{a_1 ,a_2 ,a_3 , ... , a_k\}$, atribuiremos a A a probabilidade de ocorrência P(A) tal que $\mathbf{P(A) = P(a_1) + P(a_2) + P(a_3) + ... + P(a_k)}$,

ou seja:

$$\mathbf{A = \{a_1 ,a_2 ,a_3 , ... , a_k\} \rightarrow P(A) = p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_k}$$

Propriedades Importantes:

1. Se A e A' são eventos complementares, então: $P(A) + P(A') = 1$

2. A probabilidade de um evento é sempre um número entre 0 e 1, onde: 0 - probabilidade de evento impossível e 1 - probabilidade do evento certo: $0 \leq P(A) \leq 1$, $\forall$ A, $A \subset \Omega$

3. O evento certo, Ω, tem probabilidade1, pois $\mathbf{P(\Omega) = p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n = 1}$

4. Ao evento impossível em Ω, ou seja, $\varnothing$, atribuiremos probabilidade zero.

Espaços equiprováveis

Ao estudarmos um experimento aleatório com um número finito de resultados, ou seja, com um espaço amostral finito, frequentemente somos levados pelas características do experimento, a atribuir iguais probabilidades de ocorrência a todos os eventos elementares. Um espaço amostral finito onde cada evento elementar tem a mesma probabilidade é um **espaço equiprovável**.

Exemplo 1: (é equiprovável)

No lançamento de uma moeda e observação da face superior temos o espaço amostral $\Omega = \{k, c\}$. Com uma moeda equilibrada, devemos ter *"chances"* iguais para cara e coroa, ou seja, $P(k) = P(c)$. Como $P(k) + P(c) = 1$, devemos ter $P(k) = 0,5$ e $P(c) = 0,5$, isto é:

- ✓ A probabilidade de ocorrer cara é 0,5
- ✓ A probabilidade de ocorrer coroa é 0,5

Exemplo 2: (é equiprovável)

No lançamento de um dado e observação da face superior temos $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Com um dado equilibrado devemos ter *"chances"* iguais para os seis resultados, então, as probabilidades atribuídas aos eventos elementares devem ser tais que:

- ✓ $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6)$
- ✓ $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$

Logo, $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = 1/6$

Exemplo 3: (não é equiprovável)

Três cavalos c_1 ,c_2 e c_3 disputam um páreo, onde só se premiará o vencedor. Temos o espaço amostral $\Omega = \{c_1, c_2, c_3\}$. Um conhecedor dos 3 cavalos afirma que as *"chances"* de c_1 vencer são o dobro das de c_2, e que c_2 tem o triplo das "*chances*" de c_3.

Neste caso, devemos ter: $P(c_1) = 2\ P(c_2)$ e $P(c_2) = 3\ P(c_3)$

Chamando $P(c_3)$ de p, temos: $P(c_3) = p$, $P(c_2) = 3p$ e $P(c_1) = 6p$

Como $P(c_1) + P(c_2) + P(c_3) = 1$, resulta: $6p + 3p + p = 1$, isto é: $p = 1/10$.

Assim, a probabilidade de c_1 vencer é 6/10, a probabilidade de c_2 vencer é 3/10 e a probabilidade de c_3 vencer é 1/10.

Exercício:

Uma urna contém 50 bolas idênticas. Se as bolas forem numeradas de 1 a 50, qual a probabilidade de, em uma extração ao acaso,

a) obtermos a bola de número 27?
b) obtermos uma bola de número par?
c) obtermos uma bola de número maior que 20?
d) obtermos uma bola de número menor ou igual a 20?

Soluções:

a) Seja $\Omega = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{50}\}$ o espaço amostral do experimento descrito, onde: b_1 = a bola extraída é a de número 1, b_2 = a bola extraída é a de número 2, b_3 = a bola extraída é a de número 3, ... , b_{50} = a bola extraída é a de número 50.

   Sendo as 50 bolas idênticas e a extração feita ao acaso, associaremos a cada bola uma mesma probabilidade ***p*** de ocorrência.

   Devemos ter, então: $P(b_1) = P(b_2) = P(b_3) = \ldots = P(b_{50}) = \boldsymbol{p}$

   mas: $P(b_1) + P(b_2) + P(b_3) + \ldots + P(b_{50}) = 1$

   logo: $50p = 1$ e $p = 1/50$

   Assim a probabilidade de uma bola qualquer, por exemplo a de número 27, ser escolhida é 1/50.

b) Seja **A** o evento *"ocorrência de número par":* **A** = {2, 4, 6, ... , 50}.

   Cada elemento de **A** tem probabilidade **p = 1/50**, logo:

   $P(A) = 1/50 + 1/50 + 1/50 + \ldots + 1/50 = 25 \,.\, 25/50 = 1/2$

   25 parcelas

c) Seja **B** o evento *"ocorrência de número maior que 20":* **B** = {21, 22, 23, ... , 50}.

   $P(B) = 1/50 + 1/50 + 1/50 + \ldots + 1/50 = 30 \,.\, 30/50 = 3/5$

   30 parcelas

d) Seja **D** o evento *"ocorrência de número menor ou igual a 20":* **B** = {1, 2, 3, ... , 20}.

   $P(B) = 1/50 + 1/50 + 1/50 + \ldots + 1/50 = 20 \,.\, 20/50 = 2/5$

   20 parcelas

Observação:

- notemos que $D = B^C$; logo $P(D) = P(B^C) = 1 - P(B) = 1 - 3/5 = 2/5$ **(Probabilidade do evento complementar)**
- o cálculo de probabilidade em um espaço finito equiprovável é, em geral, efetuado da seguinte forma: $\mathbf{p = 1/n}$, ou seja, cada evento elementar tem uma probabilidade de ocorrência igual a **1/n**, onde n é o número de elementos de Ω. Vejamos abaixo **Conceito de probabilidade.**

Conceito de probabilidade

Se em um fenômeno aleatório as possibilidades são **igualmente** prováveis, então a probabilidade de ocorrer um evento A é:

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Exemplo 1:

Lançando-se um dado, a probabilidade de sair um número par na face voltada para cima é obtida de seguinte forma:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow n(\Omega) = 6$,

$A = \{2, 4, 6\} \rightarrow n(A) = 3$ (pode ocorrer de 3 maneiras diferentes dentre 6 igualmente prováveis)

logo, $$P(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = 3/6 = 1/2 = 50\%$$

Dizemos que um espaço amostral Ω (finito) é equiprovável quando seus eventos elementares têm probabilidades iguais de ocorrência.

Exemplo 2:

Seis casais (marido e mulher) estão em uma sala, reunidos, conversando. Escolhendo duas pessoas ao acaso, qual a probabilidade de termos:

a) um homem e uma mulher?
b) um marido e sua esposa?

Soluções:

a) O número total de modos de duas pessoas serem escolhidas em um grupo de 12 é $C_{12,2}$.

$$C_{12,2} = \frac{12!}{2!\,(12-2)!} = \frac{12 \,.\, 11 \,.\, 10}{2 \,.1 \,.\, 10!} = 66$$

Podemos escolher um homem de $C_{6,1}$ (6 modos) e uma mulher de $C_{6,1}$ (6 modos); logo, um homem e uma mulher podem ser escolhidos de 6 . 6 = 36 modos. Estamos supondo que todos os pares de pessoas formados tem a mesma probabilidade; então, a probabilidade pedida é igual a:

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = 36/66 = 6/11$$

b) Como só existem 6 casais marido-esposa, a probabilidade pedida é igual a 6/66, ou seja, 1/11.

Probabilidade da união de dois eventos

Sejam, agora, **A** e **B** dois eventos quaisquer do espaço amostral Ω. Que probabilidade devemos atribuir ao evento **A U B**?

Sabemos que **A U B** é o evento que tem para elementos todos os elementos de **A** ou de **B**. Podemos, então, pensar em atribuir a **A U B** uma probabilidade igual à soma: probabilidade de ocorrência dos elementos de **A** mais probabilidades de ocorrência dos elementos de **B**, ou seja, **P(A) + P(B)**. De fato, é isto o que fazemos quando **A** e **B** não têm elementos comuns, ou seja, são mutuamente exclusivos (**A ∩ B = Ø**). Temos, então:

$$A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Quando, porém, **A** e **B** têm elementos comuns, se associássemos a **A U B** a probabilidade **P(A) + P(B)** estaríamos atribuindo a **A U B** uma probabilidade maior que a *"verdadeira"*, uma vez que as probabilidades dos elementos comuns a **A** e **B** (elementos de **A ∩ B**) teriam sido computadas duas vezes. Assim, para que isso não ocorra devemos ter:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exemplo 1:

Se dois dados, azul e branco, forem lançados, qual a probabilidade de sair 5 no azul e 3 no branco?

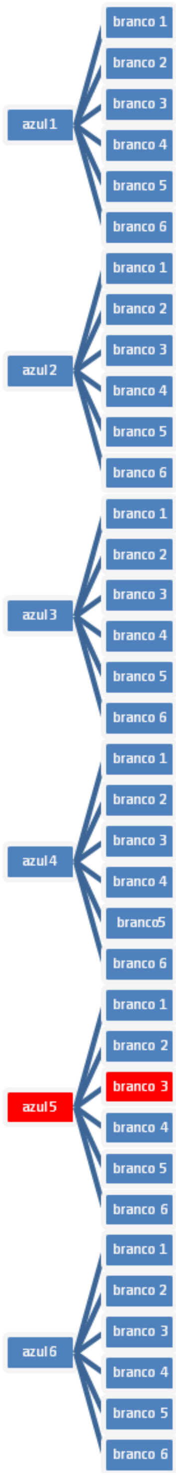
Solução:

Considerando os eventos:

A: Tirar 5 no dado azul → P(A) = 1/6

B: Tirar 3 no dado branco → P(B) = 1/6

Sendo Ω o espaço amostral de todos os possíveis resultados, temos: n(Ω) = 6 . 6 = 36 possibilidades, ou seja,



Daí, temos: **P(A U B) = P(A) + P(B) – P(A ∩ B) =** 1/6 + 1/6 – 1/36 = 11/36

Exemplo 2:

Se retirarmos aleatoriamente uma carta de baralho com 52 cartas, qual a probabilidade de ser um 8 ou um rei?

Solução:

Sendo Ω o espaço amostral de todos os resultados possíveis, temos: n(Ω) = 52 cartas. Considere os eventos:

A: sair 8 → P(A) = 4/52 (8 copas, 8 ouro, 8 paus, 8 espadas)

B: sair um rei → P(B) = 4/52 (rei copas, rei ouro, rei paus, rei espadas)

Assim: **P(A U B) = P(A) + P(B) – P(A ∩ B) =** 4/52 + 4/52 – 0 = 8/52 = 2/13. Note que P(A ∩ B) = Ø, pois uma carta não pode ser 8 e rei ao mesmo tempo. Quando isso ocorre dizemos que os eventos **A** e **B** são **mutuamente exclusivos**.

Exemplo 3:

De uma urna com 20 bolinhas numeradas de 1 a 20, retira-se ao acaso uma bolinha. Calcular a probabilidade de essa bolinha ter um número divisível pó 2 ou por 3.

Solução:

Ω = {1, 2, 3, ... , 20}

A: conjunto dos números divisíveis por 2 → A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}

P(A) = 10/20

B: conjunto dos números divisíveis por 3 → B = {3, 6, 9, 12, 15, 18}

P(B) = 6/20

A ∩ B: conjunto dos números divisíveis por 2 e por 3 → A ∩ B = {6, 12, 18}

P(A ∩ B) = 3/20

P(A U B) = P(A) + P(B) – P(A ∩ B) = 10/20 + 6/20 – 3/20 = 13/20

LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Numa urna existem bolas de plástico, todas de mesmo tamanho e peso, numeradas de 2 a 21 sem repetição. A probabilidade de se sortear um número primo ao pegarmos uma única bola, aleatoriamente, é de:

a) 45% **b)** 40% c) 35% d) 30% e) 25%

Solução. Há um total de (21 – 2 + 1) = 20 bolas. Este é o espaço amostral. Dentre esses números, são primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 e 19. Logo a probabilidade pedida é: $\boxed{P(\text{primo}) = \frac{8}{20} \to 40\%}$.

2) Dois dados não viciados são lançados. A probabilidade de obter-se soma maior ou igual a 5 é:

a) 5/6 b) 13/18 c) 2/3 d) 5/12 e) 1/2

Solução. O espaço amostral do lançamento de dois dados é Ω = {(1,1);(1,2); ...; (6,6)} totalizando (6 x 6) = 36 elementos. Os pares com soma menores que 5 são: (1,1); (1,2); (2,1); (2,2); (3,1) e (3,1). Logo há 36 – 6 = 30 casos com soma maior ou igual a 5. Temos: $\boxed{P(S \geq 5) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}}$.

OBS. Repare que esse o evento {ser maior ou igual a 5} é complementar do evento {ser menor que 5}. A contagem inicial é mais rápida e aplica-se: $\boxed{P(S \geq 5) = 1 - P(S < 5) = 1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{6}}$.

3) Uma urna contém 20 boas numeradas de 1 a 20. Seja o experimento: retirada de uma bola. Considere os eventos: A = {a bola retirada ser múltiplo de 2} ; B= { a bola retirada ser múltiplo de 5}. Então a probabilidade de se ocorrer o evento A ou B é:

a) 13/20 b) 4/5 c) 7/10 **d)** 3/5 e) 11/20

Solução. O espaço amostral possui 20 elementos. De acordo com o enunciado temos:

$$\boxed{\begin{cases} n(A) = n(M_2) = \frac{20-2}{2} + 1 = 10 \\ n(B) = n(M_5) = \frac{20-5}{5} + 1 = 4 \\ n(A \cap B) = n(M_2 \cap M_5) = n(M_{10}) = \frac{20-10}{10} + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{10}{20} + \frac{4}{20} - \frac{2}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}}.$$

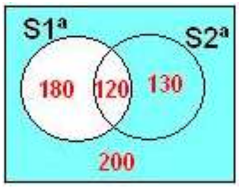
4) A probabilidade de você ganhar uma bicicleta numa rifa de 100 números na qual você comprou quatro números é:

a) 2/5 b) 1/10 **c)** 1/25 d) 1/30 e) 1/50

Solução. Para ganhar basta que 1 dos 4 números seja sorteado: $\boxed{P(\text{ganhar}) = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}}$.

5) Em uma pesquisa realizada em uma faculdade foram feitas duas perguntas aos alunos. 120 responderam sim a ambas; 300 responderam sim à primeira; 250 responderam sim à segunda e 200 responderam não a ambas. Se um aluno for escolhido ao acaso, qual é a probabilidade de ele ter respondido “não” à primeira pergunta?

a) 1/7 b) 1/2 c) 3/8 **d)** 11/21 e) 4/25



Solução. A parte pintada no diagrama indica que 330 responderam “não” à primeira pergunta, pois é a soma do número de alunos que respondeu “sim” somente à 2ª e o número de alunos que respondeu “não” a ambas (logo, não á 1ª). Responderam à pesquisa 630 alunos: $P(S1^a) = P(N1^a) = \frac{330}{630} = \frac{11}{21}$.

6) Em uma bandeja há 10 pastéis dos quais 3 são de carne, 3 de queijo e 4 de camarão. Se Fabiana retirar, aleatoriamente e sem reposição, dois pastéis desta bandeja, a probabilidade de os dois pastéis serem de camarão é:

a) 3/25 b) 4/25 **c)** 2/15 d) 2/5 e) 4/5

Solução 1. Retirando sucessivamente cada um dos pastéis de um total de 10 pastéis, temos:

$$P(\text{Camarão} \cap \text{camarão}) = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{15}.$$

Solução 2. Retirando 2 pastéis dentre 10 pastéis, há $C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10.9.8!}{2!8!} = (5).(9) = 45$ **modos.**

Retirando 2 pastéis de camarão dentre 4 pastéis de camarão, há $C_{4}^{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4.3.2!}{4} = 6$ **modos.**

Logo, $P(\text{Camarão} \cap \text{camarão}) = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$.

7) Um soldado tenta desativar um certo artefato explosivo que possui 5 fios expostos. Para desativá-lo, o soldado precisa cortar 2 fios específicos, um de cada vez, em uma determinada ordem. Se cortar o fio errado ou na ordem errada, o artefato explodirá. Se o soldado escolher aleatoriamente 2 fios para cortar, numa determinada ordem, a probabilidade do artefato não explodir ao cortá-los é igual a :

a) 2/25 **b)** 1/20 c) 2/5 d) 1/10 e) 9/20

Solução 1. Nomeando os fios como f1, f2, f3, f4 e f5 e considerando que para que não haja explosão os fios cortados devem ser f1 e f2 <u>nesta ordem</u>, temos que o soldado precisa escolher essa como única opção. Logo $P(\text{explodir}) = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{20}$.

Solução 2. Há 5! = 120 formas de os fios serem ordenados para começar o corte. Em algumas dessas ordenações temos [f1f2]_ _ _ (f1f2 fixos e permutando os três restantes) que evitam a explosão. Um total de 3! = 6. Logo, $P(\text{explodir}) = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$.

8) Um lote com 20 peças contém 2 defeituosas. Sorteando-se 3 peças deste lote, sem reposição, a probabilidade de que todas sejam não defeituosas é:

a) 68/95 b) 70/95 c) 72/95 d) 74/95 e) 76/95

Solução 1. Há 18 peças perfeitas e 2 defeituosas: $P(3\ \text{perfeitas}) = \frac{18}{20}\cdot\frac{17}{19}\cdot\frac{16}{18} = \frac{1}{5}\cdot\frac{17}{19}\cdot\frac{4}{1} = \frac{68}{95}$.

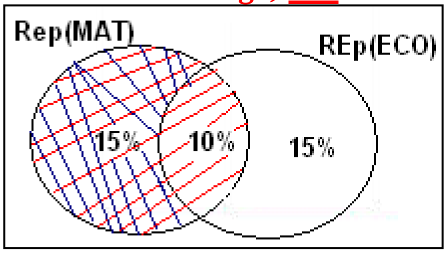
Solução 2. $\begin{cases} n(\Omega) = C_{20}^{3} = \frac{20!}{3!17!} = \frac{20.19.18.17!}{3!17!} = (20).(19).(3) \\ n(3\ perfeitas) = C_{18}^{3} = \frac{18!}{3!15!} = \frac{18.17.16.15!}{3!15!} = (17).(16).(30) \end{cases} \Rightarrow P(3\ perfeitas) = \frac{(17).(16).(3)}{(20).(19).(3)} = \frac{68}{95}$.

9) Em certo ano de faculdade, 25% dos alunos são reprovados em matemática, 15% são reprovados em economia e 10% são reprovadas em ambas. Um estudante é selecionado ao acaso nessa faculdade. A probabilidade de que ele não seja reprovado em economia, sabendo que ele foi reprovado em matemática, é:

a) 0,1 b) 0,15 c) 0,25 d) 0,5 **e)** 0,6

Solução. Repare pelo diagrama que o espaço amostral foi reduzido para 25% (já reprovado em Matemática). Desses há 15% que só estão reprovados em Matemática. Logo, não estão reprovados em Economia.

Temos: $P(\overline{Re\ pEco} / Re\ pMat) = \frac{15\%}{25\%} = 0,6$.



10) Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 4 pretas. Dela são retiradas 2 bolas, uma após a outra, sem reposição. Se a primeira bola retirada é de cor preta, qual a probabilidade de a segunda bola ser vermelha?

a) 4/9 b) 5/3 c) 4/5 d) 5/8 e) 1/2

Solução. Se a primeira bola for da cor preta, então sobraram 8 bolas na urna, sendo ainda 5 vermelhas. Logo, $P(vermelha) = \frac{5}{8}$.

11) Uma turma tem 25 alunos dos quais 40% são mulheres. Escolhendo-se ao acaso, um dentre todos os grupos de 2 alunos que se pode formar com os alunos dessa turma, a probabilidade de que seja composto por uma menina e um menino é:

a) 1/6 b) 1/5 c) 1/4 d) 1/3 **e)** 1/2

Solução 1. O número de mulheres é (0,4 x 25) = 10 e o de homens, (25 – 10) =15. Temos:

Escolhendo cada aluno para dupla: $P(1He1M) = P(HM) + P(MH) = \frac{15}{25}.\frac{10}{24} + \frac{10}{25}.\frac{15}{24} = 2.\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

Solução 2. $\begin{cases} n(\Omega) = C_{25}^{2} = \frac{25!}{2!23!} = \frac{25.24.23!}{2!23!} = (25).(12) = 300 \\ n(1H1M) = C_{15}^{1}.C_{10}^{1} = (15).(10) = 150 \end{cases} \Rightarrow P(1H1M) = \frac{150}{300} = \frac{1}{2}$.

12) O grupo de pretendentes aos cargos de presidente e vice-presidente de um clube é constituído por 6 advogados e 2 engenheiros, todos eles com chances iguais de serem escolhidos para uma dessas funções. Nessas condições, a probabilidade de que certo eleitor escolherá um advogado para presidente e um engenheiro para vice-presidente é:

a) 1/8 b) 2/9 **c)** 3/14 d) 5/16 e) 6/16

Solução. Como os cargos estão definidos e não será considerada a possibilidade de um advogado ser vice-presidente, nem um engenheiro ser presidente.

Presidente	Vice-presidente
$\frac{6}{8}$	$\frac{2}{7}$

Temos: $\boxed{P(AdP\ e\ EnVice) = \frac{6}{8}.\frac{2}{7} = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}}$.

13) Entre todas as combinações de 10 elementos distintos, tomados 3 a 3, uma combinação é escolhida ao acaso. A probabilidade de que na combinação escolhida apareça um elemento previamente escolhido é de:

a) 3/10 b) 1/3 c) 1/2 d) 7/10 e) 3/4

Solução. Considerando que E' seja o elemento previamente escolhido, temos que os dois elementos restantes desse evento serão escolhidos dos 9 restantes. Logo, temos:

$$\boxed{\begin{cases} n(\Omega) = C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10.9.8.7!}{3!7!} = (10).(12) = 120 \\ n(E'2R) = 1.C_{9}^{2} = \frac{9!}{2!7!} = \frac{9.8.7!}{2!7!} = (9).(4) = 36 \end{cases} \Rightarrow P(E'2R) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}}.$$

14) Os alunos do curso diurno e curso noturno de uma faculdade se submeteram a uma prova de seleção, visando à participação numa olimpíada internacional. Dentre os que tiraram nota 9.5 ou 10.0, será escolhido um aluno por sorteio.

NOTA	Curso diurno	Curso noturno	Total
9.5	6	7	13
10.0	5	8	13
Total	11	15	26

Com base nessa tabela, a probabilidade de que o aluno sorteado tenha tirado nota 10.0 e seja do curso noturno é:

a) 12/26 b) 6/14 **c)** 4/13 d) 12/52 e) 1/6

Solução. Há 26 alunos com nota 9,5 ou 10,0. Há 8 alunos simultaneamente estudando no Curso noturno e que tiraram nota 10,0. Logo, $\boxed{P(N10\ e\ Noturno) = \frac{8}{26} = \frac{4}{13}}$.

15) Um casal pretende ter 3 filhos. Qual a probabilidade de que os 3 filhos sejam do mesmo sexo?

a) 1/8 b) 1/6 c) 1/3 **d)** 1/4 e) 2/3

Solução. A probabilidade de nascer homem ou mulher é a mesma: 1/2. Então, a probabilidade dos três filhos serem do mesmo sexo é:

$$\boxed{P(mesmo\ \ sexo) = P(HHH) + P(MMM) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}}.$$

16) Contra certa doença podem ser aplicadas as vacinas I ou II. A vacina I falha em 10% dos casos e a vacina II em 20% dos casos, sendo esses eventos totalmente independentes. Nessas condições, se todos os habitantes de uma cidade receberem doses adequadas das duas vacinas, a probabilidade de um indivíduo não estar imunizado contra a doença é:

a) 30% b) 10% c) 3% **d)** 2% e) 1%

Solução. O indivíduo não estará imunizado se as duas vacinas falharem.

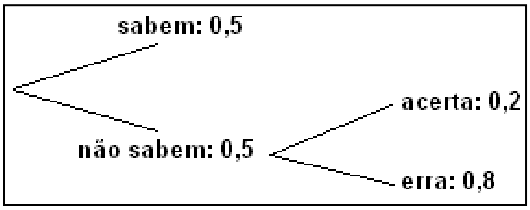
$\boxed{P(\overline{\text{imunizado}}) = (0{,}1).(0{,}2) = 0{,}02 = 2\%}$.

	Vacina I	Vacina II
Falha	10%	20%
Não falha	90%	80%

17) Uma questão de múltipla escolha tem 5 alternativas. Dos alunos de uma turma, 50% sabem resolver a questão, enquanto os demais ”chutam” a resposta. Um aluno da turma é escolhido ao acaso.

a) Qual a probabilidade de que ele tenha acertado a questão?

b) Dado que o aluno acertou a questão, qual a probabilidade de que ele tenha ”chutado”?



Solução. A situação está representada na árvore.

a) O aluno acerta a questão em duas situações: Ou ele sabe ou chutou e acertou. Logo,

$\boxed{P(\text{acertar}) = P(\text{sabe}).P(\text{acerta}/\text{chutou}) = (0{,}5) + (0{,}5).(0{,}2) = 0{,}5 + 0{,}1 = 0{,}6 \to 60\%}$.

b) Probabilidade condicional: $\boxed{P(\text{chutou}/\text{acertar}) = \dfrac{P(\text{chutar} \cap \text{acertar})}{P(\text{acertar})} = \dfrac{(0{,}5).(0{,}2)}{0{,}6} = \dfrac{0{,}1}{0{,}6} = \dfrac{1}{6}}$.

18) No estado do Maranhão há uma loteria tal que: seis números não tirados de uma sequencia de 1 até 60. Qual é a probabilidade de que os seis números que tenham sido retirados sejam:

a) Todos de um dígito?

b) Dois de um dígito e quatro de dois dígitos?

c) Todos de dois dígitos?

Solução. O número de elementos do espaço amostral do sorteio é $\boxed{n(\Omega) = C_{60}^{6}}$**. Temos:**

a) Há 9 números de um dígito (1 a 9). Logo, $\boxed{P(6d1) = \dfrac{C_9^6}{C_{60}^6}}$.

b) Serão sorteados dois números dentre os 9 de um dígito e quatro dentre os 51 números de dois dígitos (60 – 10 + 1 = 51). Logo, $\boxed{P(2d1 \text{ e } 4d2) = \dfrac{C_9^2 \times C_{51}^4}{C_{60}^6}}$.

c) Serão sorteados 6 números dentre os 51 números de dois dígitos.

Logo, $\boxed{P(6d2) = \dfrac{C_{51}^6}{C_{60}^6}}$.

19) Uma urna contém 10 bolas das quais 6 são brancas e 4 verdes. Fazem-se 2 extrações sucessivas sem reposição.

a) Qual a probabilidade de sair bola verde na segunda extração sabendo que na 1ª extração saiu bola branca?
b) Qual a probabilidade de sair bola branca na 1ª extração e bola verde na segunda?
c) Qual a probabilidade de sair bola verde na 2ª extração?
d) Qual a probabilidade de sair bola branca na 1ª extração?

Solução. O espaço amostral possui 10 elementos.

a) Se na 1ª extração saiu uma bola branca, há ainda 4 bolas verdes num total, agora, de 9 bolas.

Logo, $\boxed{P(\text{verde}) = \frac{4}{9}}$.

b) Temos: $\boxed{P(BV) = \frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9} = \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{9} = \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{3} = \frac{4}{15}}$.

c) Será a soma das probabilidades: $\boxed{P(VV)+P(BV) = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} + \frac{4}{15} = \frac{4}{30} + \frac{4}{15} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}}$.

d) $\boxed{P(\text{branca}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}}$.

20) Cinco casais formados, cada um, por marido e mulher, são aleatoriamente dispostos em grupos de duas pessoas cada um. Calcule a probabilidade de que todos os grupos sejam formados por:

a) um marido e sua mulher;
b) pessoas de sexo diferentes.

Solução. As 10 pessoas serão colocadas em grupos de duas pessoas e não importa nem a ordem dos grupos nem da dupla.

$\boxed{C_{10}^2} \quad \boxed{C_8^2} \quad \boxed{C_6^2} \quad \boxed{C_4^2} \quad \boxed{C_2^2}$

O número de formas de organizar as 10 pessoas é:

$$\boxed{\frac{C_{10}^2.C_8^2.C_6^2.C_4^2.C_2^2}{5!} = \frac{\frac{10!}{2!8!}\cdot\frac{8!}{2!6!}\cdot\frac{6!}{2!4!}\cdot\frac{4!}{2!2!}.1}{5!} = \frac{\frac{10!}{2!}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2!2!}}{5!} = \frac{10!}{32.5!} = \frac{10.9.8.7.6.5!}{32.5!} = 945}.$$

A divisão por 5! É devido ao fato de a ordem dos grupos não importar.

a) Só há uma formação onde cada homem está com sua respectiva esposa. Logo a probabilidade pedida é: $\boxed{P(\text{marido e esposa}) = \frac{1}{945}}$.

b) Como as pessoas terão sexos diferentes, bastas fixar um sexo em cada grupo e permutar os restantes. Mantendo cada homem em grupo diferente, temos:

$\boxed{H1\_} \quad \boxed{H2\_} \quad \boxed{H3\_} \quad \boxed{H4\_} \quad \boxed{H5\_}$

Os espaços vazios podem ser ocupados pelas mulheres de 5! = 120 formas diferentes.

Logo, $\boxed{P(\text{sexo diferente}) = \frac{120}{945} = \frac{24}{189} = \frac{8}{63}}$.

ATIVIDADE 3 - LABORATÓRIO

• **Recursos Educacionais Utilizados:** Data-show, computador, internet, software GeoGebra.

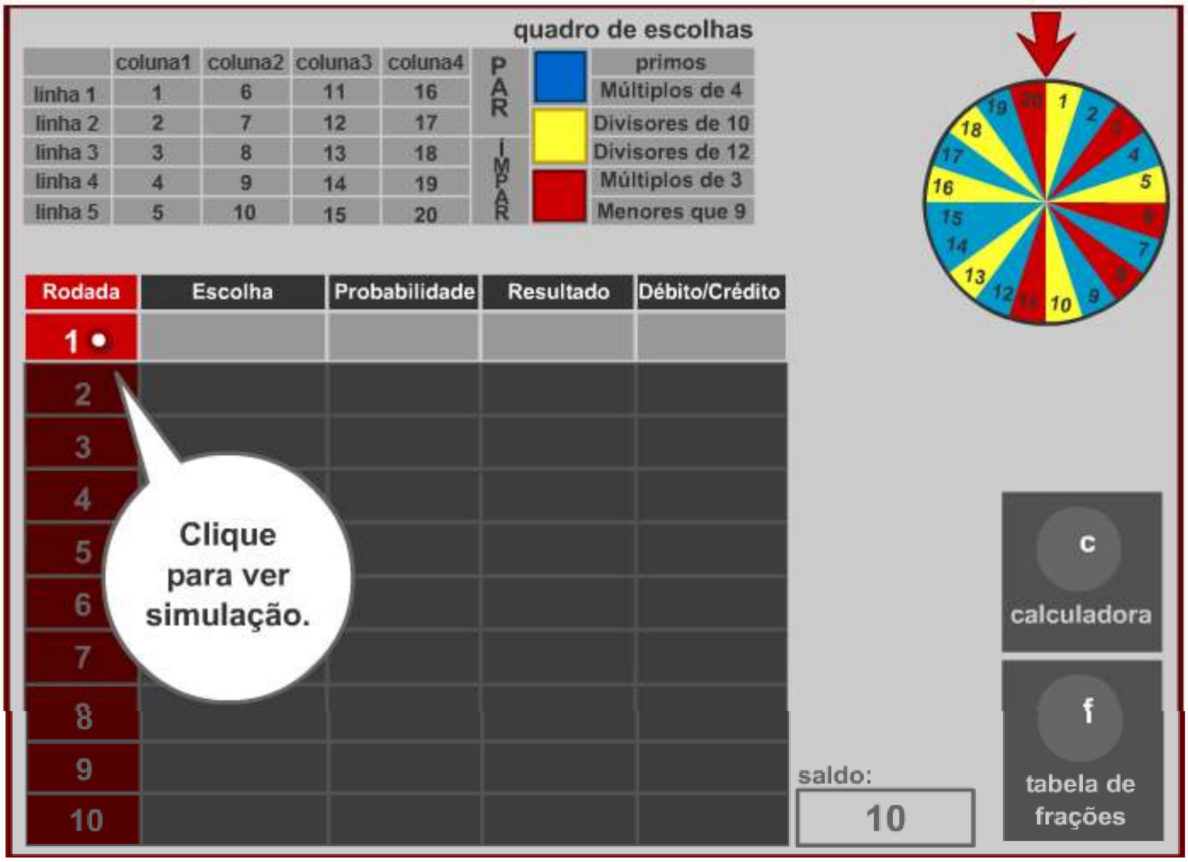
• **Organização da turma:** Turma organizada em duplas, para propor a atividade abaixo.

• **Metodologia adotada:** Propor que os alunos acompanhem os exercícios propostos abaixo e criem questões como desafios e troquem com os colegas. Com isso, avaliar o aproveitamento dos alunos, além dos esclarecimentos necessários às dificuldades encontradas.

• **Objetivos:** Apresentar uma situação problema para que os alunos possam refletir sobre o assunto.

Neste contexto serão aqui apresentadas três atividades selecionadas:

1º. Exemplo: http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/1643/open/file/mat5_ativ1b.htm



2º. Exemplo: JOGO DA TRILHA

http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1380

Sinopse:

O Jogo da Trilha é bastante simples e exige como material apenas um dado de 6 faces. Além disso, nesta atividade a intuição dos alunos será desafiada quando eles tiverem de optar por uma estratégia que acreditam ser vencedora. Por fim, o experimento culminará em uma análise probabilística guiada pelo professor.

Objetivos:

Discutir, através de um jogo, o conceito de probabilidade condicional;

Desenvolver a habilidade necessária para o tratamento de informações através de gráficos e tabelas;

Induzir o aluno à formulação de estratégias a partir de seu conhecimento matemático.

Conteúdos:

PROBABILIDADE CONDICIONAL

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

EVENTOS EQUIPROVÁVEIS

PERMUTAÇÃO E COMBINAÇÃO

Atenção: Segue em anexo o Guia do Professor de cada exemplo.

5. Avaliação:

A avaliação, segundo os PCN's, deve ser vista como um diagnóstico contínuo e dinâmico, um instrumento para repensar e reformular os métodos, os procedimentos e as estratégias de ensino. Devemos considerar a avaliação como processo de acompanhamento e compreensão dos avanços, dos limites e das dificuldades dos alunos para atingirem os objetivos da atividade de que participam. Com isso, a avaliação deverá ocorrer em todos os momentos das aulas. O docente deverá estar atento às perguntas e as respostas, ou seja, sua participação na sala de aula, observando o seu desenvolvimento principalmente nos exercícios propostos e principalmente a tarefa no laboratório.

Em tese, acredito que o mais importante é verificar se na atividade os alunos conseguiram compreender os conceitos envolvidos no estudo de Introdução à Probabilidade, principalmente através do raciocínio lógico.

6. Curiosidade: PROBABILIDADES NA ROLETA

http://www.onlinecasinoadvice.com.pt/roleta/probabilidades/

Se pretender ganhar à roleta, então tem de perceber cuidadosamente como cada probabilidade se relaciona com cada aposta. Uma correta avaliação das suas probabilidades é necessária, a não ser que tencione perder uma considerável quantia de dinheiro.

Roleta Vantagem da Casa

Antes de serem apontadas as possibilidades de ganho e as taxas de pagamento em cada aposta na roleta, é necessário explicar o que é a vantagem da casa. Este termo especifica a percentagem que o cassino tem sobre o jogador. É a percentagem de dinheiro apostado pelos jogadores que o cassino irá receber após um grande número de jogos.

Tem de perceber que não há absolutamente nenhuma forma de influencia a vantagem da casa. É assim que a roleta é integrada e esta percentagem é baseada num cálculo matemático sempre preciso. Se alguém lhe prometer vender um sistema que pode diminuir a vantagem da casa na roleta, estará a tentar enganá-lo.

A vantagem da casa na roleta existe por causa dos espaços 0 e 00 na roda. Provavelmente saberá que se a bola cair no espaço 0 perderá o jogo, independentemente da aposta que tiver feito. Esta é a razão do cassino ter uma vantagem sobre o jogador.

A roleta europeia tem uma vantagem da casa de 2.70% graças a ter apenas um espaço de 0. Por outro lado, a roleta americana tem uma vantagem de 5.26% por ter um segundo espaço de 0. Assim, escolha preferencialmente uma roleta europeia em vez da americana.

Calcular as Hipóteses de Ganhar na Roleta
De forma a calcular as hipoteses de ganhar na roleta, tudo o que tem de fazer é dividir a quantidade de números que a sua aposta abarca pelo total de espaços que a roda da roleta contem e multiplicar por 100. Lembre-se que a roleta europeia tem 37 espaços e a variante americana tem 38.

Por conveniência, também já calculamos este fator e também acrescentamos as taxas de pagamento.

Tabela de Probabilidades da Roleta

Tipos de Aposta	Probabilidades na Roleta Europeia	Probabilidades na Roleta Americana	Pagamentos
Vermelho ou Preto	48.64%	47.36%	1 para 1
Pares ou Ímpar	48.64%	47.36%	1 para 1
Colunas de Aposta	48.64%	47.36%	2 para 1
Apostas de Dezenas	32.43%	31.57%	2 para 1
Apostas Seguidas	2.7%	2.63%	35 para 1
Apostas em Street	8.1%	7.89%	11 para 1
Apostas Repartidas	5.4%	5.26%	17 para 1
Apostas em Linha	16.21%	15.78%	5 para 1
Apostas de Canto	10.81%	10.52%	8 para 1

Como pode ver, a tabela acima aponta principalmente duas coisas: primeiro, a roleta europeia é mais rentável que a roleta americana, e segundo, que as apostas exteriores oferecem melhores hipóteses de ganho que as apostas interiores.

De forma a jogar com as melhores possibilidades de ganhar, deve sempre escolher apostas externas às internas. Mas como poderá ter visto, as apostas externas oferecem pagamentos menores. Pode colocar apostas interiores se quiser, mas só se tiver uma boa banca e se não tiver medo de a perder.

ESTRATÉGIA DE ROLETA

A roleta é um jogo de cassino extremamente fácil de jogar, mas esta facilidade vem com um preço, nomeadamente a grande vantagem da casa. Por outro lado, a roleta é um jogo de cassino muito divertido que ainda assim oferece boas hipóteses de ganhos para o jogar habilidoso.

A verdade é que muitas pessoas alegam conhecer ou usar sistemas de roleta que supostamente favorecem as suas probabilidades mas a grande maioria deles são intrujices ou apenas mitos. Mas ainda assim, há formas que podem fazer aumentar imenso as suas hipóteses. Leia este artigo e aprenda a ganhar na roleta.

Como Jogar à Roleta

Embora possa parecer óbvio para muita gente, uma das principais formas de aumentar as suas hipóteses na roleta é conhecer o jogo de dentro para fora. Antes de jogar à roleta, seja num cassino real ou num online, tem de trocar o seu dinheiro por fichas. Cada jogador terá fichas com uma cor especifica.

A próxima coisa a fazer é decidir onde colocar a aposta. Esta é provavelmente a coisa mais importante de que se deve lembrar, dado que o tipo de aposta que faz não só influencia as suas possibilidades de ganhar como também determina o dinheiro que ganhará se conseguir predizer o resultado de uma rotação.

Algumas pessoas alegam que se for um iniciante é suficiente aprender as apostas básicas da roleta, como Par ou Ímpar, Vermelho e Preto, mas nós, contrariamente, recomendamos vivamente a que se familiarize com todas as apostas possíveis na roleta. Pode navegar pelos nossos artigos para ler informação adicional.

Para fazer uma aposta na roleta tem de colocar as suas fichas no local apropriado da mesa de roleta. Depois de cada jogar ter feito uma aposta, o dealer irá fazer girar a roda e lançar a bola no circulo externo da roda. Depois da roda parar, a bola irá cair num dos seus buracos numerados. Dependendo da aposta que tiver feito e do resultado da rotação, os seus ganhos serão calculados.

Dica: Certifique-se que joga na Roleta Europeia em vez da Americana se ambas estiverem disponíveis no cassino. A Roleta Europeia oferece muito melhores chances de ganhar que a Roleta Americana.

Estratégia para Ganhar na Roleta

A melhor estratégia para ganhar na roleta é gerir o seu dinheiro de forma apropriada. Provavelmente ouviu isto imensas vezes e preferia em vez disto ouvir alguma dica secreta ou truque que o tornaria um milionário da noite para o dia, mas essa não é a forma de funcionar da roleta.

A primeira parte para uma estratégia de gestão de dinheiro da roleta bem sucedida é decidir a quantidade de dinheiro que pretende jogar. A regra é que não importa o que acontecer, nunca deve ir para além deste valor. Pode acontecer perder tudo, mas sob nenhuma circunstancia deve correr atrás do seu dinheiro.

No inicio, deve também fazer apostas relativamente baixas e ir subindo. Pode também escolher fazer apostas que têm probabilidades de sair altas, como o Par ou Ímpar ou o Vermelho e Preto. Depois de conseguir aumentar a sua banca, pode investir um pouco mais e avançar para apostas com melhores pagamentos.

Lembre-se apenas que a roleta é principalmente um jogo de sorte e que não importa a forma com que jogue ou o que faça, a sorte é um dos principais fatores neste jogo. Nunca acredite também em pessoas que alegam vender estratégias que podem garantir-lhe ganhos imediatos pois estas simplesmente não existem.

Lembre-se: A vantagem da casa na Roleta é de 2.7% ou 5.26% (dependendo da variante) o que denota a vantagem que o cassino tem sobre o jogador. Não há forma nenhuma de reduzir esta vantagem para 0 ou fazê-la num número negativo.

7. Referências Bibliográficas:

• Matemática: Contexto e Aplicações / Dante, Luis Roberto – 1ª Ed. , volume 1 – São Paulo: Ática, 2010.

• A Matemática do Ensino Médio – Volume 1 / Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado. – 9. Ed. – Rio de Janeiro: SBM (COLOÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA) - 2006.

• GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR., José Ruy. Matemática Fundamental. 2º Grau. São Paulo: FTD,1994. (Volume único)

• GUICHARD, Jean Paul. História da Matemática no ensino da Matemática. Disponível em: http://www..mat.uc.pt/~jaimecs/mhist.html. Acesso em 20 jun. 2007.

• BIANCHINI, Edwaldo. Matemática/ Edwaldo Bianchini, Herval Paccola; ilustradores Adilson Secco, Paulo Manzi e Mário Azevedo Matsuda. – 1.ed. – São Paulo: Moderna, 2004.

- MORGADO, Augusto César de Oliveira, OUTROS, Análise Combinatória e Probabilidade, Coleção Professor de Matemática, SBM.

- LIMA, E. Lages, OUTROS, A Matemática do Ensino Médio, Vol 2, Coleção Professor de Matemática, SBM.

www.estig.ipbeja.pt

• http://professorwaltertadeu.mat.br

• http://www.geogebra.org/cms/

• www.alunosonline.com.br/matematica/

• www.brasilescola.com/matematica/

• http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/mod/glossary/view.php?id=7602

• http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1253

• http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1062

• http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1380

• http://www.uff.br/cdme/prob-doisdados/prob-doisdados-html/prob-doisdados.html

• http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/1643/open/file/mat5_ativ1.htm

• http://www.onlinecasinoadvice.com.pt/roleta/probabilidades/