# FORMAÇÃO CONTINUADA

# MATRIZES

ANA CRISTINA DA SILVA FERREIRA

**FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

**FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ**

**COLÉGIO ESTADUAL PADRE MANUEL DA NÓBREGA**

**PROFESSORA ANA CRISTINA DA SILVA FERREIRA**

**MATRÍCULA: 827293.2**

**SÉRIE: 2º ANO DO ENSINO MÉDIO**

**TUTOR (A): EDESON DOS ANJOS SILVA**

## SUMÁRIO

**FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

**FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ**

**COLÉGIO ESTADUAL PADRE MANUEL DA NÓBREGA**

**PROFESSORA ANA CRISTINA DA SILVA FERREIRA**

**MATRÍCULA: 827293.2**

**SÉRIE: 2º ANO DO ENSINO MÉDIO**

**TUTOR (A): EDESON DOS ANJOS SILVA**

**PLANO DE TRABALHO SOBRE MATRIZES**

(Ana Cristina da Silva Ferreira)

(cristinabicho@hotmail.com)

## I- Introdução

Iniciaremos o estudo de matrizes através de situações-problema, contextualizando o conteúdo, fazendo com que o aluno se ambiente com o mesmo na sua vida pessoal, social e cultural.

Utilizaremos o vídeo: A Cooperativa de Leite, para que seja possível perceber o quanto o estudo de matrizes pode ajudar a resolver situações aparentemente difíceis do cotidiano.

Serão incluídos desafios que questionem e ampliem o conhecimento da turma.

Faremos algumas atividades, partindo daí para o conteúdo propriamente dito.

Utilizaremos como suporte, além do livro didático, trabalhos em grupo, pesquisas, ferramentas tecnológicas e outros recursos de forma a tornar a aprendizagem mais significativa.

**II- Desenvolvimento**

**<u>Roteiro de Ação 1</u>**

Apresentação do vídeo: **Cooperativa de leite:**

**Mídia:** Vídeo (cerca de 10 minutos)
**Descrição:** Uma cooperativa de produtores de leite decide construir um tanque de refrigeração para uso coletivo, mas ainda precisa decidir em qual fazenda construí-lo. Essa questão é respondida com auxílio da representação e interpretação dos dados na forma de uma tabela. Essa atividade pode ser usada como ponto de partida para introduzir a noção de matriz e alguns de seus conceitos básicos.

Atividades envolvendo matrizes

Duração da Aula: 100 minutos

Área de Conhecimento: Matrizes

Objetivos: Introduzir o conceito de matrizes, inicialmente como uma tabela, a fim de que os alunos se familiarizem com tal conceito.

Resolver situações-problema que envolva matrizes.

Pré-requisitos: não há

Material didático: • Notebook do professor acompanhado de projetor multimídia.

• Aplicação de dinâmicas de grupo

• Cartolina

Organização da classe: Em grupos para troca de conhecimentos e ideias.

Descritores associados:

**H4 –** Identificar a Matemática como importante recurso para a construção de argumentação.

**H33 –** Efetuar cálculos, envolvendo as operações com matrizes.

Habilidades:

-Utilizar situações-problema para introduzir matrizes.

Dando início ao nosso trabalho utilizaremos o vídeo: “**Cooperativa de leite**”.

**Mídia:** Vídeo (cerca de 10 minutos)

**Descrição:** Uma cooperativa de produtores de leite decide construir um tanque de refrigeração para uso coletivo, mas ainda precisa decidir em qual fazenda construí-lo. Essa questão é respondida com auxílio da representação e interpretação dos dados na forma de uma tabela. Essa atividade pode ser usada como ponto de partida para introduzir a noção de matriz e alguns de seus conceitos básicos

**ATIVIDADE 1:**

A atividade 1 terá como base um vídeo “A cooperativa de leite”, que apresenta a seguinte motivação:

“Há seis fazendas de produtores de leite que fazem parte de uma cooperativa. Eles vão comprar juntos um tanque de refrigeração. As distâncias das fazendas estão configuradas segundo o desenho abaixo. Assinale em qual das fazendas deve-se instalar o tanque de forma que a maior distância percorrida seja a menor possível”.

No decorrer do vídeo aparece a primeira matriz, contendo as distâncias entre as fazendas.

No vídeo é falado que as diagonais principais são nulas porque as distâncias são nulas. Perguntaremos aos alunos novamente porque as diagonais são nulas. Apresentaremos a matriz em tamanho grande numa cartolina para melhor fixação do conteúdo.

| | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** | **F** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **A** | 0 | 5 | 11 | 14 | 12 | 15 |
| **B** | 5 | 0 | 6 | 9 | 14 | 10 |
| **C** | 11 | 6 | 0 | 3 | 8 | 4 |
| **D** | 14 | 9 | 3 | 0 | 5 | 2 |
| **E** | 12 | 14 | 8 | 5 | 0 | 7 |
| **F** | 15 | 10 | 4 | 2 | 7 | 0 |

Nessa tabela, o maior valor de cada linha estará em destaque, pois este determina a maior distância entre as fazendas. Então voltamos a pergunta-problema: “em qual das fazendas deve-se instalar o tanque de forma que a maior distância percorrida seja a menor possível?”. Os alunos devem chegar a fazenda C.

O próximo critério a ser avaliado para a escolha da fazenda onde vai ser instalado o tanque é o número de viagens que cada fazendeiro dá para transportar todo o leite que produz.

Vamos apresentar a tabela acima com uma coluna a mais, representando o número de viagens que cada fazendeiro faz para transportar o leite que produz diariamente.

Essa tabela também está representada numa cartolina

| | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** | **F** | **Nº de viagens de cada fazendeiro** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **A** | 0 | 5 | 11 | 14 | 12 | 15 | 4 |
| **B** | 5 | 0 | 6 | 9 | 14 | 10 | 3 |
| **C** | 11 | 6 | 0 | 3 | 8 | 4 | 2 |
| **D** | 14 | 9 | 3 | 0 | 5 | 2 | 1 |
| **E** | 12 | 14 | 8 | 5 | 0 | 7 | 3 |
| **F** | 15 | 10 | 4 | 2 | 7 | 0 | 4 |

Cada elemento da matriz(tabela) será multiplicado pelo número de viagens, pois assim teremos a distância percorrida por cada fazendeiro para transportar a produção diária.

| | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** | **F** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **A** | 0 | 3x5 | 2x11 | 1x14 | 3x12 | 4x15 |
| **B** | 4x5 | 0 | 2x6 | 1x9 | 3x14 | 4x10 |
| **C** | 4x11 | 3x6 | 0 | 1x3 | 3x8 | 4x4 |
| **D** | 4x14 | 3x9 | 2x3 | 0 | 3x5 | 4x2 |
| **E** | 4x12 | 3x14 | 2x8 | 1x5 | 0 | 4x7 |
| **F** | 4x15 | 3x10 | 2x4 | 1x2 | 3x7 | 0 |

Apresentamos a tabela com os resultados das operações contendo a distância total que cada fazendeiro percorre para transportar sua produção diária.

Deixamos em destaque na tabela o maior valor de cada linha.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **A** | 0 | 15 | 22 | 14 | 36 | **60** |
| **B** | 20 | 0 | 12 | 9 | **42** | 40 |
| **C** | **44** | 18 | 0 | 3 | 24 | 16 |
| **D** | **56** | 27 | 6 | 0 | 15 | 8 |
| **E** | **48** | 42 | 16 | 5 | 0 | 28 |
| **F** | **60** | 30 | 8 | 2 | 21 | 0 |

Assim, temos em destaque as maiores distâncias percorridas por cada fazendeiro diariamente.

Então voltamos a pergunta: “Em qual das fazendas o tanque deverá ser instalado de forma que a maior distância percorrida seja a menor possível?”.

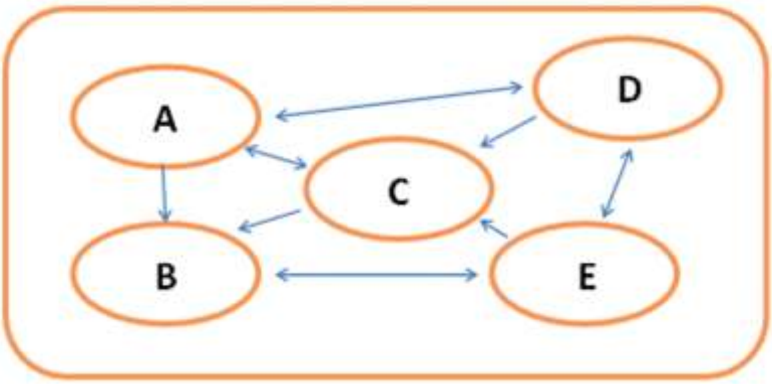
Os alunos deverão responder que é a fazenda B, pois acompanharam os dados e vão notar que o valor que aparece na coluna 6, linha 3 é o menor de todos os valores em destaque e, portanto, a menor distância entre as maiores distâncias.

Assim concluímos a análise do vídeo.

**ATIVIDADE 2:** Cadê o meu voo?

Nesta atividade pretendemos que o aluno explore os elementos de matrizes quadradas, observando a linha e a coluna a que pertencem, e propiciando também uma investigação quanto à simetria da matriz. Veja a proposta a seguir.

Suponha que dos aeroportos de 5 cidades partam voos diários. As rotas existentes entre as cidades estão representadas pelas setas no desenho a seguir




Observando o sentido da seta conseguimos observar qual é o ponto de partida e qual é o ponto de chegada de cada voo.

1. Indique três rotas diferentes para sair da cidade A e chegar na cidade B.

___

___

___

2. Existe voo direto entre as cidades A e B?

___

___

___

3 Você e seu colega devem preencher a tabela a seguir. Para isso, devem preencher com o número 1, quando existir voo direto partindo de uma cidade para a outra, e com o número zero, caso contrário.

| | | CIDADES DE CHEGADA | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D | E |
| CIDADES DE PARTIDA | A | | 1 | | | |
| | B | 0 | | | 0 | |
| | C | | 1 | | | |
| | D | | | | 0 | 1 |
| | E | 0 | | | | |

4 Observando na tabela a diagonal que une o canto superior esquerdo ao inferior direito, você consegue explicar por que ela é formada só por zeros?

___

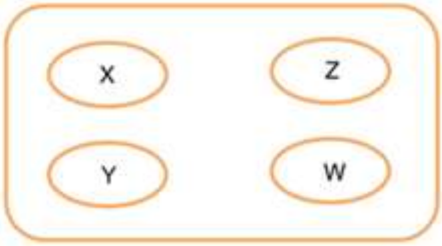
___

**5.** Ao invés de usar uma tabela podemos utilizar uma matriz para representar as rotas existentes entre as cidades. Suponha agora que dos aeroportos de 4 cidades, X, Y, Z e W partam voos diários e as rotas estejam representadas na matriz a seguir.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} X & Y & Z & W \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} X \rightarrow \\ Y \rightarrow \\ Z \rightarrow \\ W \rightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

As linhas referem-se a de onde partem os voos e as colunas, de onde chegam os voos. Assim podemos observar que o elemento da primeira linha e segunda coluna nos diz que não há voo saindo de X e chegando em Y. Já o elemento da segunda linha e primeira coluna nos mostra que há voo saindo de Y e chegando em X.

Analise a matriz que fornece as rotas entre as cidades X, Y, Z e W e faça as setas que indicam as rotas no diagrama.




A partir desta e de outras atividades contextualizadas do livro didático, partiremos para o conteúdo propriamente dito:

**<u>Roteiro de Ação 2</u>**

Duração: 150 minutos

Área de Conhecimento: Matrizes

Objetivos: - Identificar os diferentes tipos de matrizes

Pré- requisitos: Matemática do Ensino Fundamental.

Conteúdos: Tipos de matrizes

Operações com Matrizes

.Material didático:

- Fórum de discussões;
- Resolução de problemas
- Aplicação de dinâmicas de grupo

Recursos de apoio:

Livro Didático

Organização da classe: Em duplas para troca de conhecimentos e idéias.

Descritores associados:

**H33 –** Efetuar cálculos, envolvendo as operações com matrizes.

Habilidades:

-Resolver operações com matrizes

Nesse roteiro trabalharemos o conteúdo propriamente dito, montando fórum de discussões e levando o aluno a fazer anotações das ideias em seu caderno.

## Matrizes

As matrizes são estruturas matemáticas organizadas na forma de tabela com linhas e colunas, utilizadas na organização de dados e informações. Nos assuntos ligados à álgebra, as matrizes são responsáveis pela solução de sistemas lineares. Elas podem ser construídas com **m** linhas e **n** colunas, observe:

$\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$, matriz de ordem 3 x 1. (3 linhas e 1 coluna).

$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -78 & 8 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$, matriz de ordem 3 x 2. (3 linhas e 2 colunas)

$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5 \\ 6 & -9 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$, matriz de ordem 4 x 2. (4 linhas e 2 colunas)

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \end{vmatrix}$, matriz de ordem 1 x 4. (1 linha e 4 colunas)

As matrizes com número de linhas e colunas iguais são denominadas matrizes quadradas. Observe:

$\begin{vmatrix} -1 & 9 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}$, matriz quadrada de ordem 2 x 2.

$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ -7 & -9 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, matriz quadrada de ordem 3 x 3.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 & 7 \\ 8 & -21 & 23 & 65 \\ -52 & -41 & 74 & 30 \\ 2 & 6 & 8 & 90 \end{vmatrix}$$ , matriz quadrada de ordem 4 x 4.

Na matriz $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -9 \end{vmatrix}$ , temos que cada elemento ocupa seu espaço de acordo com a seguinte localização:

O elemento 2 está na 1ª linha e 1ª coluna.

O elemento 5 está na 1ª linha e 2ª coluna.

O elemento 7 está na 2ª linha e 1ª coluna.

O elemento –9 está na 2ª linha e 2ª coluna.

Portanto, temos:

aij, onde i = linhas e j = colunas.

$a_{11} = 2$
$a_{12} = 5$
$a_{21} = 7$
$a_{22} = –9$

Podemos construir uma matriz de acordo com uma lei de formação baseada em situações variadas. Por exemplo, vamos construir uma matriz de ordem 3 x 3, seguindo a orientação $\boldsymbol{a_{ij} = 3i + 2j}$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3*1+2*1 & 3*1+2*2 & 3*1+2*3 \\ 3*2+2*1 & 3*2+2*2 & 3*2+2*3 \\ 3*3+2*1 & 3*3+2*2 & 3*3+2*3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 12 \\ 11 & 13 & 15 \end{vmatrix}$$

Vamos escrever a matriz B dada por $(a_{ij})4x4$, de modo que ***i + j, se i = j e i – j, se i ≠ j***.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1+1 & 1-2 & 1-3 & 1-4 \\ 2-1 & 2+2 & 2-3 & 2-4 \\ 3-1 & 3-2 & 3+3 & 3-4 \\ 4-1 & 4-2 & 4-3 & 4+4 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

# Tipos de Matrizes

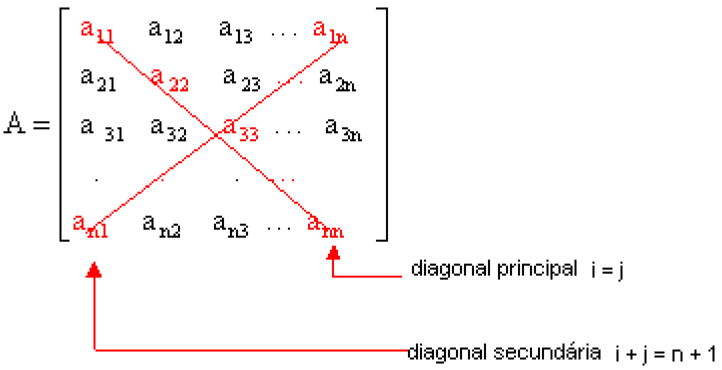
Algumas matrizes, por suas características, recebem denominações especiais.

- **Matriz linha**: matriz do tipo 1 x n, ou seja, com uma única linha. Por exemplo, a matriz A =[4 7 -3 1], do tipo 1 x 4.

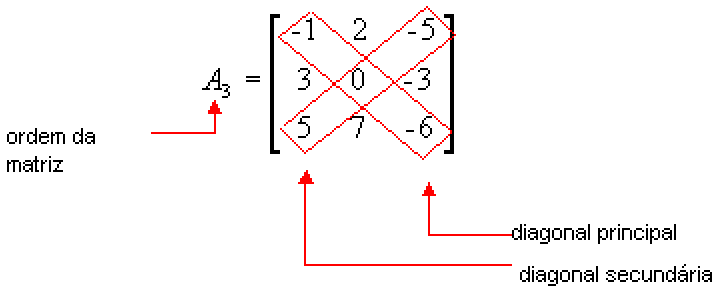
- **Matriz coluna**: matriz do tipo m x 1, ou seja, com uma única coluna. Por exemplo, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, do tipo 3 x 1

- **Matriz quadrada:** matriz do tipo n x n, ou seja, com o mesmo número de linhas e colunas; dizemos que a matriz é de ordem **n**. Por exemplo, a matriz $C = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ é do tipo 2 x 2, isto é, quadrada de ordem 2.

Numa matriz quadrada definimos a diagonal principal e a diagonal secundária. A principal é formada pelos elementos $\mathbf{a_{ij}}$ tais que i = j. Na secundária, temos i + j = n + 1.
Veja:




Observe a matriz a seguir:




$a_{11}$ = -1 é elemento da diagonal principal, pis i = j = 1

$a_{31}$= 5 é elemento da diagonal secundária, pois i + j = n + 1 ( 3 + 1 = 3 + 1)

- **Matriz nula**: matriz em que todos os elementos são nulos; é representada por $0_{m \times n}$.

Por exemplo, $0_{2x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- **Matriz diagonal**: matriz quadrada em que todos os elementos que não estão na diagonal principal são nulos. Por exemplo:

$a)\ A_{2x2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $b)\ B_{3x3} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

- **Matriz identidade**: matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais são nulos; é representada por $\mathbf{I_n}$, sendo **n** a ordem da matriz. Por exemplo:

$a)\ I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $b)\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Assim, para uma matriz identidade $I_n = [a_{ij}],\ a_{ij} = \begin{cases} 1, se\ i = j \\ 0, se\ i \neq j \end{cases}$.

- **Matriz transposta**: matriz $A^t$ obtida a partir da matriz A trocando-se ordenadamente as linhas por colunas ou as colunas por linhas. Por exemplo:

$Se\ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, então\ A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Desse modo, se a matriz **A** é do tipo m x n, $\mathbf{A^t}$ é do tipo n x m.

Note que a 1ª linha de **A** corresponde à 1ª coluna de $\mathbf{A}^t$ e a 2ª linha de A corresponde à 2ª coluna de $\mathbf{A}^t$.

- **Matriz simétrica**: matriz quadrada de ordem n tal que $\mathbf{A = A^t}$ **.** Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

é simétrica, pois $a_{12} = a_{21} = 5$, $a_{13} = a_{31} = 6$, $a_{23} = a_{32} = 4$, ou seja, temos sempre $a_{ij} = a_{ij}$.

- **Matriz oposta**: matriz **-A** obtida a partir de **A** trocando-se o sinal de todos os elementos de **A**. Por exemplo, $Se\ A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, então\ -A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

## Igualdade de Matrizes

Duas matrizes, A e B, do mesmo tipo m x n, são iguais se, e somente se, todos os elementos que ocupam a mesma posição são iguais:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}\ para\ \text{ todo } 1 \leq i \leq m \text{ e todo } 1 \leq j \leq n$$

$$Se\ A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & b \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & c \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } A = B, \text{ então } c = 0 \text{ e } b = 3$$

.

## Operações envolvendo matrizes

### Adição

Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{mxn}$ e $B = [b_{ij}]_{mxn}$, chamamos de soma dessas matrizes a matriz $C = [C_{ij}]_{m \times n}$, tal que $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo $1 \leq i \leq m \text{ e todo } 1 \leq j \leq n$ :

$$\boxed{A + B = C}$$

Exemplos:

- $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 4+(-1) \\ 0+0 & 7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 3+1 & 0+1 \\ 0+1 & 1+(-1) & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Observação: A + B existe se, e somente se, **A** e **B** forem do mesmo tipo.

### Propriedades

Sendo **A**, **B** e **C** matrizes do mesmo tipo ( m x n), temos as seguintes propriedades para a adição:

a) comutativa: A + B = B + A

b) associativa: ( A + B) + C = A + ( B + C)

c) elemento neutro: A + 0 = 0 + A = A, sendo 0 a matriz nula m x n

d) elemento oposto: A + ( - A) = (-A) + A = 0

**Subtração**

Dadas as matrizes $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{m \times n}$ e $B = \lfloor b_{ij} \rfloor_{m \times n}$, chamamos de diferença entre essas matrizes a soma de **A** com a matriz oposta de **B**:

$$\boxed{A - B = A + (-B)}$$

Observe:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} 3+(-1) & 0+(-2) \\ 4+0 & -7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

**Multiplicação de um número real por uma matriz**

Dados um número real **x** e uma matriz **A** do tipo m x n, o produto de **x** por **A** é uma matriz **B** do tipo m x n obtida pela multiplicação de cada elemento de **A** por **x**, ou seja, $b_{ij} = xa_{ij}$:

$$\boxed{B = x.A}$$

Observe o seguinte exemplo:

$$3.\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2 & 3.7 \\ 3.(-1) & 3.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 21 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

**Propriedades**

Sendo **A** e **B** matrizes do mesmo tipo ( m x n) e **x** e **y** números reais quaisquer, valem as seguintes propriedades:

a) associativa: x . (yA) = (xy) . A

b) distributiva de um número real em relação à adição de matrizes: x . (A + B) = xA + xB

c) distributiva de uma matriz em relação à adição de dois números reais: (x + y) **.** A = xA + yA

d) elemento neutro : xA = A, para x=1, ou seja, A=A

Após explicação do conteúdo, faremos algumas atividades lúdicas

**Roteiro de Ação 3**

Duração: 200 minutos

Área de Conhecimento: Matrizes

Objetivos: - Calcular o determinante de matrizes quadradas de ordem 2 e 3.

Pré- requisitos: Matemática do Ensino Fundamental.

Conteúdos: Multiplicação de Matriz por Matriz

Determinantes

.Material didático:

- Livro didático;
- Fórum de discussões;
- Resolução de problemas
- Aplicação de dinâmicas de grupo

Recursos de apoio:

Laboratório de Informática

Atividades xerocadas

Organização da classe: Em duplas para troca de conhecimentos e idéias.

Em trio, no Laboratório de Informática

Descritores associados:

H32 – Calcular o determinante de matrizes quadradas de ordem 2 ou 3

Habilidades:

-Utilizar situações-problema para introduzir matrizes e determinantes.

Iniciaremos esse roteiro com uma atividade envolvendo futebol:

**Atividade: De Olho no Placar**

Nesta atividade, os alunos devem organizar os dados de um campeonato de futebol em tabelas, bem como, utilizá-los para resolver uma situação que envolve intuitivamente a ideia de multiplicação de matrizes. Veja a proposta.

Em uma determinada escola, ocorre, anualmente, um campeonato de futebol, envolvendo quatro times. Neste ano, no primeiro turno foram realizados oito jogos, nos quais cada time jogou com os demais uma única vez. Observe o placar dos jogos.

| JOGO | PLACAR |
|---|---|
| Bola na trave x Tô sem controle | 2x1 |
| Bola na trave x Deixa que eu chuto | 2x2 |
| Bola na trave x Só o que sobrou | 4x1 |

| JOGO | PLACAR |
|---|---|
| Tô sem controle x Deixa que eu chuto | 1x1 |
| Tô sem controle x Só o que sobrou | 3x1 |
| Deixa que eu chuto x Só o que sobrou | 4x3 |

**1.** Você e seus colegas devem contar o número de vitórias, empates e derrotas de cada time e preencher a tabela a seguir.

TABELA 1: TIMES×RESULTADOS

| TIMES \ RESULTADOS | VITÓRIAS | EMPATES | DERROTAS |
|---|---|---|---|
| Bola na trave | | | |
| Tô sem controle | | | |
| Deixa que eu chuto | | | |
| Só o que sobrou | | | |

Solução:

TABELA 1: TIMES×RESULTADOS

| TIMES \ RESULTADOS | VITÓRIAS | EMPATES | DERROTAS |
|---|---|---|---|
| Bola na trave | 2 | 1 | 0 |
| Tô sem controle | 1 | 1 | 1 |
| Deixa que eu chuto | 1 | 2 | 0 |
| Só o que sobrou | 0 | 0 | 3 |

**2.** Observando os dados numéricos da tabela, responda.

**a.** Qual informação temos na linha do time "Tô sem controle"?

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

**b.** Qual informação temos na coluna "derrotas"?

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

**3.** Pelo regulamento desse campeonato escolar, são classificados para a final os dois times que tiverem maior número de pontos. Além disso, cada vitória vale 3 pontos, cada empate vale 1 e cada derrota vale 0. Registre essas informações na tabela a seguir:

| TABELA 2: RESULTADOS×PONTOS | |
|---|---|
| **RESULTADOS** | **PONTOS** |
| Vitória | |
| Empate | |
| Derrota | |

Solução:

| TABELA 2: RESULTADOS×PONTOS | |
|---|---|
| **RESULTADOS** | **PONTOS** |
| Vitória | *3* |
| Empate | *1* |
| Derrota | *0* |

**4.** A partir das informações das Tabelas 1 e 2, preencha a Tabela 3 com o total de pontos de cada time nesse turno. É importante que você escreva a expressão que utilizou e não apenas o resultado final. Indique também quais foram os dois times que disputaram a final.

| TABELA 3: TIMES×TOTAL DE PONTOS | |
|---|---|
| TIMES | TOTAL DE PONTOS |
| Bola na trave | |
| Tô sem controle | |
| Deixa que eu chuto | |
| Só o que sobrou | |

Solução:

| TABELA 3: TIMES×TOTAL DE PONTOS | |
|---|---|
| TIMES | TOTAL DE PONTOS |
| Bola na trave | $2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 7$ |
| Tô sem controle | $1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 4$ |
| Deixa que eu chuto | $1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 5$ |
| Só o que sobrou | $0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 0$ |

*Os times "Bola na Trave" e "Deixa que eu chuto" disputaram a final do campeonato.*

Após essa atividade, será explicado aos alunos a multiplicação de matrizes por matrizes, usando como referência:

A = Matriz da Tabela 1,

B = Matriz da Tabela 2,

C = A . B = Matriz da Tabela 3.

A multiplicação de matrizes A (referente à tabela 1) e B (referente à tabela 2) deve ser feita da seguinte forma: Primeiro, multiplicamos os elementos da 1a linha da matriz A pelos correspondentes da 1a coluna da matriz B. Depois, somamos esses produtos. Devemos fazer esse processo para todas as linhas e colunas.

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Logo C = A. B =** $\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

## Determinantes

Nas matrizes de ordem 2 x 2, calculamos o determinante de forma prática, multiplicando os elementos de cada diagonal e realizando a subtração do produto da diagonal principal do produto da diagonal secundária. Nas matrizes  O determinante de uma Matriz é dado pelo valor numérico resultante da subtração entre o somatório do produto dos termos da diagonal principal e do somatório do produto dos termos da diagonal secundária. Nas matrizes quadradas de ordem 3x3 esses cálculos podem ser efetuados repetindo-se a 1ª e a 2ª coluna, aplicando em seguida a regra de Sarrus. Lembrando que uma matriz é quadrada quando o número de linhas é igual ao número de colunas. Observe o cálculo de determinantes nas seguintes matizes quadradas de ordem 2x2 e 3x3:

***Determinante de uma matriz A de ordem 2 x 2.***

$$Det_A = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$$

*Diagonal principal: 2 * 6 = 12*
*Diagonal secundária: 9 * (–1) = – 9*

***$Det_A$ = 12 – (–9)***
***$Det_A$ = 12 + 9***
***$Det_A$ = 21***

***Determinante de uma matriz B de ordem 3 x 3.***

*Regra de Sarrus*

$$Det_B = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 5 & 6 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 7 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right.$$

*Diagonal principal*
2 * 6 * 3 = 36
5 * 7 * (–1) = – 35
6 * 1 * 2 = 12

*Soma*
36 + (–35) + 12
36 – 35 + 12

48 – 35
13

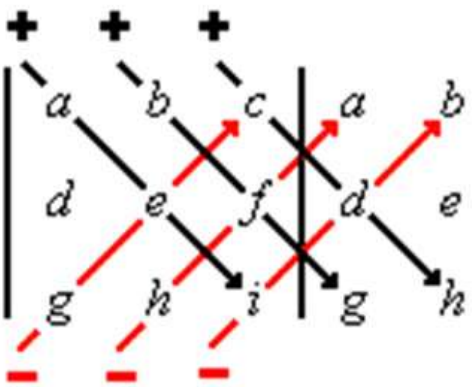
*Diagonal secundária*
6 * 6 * (–1) = –36
2 * 7 * 2 = 28
5 * 1 * 3 = 15

*Soma*
–36 + 28 + 15
–36 + 43
7

***$Det_B$ = 13 – 7***
***$Det_B$ = 6***

de ordem 3 x 3 utilizamos a regra de Sarrus descrita anteriormente.

*Demonstração geral da Regra de Sarrus*




Fixaremos o conteúdo com exercícios do livro didático e levando a aluno para fazer atividades interativas no Laboratório de Informática.

Atividades Interativas:

- Adição de duas matrizes
- Subtração de duas matrizes
- Multiplicação de duas matrizes
- Multiplicação de uma matrizes por um número real
- Matriz oposta
- Matriz transposta
- Determinante de uma matriz

**III- Avaliação**

Os alunos serão avaliados diariamente, mediante suas anotações, as observações produzidas a partir das discussões em aula, os conceitos formados, os exercícios resolvidos em aula e em casa, os resumos, as atividades em grupo e a prova escrita.

As atividades serão realizadas em sala de aula e no laboratório de Informática.

A avaliação deverá ser feita de forma que se torne possível identificar através dos resultados das atividades sugeridas e da análise da participação dos alunos nas aulas, a capacidade desses alunos reconhecerem as aplicações de Matrizes e Determinantes em situações comuns ao seu dia-a-dia..

**IV - Referências Bibliográficas**

Fontes:

Vídeo desenvolvido pelo projeto Matemática Multimídia, com financiamento do MEC

Disponível em:

<http://www.mais.mat.br/wiki/Cooperativa_de_leite> (acessado em 26/08/2013)

<http://www.brasilescola.com/matematica/matriz.htm> (acessado em 26/08/2013)

<http://reforcoescolar.cecierj.edu.br/ava23/mod/folder/view.php?id=246> (acessado em 26/08/2013)

<http://www.somatematica.com.br/emedio/matrizes/matrizes4.php> (acessado em 26/08/2013)