Formação Continuada em Matemática
Plano de Trabalho

Sistemas Lineares

Cursista: Igor de Freitas Leardini
Série: 2º ano – Ensino Médio
Tutor: Deivis de Oliveira Alves

Sumário

Introdução --- Pág.3

Desenvolvimento --- Pág.4

Avaliação -- Pág.16

Referências -- Pág.17

Introdução

Este plano de trabalho tem como objetivo mostrar aos alunos que situações – problemas do cotidiano podem ser transformadas em linguagem algébrica, através da montagem de equações lineares.

Fazer com que o aluno seja capaz de interpretar e montar as equações dependendo dos dados fornecidos pelos problemas, identificando a quantidade de valores variáveis a serem descobertos / calculados.

Essas situações devem ser trabalhadas com ferramentas a serem dadas aos alunos, com o intuito de verificarem as diversas possibilidades de soluções, sendo assim deduzido a necessidade da criação de um sistema de equações para a solução das situações – problemas, como já visto no ensino fundamental.

Deve-se fazer uma revisão dos métodos utilizados no fundamental com o objetivo de nivelar os alunos de uma maneira mais homogênea possível. Para tal plano serão necessárias 8 aulas de 50 minutos e para a avaliação formal serão necessárias 2 aulas de 50 minutos.

Desenvolvimento

Atividade 1

- Habilidade relacionada: Identificação de situações que possam ser transformadas em equações lineares / sistemas de equações e montagem / resolução de sistemas de equações 2x2

- Pré – requisito: Métodos de resolução de sistemas:adição, subtração ou comparação

- Tempo de duração:200 minutos

- Recursos utilizados: Data-show, livro didático, Geogebra, lousa.

- Organização da turma: Individual ou dupla

- Objetivos: relacionar problemas cotidianos com resolução de sistemas

- Metodologia: Apresentar em data-show o roteiro de ação 2 (problema das passagens), fazendo os alunos refletirem sobre a necessidade da montagem e resolução dos sistemas de equações:

"Considere o problema a seguir, enfrentado por João.
João é motorista em uma linha do chamado "transporte alternativo", que serve a moradores de um bairro. Esta linha admite dois tipos de passageiros, com dois valores de passagem distintos: os moradores que utilizam o transporte para circular dentro do próprio bairro, e moradores que utilizam o transporte para sair do bairro.
Considere que a passagem dentro do bairro custa atualmente R$ 2,00 e a passagem para fora do bairro custa R$ 2,50. João não faz anotação de quantas passagens recebe de cada tipo, apenas realiza uma marcação para cada passageiro que embarca. Assim, no final do dia, possui apenas o total de passageiros transportados, bem como o valor total em dinheiro arrecadado.
Entretanto, João precisa saber quantos passageiros transportou no último domingo em cada modalidade, pois ele gasta muito combustível ao sair do bairro e quer saber se o número de passageiros que transporta compensa a saída, ou se é melhor que no próximo domingo ele fique apenas dentro do bairro (o que também é uma possibilidade dentro de sua linha).
Ao observar o faturamento do último domingo, João percebeu que transportou 51 passageiros, e arrecadou R$ 116,00 em passagens. E ficou

a dúvida: quantos passageiros ele transportou em cada uma das modalidades?"

Introduzir a seguinte situação – problema para a montagem do sistema em linguagem algébrica :

" Um terreno de 8000 m^2 deve ser dividido em dois lotes. O lote maior deverá ter 1000 m^2 a mais que o lote menor. Calcule a área que cada um deverá ter."

Resolução: Sendo x e y, respectivamente, as áreas destinadas ao lote maior e o lote menor do terreno, teremos um sistema de duas equações com duas incógnitas:

$$\begin{cases} x + y = 8000 \\ x = y + 1000 \end{cases}$$

Mostrar que as equações individuais admitiriam infinitas soluções, porém as duas juntas, formando um sistema de equações, neste caso, apresentarão uma única solução.

Há casos de um sistema não possuir solução ou infinitas soluções, como veremos mais adiante.

<u>Equações Lineares</u>

Denomina-se equação linear toda equação que pode ser escrita na forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

No qual:

$x_1, x_2, ..., x_n$ são as incónitas

$a_1, a_2, ..., a_n$ são números reais chamados coeficientes das incógnitas; b é o termo independente.

Obs.: As incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ geralmente aparecem x, y, z , ...

Exemplos:

- 3x + 2y = 18 (equação linear nas incógnitas x e y)
- x - 5y + z – 4t = 0 (eq. Linear nas incógnitas x,y,z e t)
- x^2 +y = 10 (**Não** é eq. Linear devido ao expoente da incógnita x)

Sistemas Lineares 2x2

Sistema de equações lineares 2x2 é um sistema composto de duas equações e duas incógnitas.

Com o auxilio do data-show, introduzir a seguinte situação para a montagem e revisão dos métodos de resolução de sistemas 2x2:

Observe os desenhos a seguir e responda o que se pede.

a) Invente um problema para a situação representada abaixo.


= R$ 14,00


= R$ 23,00

Fonte:Roteiro de ação 1, 4º bim , 2012, disponível http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/

b) Escreva um sistema para a situação. Lembre-se de indicar a letra que usou para a pizza e para o refrigerante

 _______________  _______________

Fonte:Roteiro de ação 1, 4º bim , 2012, disponível http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/

$$\begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_ \end{cases}$$

c) Resolver o sistema

Resolver o sistema utilizando os métodos da substituição e o da adição, comentando que a escolha é a que melhor convier a cada um.

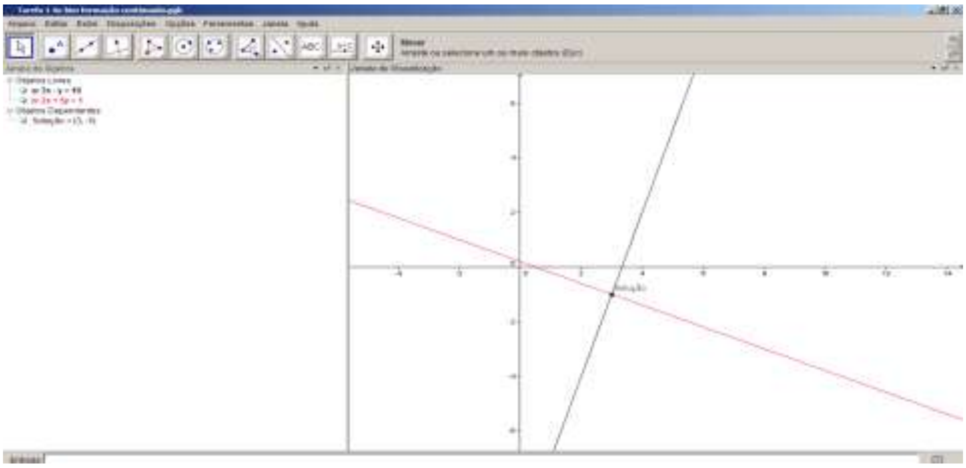
Interpretação geométrica dos sistemas lineares 2x2

Os pares de números reais que são soluções de uma equação linear com duas incógnitas determinam, no gráfico, uma reta (lembrar que reta é determinada por equação do 1º grau – linear).

A intersecção das duas retas das equações do sistema determina sua solução, se existir.

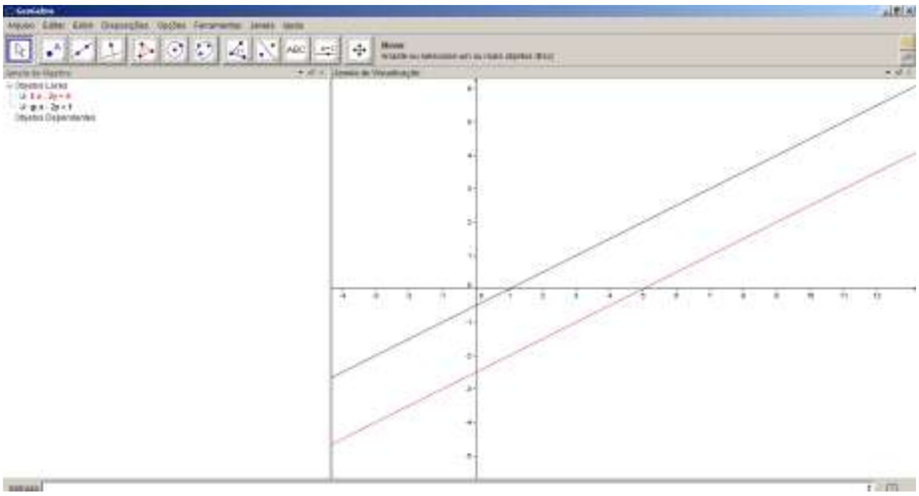
Exemplos: (utilizando o data-show, geogebra)

1) $\begin{cases} 3x - y = 10 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$



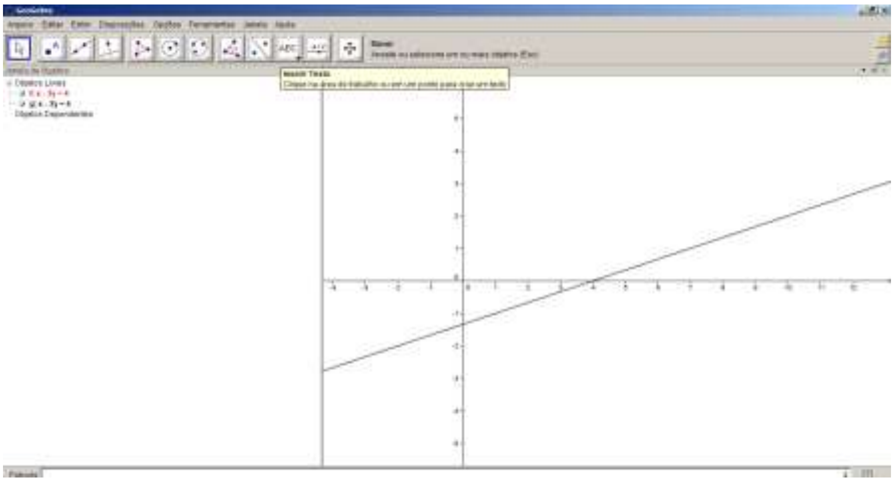
As retas concorrentes indicam que existe um único par que é solução do sistema (sistema possível e determinado)

2) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}$



As retas paralelas e distintas indicam que não existe par que seja solução do sistema (sistema impossível)

3) $\begin{cases} 2x - 6y = 8 \\ 3x - 9y = 12 \end{cases}$



As retas coincidentes indicam que existem infinitos pares que são soluções do sistema (sistema possível e indeterminado)

Exercícios de fixação: Livro didático, propostos em aula (da passagem e do lanche)

Exercício avaliativo

Resolva cada sistema linear 2x2 usando o método que lhe convier; classifique-os quanto ao número de soluções e faça sua representação gráfica em papel quadriculado.

a) $\begin{cases} 4x + 2y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = -12 \\ 5x + 6y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 10y = 15 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$

Atividade 2

- Habilidade relacionada: Identificação de situações que possam ser transformadas em equações lineares / sistemas de equações e montagem / resolução de sistemas de equações 3x3

- Pré – requisito: Multiplicação linear de equações

- Tempo de duração: 200 minutos

- Recursos utilizados: Data-show, livro didático, Winplot, lousa.

- Organização da turma: Individual ou dupla

- Objetivos: relacionar problemas cotidianos com resolução de sistemas

- Metodologia: Apresentar em data-show o roteiro de ação 6, fazendo os alunos refletirem sobre a necessidade da montagem e resolução dos sistemas de equações.

"A ponte sobre o rio Tietê sofreu algumas avarias e, por isso, teve que ser interditada para reparos. Dessa forma, de modo provisório, a travessia passou a ser feita por meio de balsas. Suponha que você seja o dono de uma dessas balsas e que:
(i) você pode transportar, numa viagem, 12 carros iguais e mais 3 caminhões (vazios) iguais. Com isso, a carga transportada é 5000 kg menor que a carga máxima suportável pela balsa;
(ii) mas você não pode colocar outro caminhão igual, pois a carga máxima suportável seria ultrapassada em 3000kg. No entanto, se você retirar um carro, esse caminhão a mais poderia ser colocado, preenchendo exatamente a carga máxima suportável.
Numa viagem de volta pretende-se transportar 4 daqueles caminhões, carregados com 10000 Kg de areia cada um. Será possível transportá-los em uma única viagem?

Obs.: Solicitar a montagem do sistema pelos aluno

Para a resolução de problemas como este, o melhor método é o de escalonamento de sistema lineares, para isso vamos entender o que é escalonamento.

Escalonamento de sistemas lineares

Considerando o sistema genérico mxn, dizemos que ele está escalonado quando a matriz dos coeficientes tiver, em cada uma das suas linhas, o primeiro elemento não nulo situado a esquerda do primeiro elemento não nulo da linha seguinte. Além disso, linhas com todos os elementos nulos devem estar abaixo de todas as outras.

Ex. de sistemas escalonados:

$$\begin{cases} x - 2y + 5z = 7 \\ \quad 3y + 2z = 1 \\ \qquad 4z = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y + 7z = 11 \\ \quad 4y + 5z = -4 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 3x + 2y + 7z = 11 \\ \quad 4y + 5z = -4 \\ \qquad 0z = 0 \end{cases}$$

Nem todo sistema já aparecerá escalonado. Isso se explica no próximo passo.

Processo para escalonamento de um sistema linear

Quando um sistema não está escalonado, podemos obter um sistema equivalente a ele, que esteja escalonado, por meio de algumas operações elementares. Para transformar um sistema não-escalonado num sistema equivalente escalonado, alguns procedimentos podem ser feitos:

- Podemos trocar as posições das equações. Exemplo:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x + 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4y = 1 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$$

- Podemos multiplicar todos os termos de uma equação pelo mesmo número real diferente de zero:

$$3x - y + z = 5 \underset{(\times 2)}{\Rightarrow} 6x - 2y + 2z = 10$$

- Podemos multiplicar os dois membros de uma equação por um mesmo número real diferente de zero e somar o resultado aos membros correspondentes da outra equação. Exemplo:

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 7 & .(-3) \\ 3x - 5y + 9z = 25 & \hookleftarrow + \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 4z = 7 \\ \quad y - 3z = 4 \end{cases}$$

- Se no processo de escalonamento obtivermos uma equação com todos os coeficientes nulos e o termo independente diferente de zero, esta equação é suficiente para afirmar que o sistema é impossível, isto é, tem $S = \varnothing$.

$0x + 0y + 0z = 7 \Rightarrow S = \varnothing$

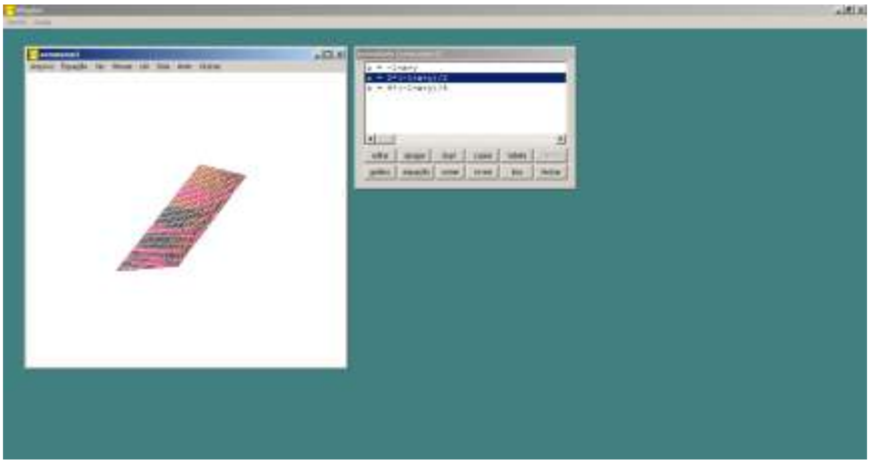
Para Reflerir:
É conveniente que o 1º coeficiente da equação que vai ser multiplicada seja 1.

<u>Interpretação gráfica de um sistema 3x3</u>

Fazendo uso do software Winplot, montaremos algumas soluções para que se possa ver suas possíveis soluções e fazermos uma associação com o tipo de sistema:

1ª possibilidade: os três coincidem

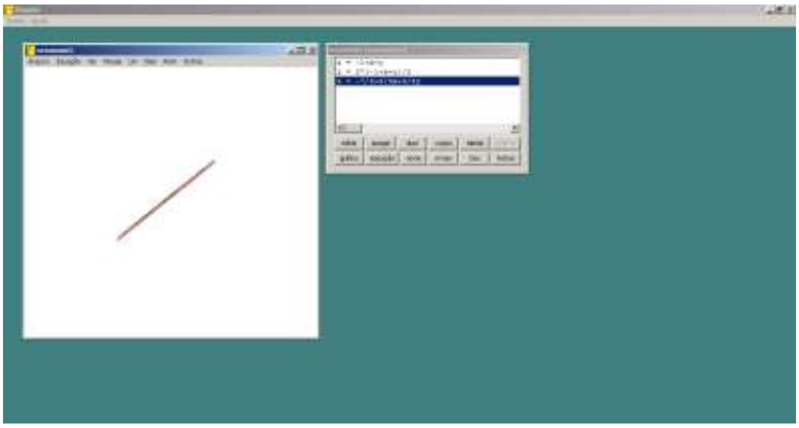
$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 2 \\ 4x + 4y - 4z = 4 \end{cases}$$



Neste caso, há infinitas soluções para o sistema.

2ª possibilidade: dois planos coincidem e o terceiro é paralelo a eles.

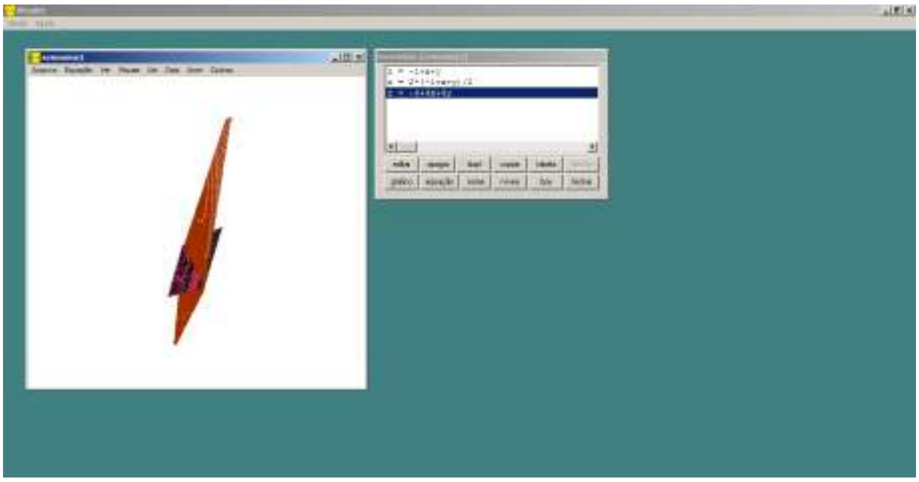
$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=2 \\ 4x+4y-4z=7 \end{cases}$$



Neste caso, o sistema não tem solução

3ª possibilidade: dois planos coincidem e o terceiro os intersecta segundo uma reta.

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=2 \\ 4x+4y-z=4 \end{cases}$$



Neste caso o sistema possui infinitas soluções, que satisfaça a reta y = 1-x

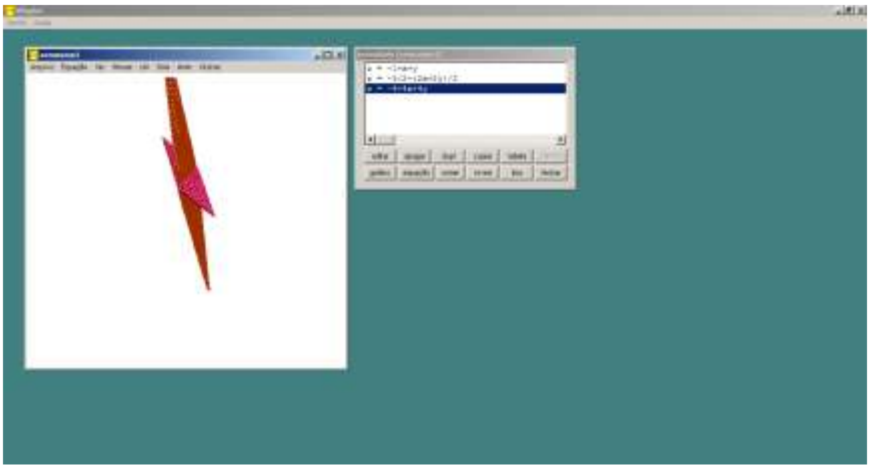
4ª possibilidade: os planos são paralelos dois a dois.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 3 \\ 4x + 4y - 4z = 7 \end{cases}$$

Neste caso, o sistema não tem solução

5ª possibilidade: dois planos paralelos e o outro os intersecta segundo retas paralelas.

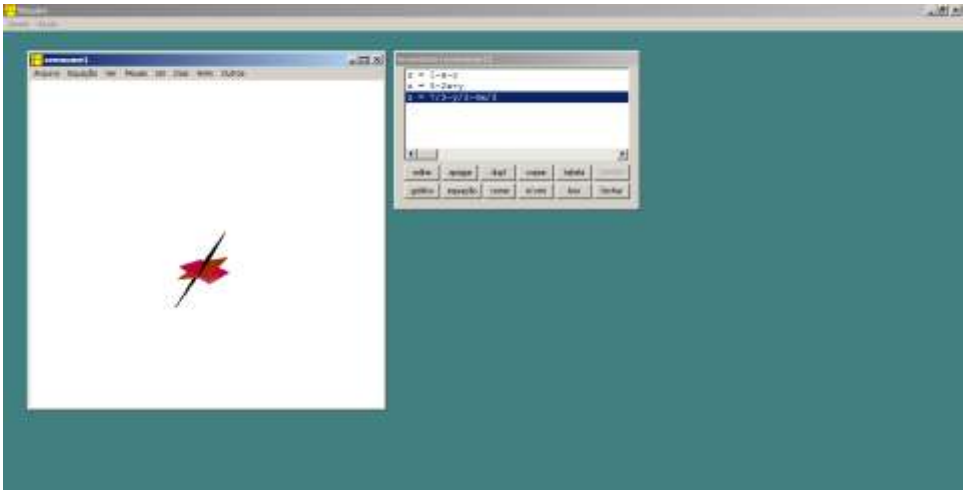
$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 3 \\ 4x + 4y - z = 4 \end{cases}$$



Neste caso, o sistema é impossível

6ª possibilidade: os três planos são distintos e tem uma reta em comum.

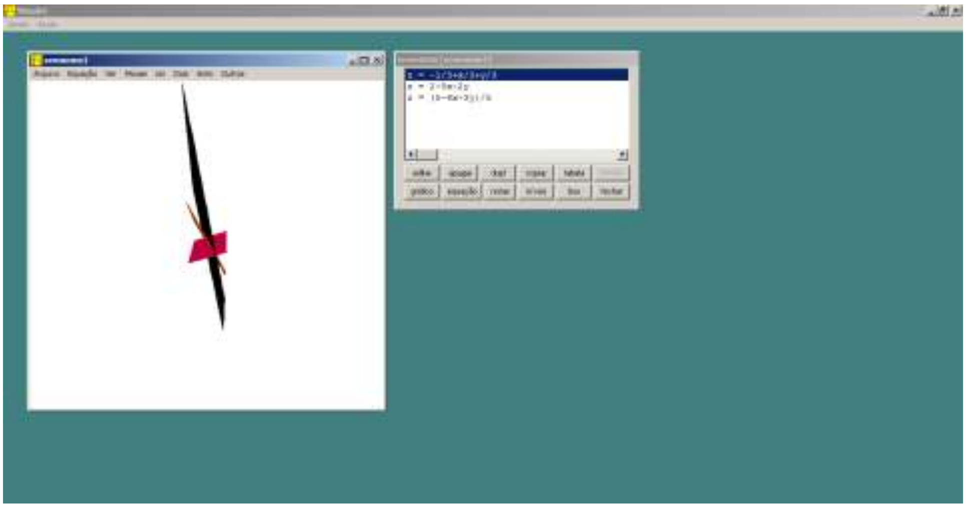
$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=5 \\ 4x+y+3z=7 \end{cases}$$



Neste caso, o sistema tem infinitas soluções que satisfaçam as equações $Z=\dfrac{6-3x}{2} \quad e \quad Y=\dfrac{-4+x}{2}$

7ª possibilidade: os três planos se intersectam, dois a dois, segundo retas paralelas umas as outras.

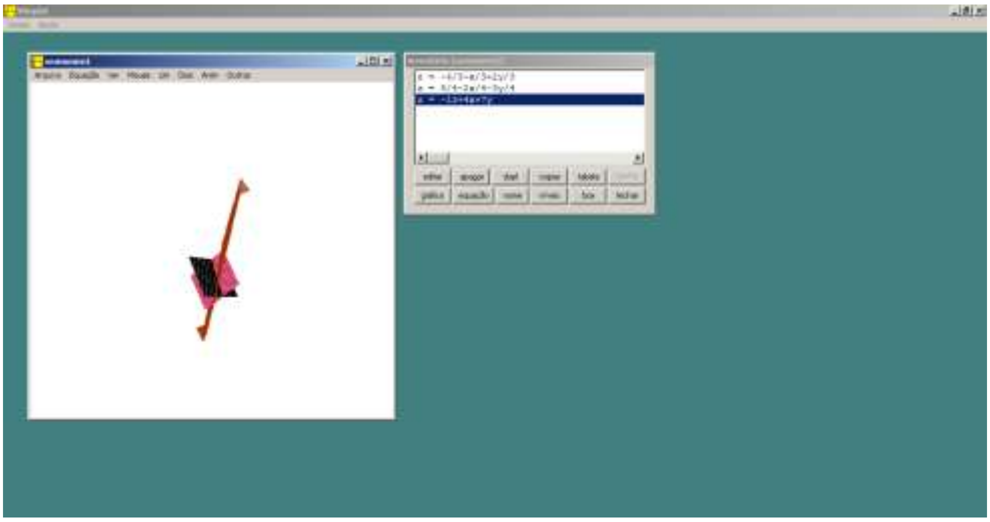
$$\begin{cases} x+y-3z=1 \\ 5x+2y+z=2 \\ 9x+3y+5z=5 \end{cases}$$



Neste caso, o sistema é impossível

8ª possibilidade: os três planos tem um único ponto em comum.

$$\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 2x+3y+4z=5 \\ 4x+7y-z=13 \end{cases}$$



Neste caso, o sistema tem solução única.

Exercícios de fixação: problema da travessia (inicio da atividade) e do livro didático.

Exercício avaliativo:

Escalone e resolva (se possível) os sistemas lineares abaixo:

a) $\begin{cases} x+2y+4z=0 \\ 2x+3y-z=0 \\ x-14z=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 3x-3y+z=8 \\ 2y+z=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \\ 3x+3y=8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+3y+2z=5 \end{cases}$

Fonte: Matemática-contextos e aplicações (Luiz Robert, Dante, 2003, pág:192 a 208).

Avaliação

A avaliação é um instrumento onde professor e aluno podem estar refletindo sobre o conteúdo abordado no bimestre. Sendo assim, ela ocorrerá de maneira que o aluno possa construir o conhecimento a cada etapa do conteúdo, através de exercícios avaliativos, após a introdução de cada assunto pertinente (máximo de 15 minutos/aula).

Após toda a introdução necessária, aplicaríamos uma avaliação individual escrita (com duração de 100 minutos), onde estaríamos colocando em prática todo assunto visto, dando ênfase à questões nos moldes do Saerjinho.

Considerações Finais

Vale ressaltar que todo o plano de trabalho foi desenvolvido para aliar conceito com a prática, sempre com o objetivo que o aluno possa ter uma visão de aplicabilidade aos conceitos estudados.

Obviamente, estando aberto a novos métodos e práticas relevantes para o acréscimo de tais desenvolvimentos.

Referências

- Dante, L.R. **Matemática-contextos e aplicações**, São Paulo: Ática, 2003 – pág.192 a pág.208.
- Roteiros de ação – Sistemas Lineares – Curso de Aperfeiçoamento em Matemática oferecido por CECIERJ referente ao 2º ano do Ensino Medio – 4º bim – 2012, http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ acessado em Outubro/2012.
- Winplot
- Geogebra