Patrícia Furtado da Rosa Feital da Silva

Números Complexos

Trabalho apresentado ao Curso de Formação Continuada
da Fundação CECIERJ – Consórcio CEDERJ.
Orientadora: Maria Cláudia Padilha Tostes (Tutora)
Grupo 2
3ª série do ensino médio.

Seropédica
2013

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por objetivo apresentar o Conjunto dos Números Complexos aos alunos, de maneira que a construção dos conceitos, propiciem uma aprendizagem eficaz. Para iniciar farei uma abordagem histórica do surgimento desses números e falarei de sua aplicabilidade em alguns campos da engenharia.

Para começar a abordagem histórica utilizarei o texto: "A história conta" que abre o capítulo sobre os números complexos do livro Matemática Aula por Aula (páginas 117 e 118). A partir da reflexão sobre o texto, falaremos da importância da unidade imaginária para facilitar os cálculos das raízes de índice par de números negativos.

Depois destas reflexões iniciais, utilizarei os Roteiros de Ação para apresentar algumas atividades com o GeoGebra. Inicialmente utilizarei as atividades que permitem notar a ausência de raízes reais, depois apresentarei a representação algébrica dos complexos e para finalizar trabalharei as operações com os números complexos na forma algébrica. Como é um conteúdo extenso irei dividi-lo em dois momentos de 150 minutos cada, que serão apresentados a seguir:

2. DESENVOLVIMENTO

O Conjunto dos Números Complexos e a Forma Algébrica

Pré-requisitos: Operações elementares com números reais; identificação de raízes de uma função a partir da sua representação gráfica; determinação das raízes de uma função a partir da sua representação algébrica.

Tempo de Duração: 150 minutos

Recursos: Computador com o GeoGebra instalado e um data-show, folhas para registrar as atividades.

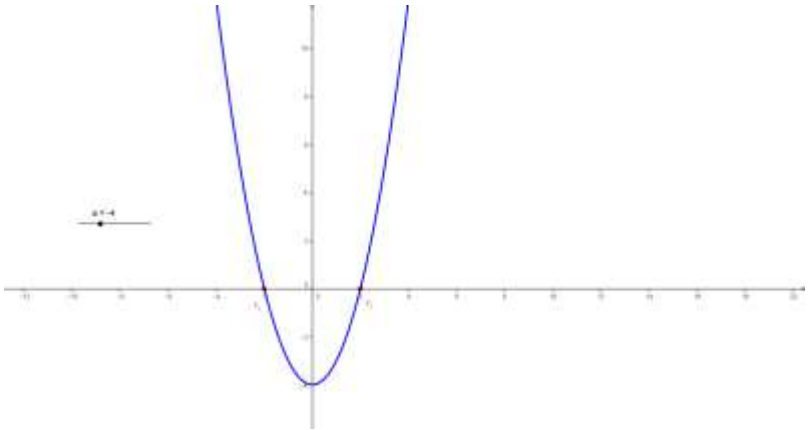
Organização da Turma: Os alunos formarão duplas ou trios.

Objetivos:

- Reconhecer os números complexos como mais uma ferramenta matemática;
- Identificar a representação algébrica dos números complexos e sua representação gráfica.

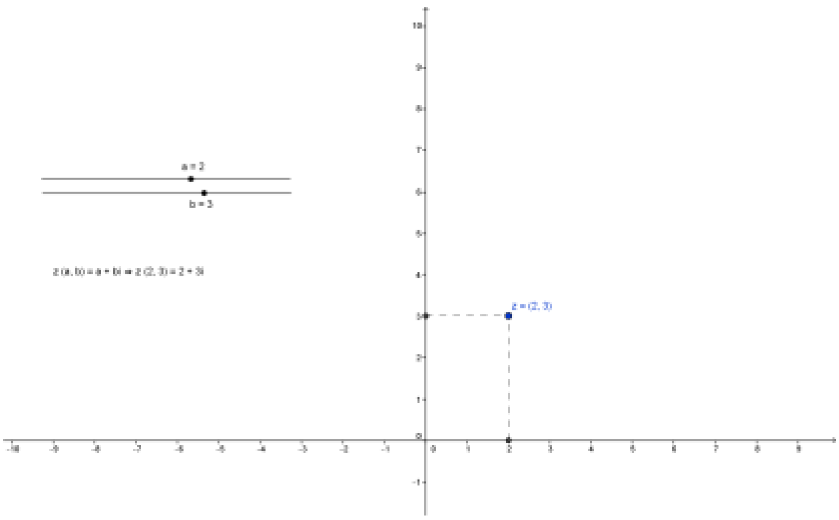
Metodologia:

Após a leitura do texto “A história conta”[1] pedirei que os alunos falem sobre o texto, nesse momento mostrarei a tela do GeoGebra que se encontra no arquivo A1R1.



Nesse momento ao mover o cursor do GeoGebra instigarei nos alunos a necessidade da representação das raízes imaginárias das equações, solicitando que registrem suas dúvidas e conclusões.

Chegou então a hora de abrir o arquivo A1R2 e apresentar a representação algébrica dos complexos no Plano de Argand-Gaus*. Nesta tela farei algumas perguntas aos alunos e solicitarei o registro dessas conclusões.



Perguntas:

1. Para começar, você deve mover os parâmetros a e b e observar o que acontece com o ponto z.
2. Você consegue marcar qualquer ponto do plano alterando os parâmetros? Troque ideias com seus colegas.
3. Você acha que o ponto z indicado no plano, pode representar um número complexo? Por quê? Veja o que seus colegas pensam a respeito e tentem chegar a uma conclusão.
4. Diga o que cada um dos eixos do Plano de Argand-Gauss representa.

* Quando o plano é visto como um plano no qual podemos representar os números complexos, ele é chamado Plano de Argand-Gaus, em homenagem a dois matemáticos importantes não apenas no estudo dos números complexos, mas, sobretudo por terem se dedicado à representação desses números de maneira geométrica.

Descritores Associados:

No currículo mínimo:

- Identificar e conceituar a unidade imaginária.
- Identificar o conjunto dos números complexos e representar um número complexo na forma algébrica.

Na matriz do saerj/saerjinho:

H46 - Reconhecer números reais em diferentes contextos.

H36 – Efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica (para calcular é preciso saber representar).

3. AVALIAÇÃO:

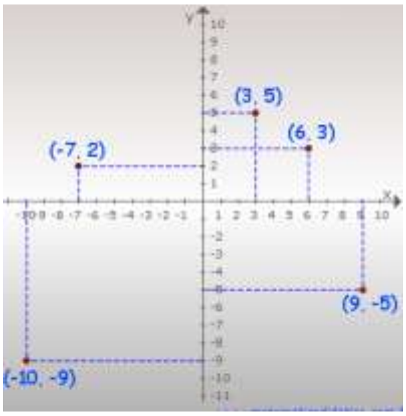
Os alunos serão avaliados por seu envolvimento na dinâmica da aula e participação nas discussões.

Além disso, faremos exercícios do livro didático a medida que os conceitos forem construídos, os alunos também farão questões adaptadas de provas anteriores do saerjinho, visando a preparação para as mesmas.

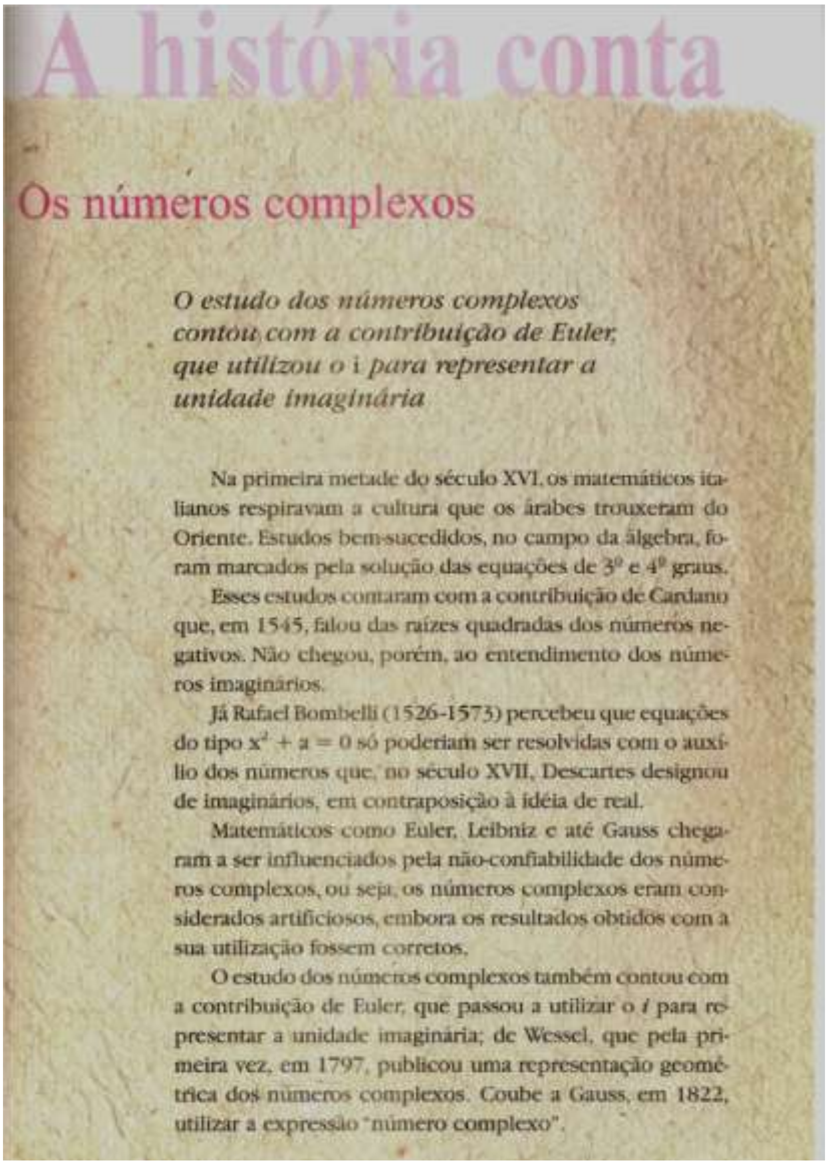
Questões:

1. Determinar as raízes da equação $x^2 - 2x + 2 = 0$, utilizando números complexos:
2. Obtenha o valor de x, de modo que $z = 6 + (2x – 4)$ seja real:
3. Dados os números complexos $z_1 = 2 + 6i$ e $z_2 = a + bi$, sendo $z_1 = z_2$ determine o valor de a e de b:
4. Calcule o valor de y de modo que o número complexo $z = (6y + 30) + 2i$ seja um número imaginário puro:

5. Observe o plano a seguir e escreva a forma algébrica dos números complexos que nele aparecem:



[1] Texto:



A história conta

Os números complexos

O estudo dos números complexos contou com a contribuição de Euler, que utilizou o i para representar a unidade imaginária

Na primeira metade do século XVI, os matemáticos italianos respiravam a cultura que os árabes trouxeram do Oriente. Estudos bem-sucedidos, no campo da álgebra, foram marcados pela solução das equações de 3º e 4º graus.

Esses estudos contaram com a contribuição de Cardano que, em 1545, falou das raízes quadradas dos números negativos. Não chegou, porém, ao entendimento dos números imaginários.

Já Rafael Bombelli (1526-1573) percebeu que equações do tipo $x^2 + a = 0$ só poderiam ser resolvidas com o auxílio dos números que, no século XVII, Descartes designou de imaginários, em contraposição à idéia de real.

Matemáticos como Euler, Leibniz e até Gauss chegaram a ser influenciados pela não-confiabilidade dos números complexos, ou seja, os números complexos eram considerados artificiosos, embora os resultados obtidos com a sua utilização fossem corretos.

O estudo dos números complexos também contou com a contribuição de Euler, que passou a utilizar o *i* para representar a unidade imaginária; de Wessel, que pela primeira vez, em 1797, publicou uma representação geométrica dos números complexos. Coube a Gauss, em 1822, utilizar a expressão "número complexo".

Outro matemático que contribuiu para o aperfeiçoamento desse estudo foi o francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Estudou na École Polytechnique, foi engenheiro militar e professor. Em sua época, foi um dos matemáticos que mais obras escritas deixou. Sua produção não foi interrompida nem mesmo no período em que partiu para o exílio, juntamente com rei Carlos X, como conseqüência da Revolução de 1830, na França.

Os primeiros anos de atividade científica desenvolvidos por Cauchy foram dedicados às ciências físicas, principalmente em trabalhos sobre a propagação de ondas ópticas, mecânica celeste e a teoria matemática da elasticidade. Dentro da Matemática, realizou estudos em tantos campos que chegou a ser comparado a Gauss. No estudo de números complexos, utilizou, em 1821, os termos módulo e conjugado.

Cauchy (1789-1857) viveu todas as influências da Revolução Francesa, que era representada como um "sistema astronômico". O Sol, no centro, simbolizava a Constituição, que garantia a liberdade e igualdade.

Pesquise mais sobre o assunto

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo, Edgar Blücher, 1974.

CARAÇA, B. J. *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa, Sá da Costa, 1978.

________. *Lições de álgebra e análise*. Lisboa, Sá da Costa, 1959.

RADICE, L. L. *A Matemática de Pitágoras a Newton*. Lisboa, Edições 70, 1971.

Operações com Números Complexos

Pré-requisitos: Operações elementares com números reais; compreensão sobre as representações dos números complexos.

Tempo de Duração: 150 minutos

Recursos: Computador e um data-show, folhas para registrar as atividades.

Organização da Turma: Os alunos formarão duplas ou trios.

Objetivos:

- Efetuar algebricamente operações com números complexos.

Metodologia:

Para trabalhar as quatro operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) e as potências de i seguirei o Roteiro de Ação 3 até a página 14, que serão descritas a seguir e apresentadas aos alunos no data-show . Cada aluno receberá fichas para registro das atividades (propostas no roteiro) e suas conclusões sobre a construção dos conceitos.

Atividade 01

Soma e Subtração de Números Complexos

Nesta atividade, você terá contato com as operações de soma e subtração envolvendo números complexos. Na verdade, você descobrirá que elas muito se assemelham a outros conceitos já estudados anteriormente. Preparado?

Por exemplo, como faríamos a soma dos números complexos $z = 2$ e $w = 4$?

Uma vez que todo número real é um número complexo, tanto faz somarmos complexos que possuam apenas a parte real, apenas a parte imaginária, ou ambas.

Um cuidado deve ser tomado: a unidade imaginária i distingue a parte real da parte imaginária e, sendo cada parte de natureza distinta, não podemos simplesmente uni-las. Assim, o procedimento de soma de dois números complexos se assemelha ao de soma de expressões algébricas da forma $ax + b$.

Sob esta ótica, temos, por exemplo:

$z = 2 + 3i$; $w = 5 + 2i$

$z + w = 2 + 3i + 5 + 2i = (2 + 5) + (3 + 2)i = 7 + 5i$

1. Agora efetue as somas $z + w$ abaixo:

a. $z = 3$; $w = 5$

b. $z = 2i$; $w = 4i$

c. $z = 5$; $w = 3i$

d. $z = 2 + 3i$; $w = 3$

e. $z = 3 + 5i$; $w = 3 + 2i$

As respostas esperadas são: a) 8; b) 6i; c) 5 + 3i; d) 5 + 3i; e) 6 + 7i

Caso os alunos apresentem dificuldade, relembre com a turma o procedimento de soma algébrica de expressões da forma ax + b, onde devemos somar os termos semelhantes.

Como você pôde perceber, somar números complexos pode ser tratado de modo semelhante à soma de expressões algébricas. Na verdade, descobriremos mais à frente que a relação entre estes dois assuntos é ainda mais estreita.

Para o caso da subtração de números complexos, mantendo a relação citada acima, basta a troca de sinal da parte real e da parte imaginária, seguindo com o agrupamento e soma dos termos semelhantes como anteriormente.

Por exemplo:

$z = 5 + 2i$; $w = 2 + i$

$z - w = (5 + 2i) - (2 + i) = 5 + 2i - 2 - i = (5 - 2) + (2 - 1)i = 3 + i$

2. Agora, efetue z – w nos casos abaixo:

a. $z = 6 + 3i$; $w = 2 – 4i$

b. $z = -2 + 4i$; $w = 3 – 5i$

c. $z = 3 – 5i$; $w = -2 + 4i$

As respostas esperadas são: a) 4 + 7i; b) -5 + 9i; c) 5 – 9i.

Neste ponto, é necessária atenção para possíveis equívocos na troca de sinal. Os itens b e c estão com z e w invertidos. Isto nos mostra que, assim como acontece com os números reais, a subtração não é comutativa, isto é, a ordem dos fatores altera a diferença. É importante comentar isso com a turma.

Como vimos, o procedimento para soma e subtração de números complexos pode ser resumido a operar com a parte real e com a parte imaginária separadamente e, em seguida, juntar as partes para formar um novo número complexo.

As atividades que você acabou de realizar levaram em conta apenas valores inteiros para as partes real e imaginária dos números complexos. Mas os números complexos são muito mais que isso!

Na realidade, os valores podem ser quaisquer números reais e, para realizar a soma/subtração em cada caso, basta seguir o mesmo procedimento que você realizou anteriormente, só que agora com quaisquer complexos.

3. Tente agora efetuar as seguintes operações:

a. $z = 1,5 + 5,4i$; $w = -3,1 - 1,2i$. Sendo assim, determine $z + w$.

b. $z = -\pi + 5,17i$; $w = 8,9 + 3,6i$. Sendo assim, determine $w - z$.

Dica: Tente fazer usando $\pi = 3,14$. Depois, calcule usando a representação π, sem aproximações.

c. $z = 44,3 - 1,8i$; $w = 4,2 + 2,7i$; $v = -i$. Sendo assim, determine $z - w + v$.

Pronto! Agora você já é capaz de realizar somas e subtrações entre números complexos quaisquer!

Vamos adiante?

O resultado esperado é: a) $z + w = -1,6 + 4,2\,i$; b) $w - z = 12,04 - 1,57i$ ou $w - z = 8,9 + \pi - 1,57i$; c) $z - w + v = 40,1 - 5,5i$.

Nesse caso, esperamos que os alunos percebam que as partes reais e imaginárias podem ser compostas por quaisquer números reais, inclusive, os irracionais!

Atividade 02

Multiplicação e Divisão

Assim como fizemos na soma/subtração, podemos considerar a multiplicação e a divisão como uma operação envolvendo a forma algébrica, da mesma forma que fazemos com as expressões algébricas.

E mais: você lembra da “racionalização do denominador de uma fração”? Esse é um procedimento bastante efetuado no estudo de frações envolvendo expressões algébricas e números irracionais. Será utilizado aqui também!

1. Inicialmente, tente efetuar a operação $z * w$, com $z = 3 + 2i$ e $w = 4$

Resposta esperada: $12 + 8i$.

Atenção para possíveis equívocos na operação, como multiplicar apenas a parte real e não a parte imaginária.

2. Agora vamos complicar um pouco. Efetue a operação $z * w$, com $z = 2 + 4i$ e $w = 3i$. Não se esqueça que, **como $i = \sqrt{-1}$, podemos considerar que $i^2 = -1$.**

Resposta esperada: $-12 + 6i$.

Certifique-se se os alunos compreendem que 4i * 3i = 4*3*i*i = 4*3*i2 = 12*(-1) = -12.

3. Efetue z * w, com z = 2 – 3i e w = 5 – i.

O resultado esperado é 7 – 16i.

A partir deste ponto, você já deve estar em condições de efetuar o produto entre dois complexos na forma algébrica. Mas, e a divisão.

4. Bom tente efetuar a seguinte divisão: z : w, com z = 6 – 4i e w = 2.

Resposta esperada: 3 – 2i.

Atenção para possíveis equívocos na operação, como dividir apenas a parte real, e não a parte imaginária.

Na divisão onde o divisor é um número real puro, basta dividir cada termo do dividendo pelo divisor. Agora efetue:

5. z : w, com z = -9i e w = 3i.

6. z : w, com z = 6 – 4i e w = 2i.

No item 5, eles provavelmente farão a "simplificação" de i, obtendo -9/3 = -3.

Já no item 6, provavelmente o aluno terá algumas dúvidas. Quanto é 6 dividido por 2i? É permitido separar os termos quando a divisão envolve números complexos?

Explique a eles que sim, eles poderiam separar neste caso os termos 6 e -4i, mas que isto não vai ajudá-los quando houver uma soma também no denominador.

Oriente-os para multiplicar em cima e em baixo por i, assim como fazemos com as raízes reais.

O resultado esperado é -2 -3i.

Para efetuar uma divisão onde o divisor possui parte imaginária, faremos uso de um artifício que você conheceu durante o estudo de números irracionais: a racionalização do denominador.

A divisão de números complexos na forma a + bi pode ser vista do mesmo modo que uma divisão de números irracionais na forma de radicais. Neste caso, quem executa a tarefa de eliminar a parte imaginária é o conjugado do número complexo.

Procure efetuar a seguinte divisão, utilizando esta ideia:

7. z : w, com z = 4 – 3i e w = 2 + i

Segue o cálculo completo e a resposta esperada:

$$\frac{4-3i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}=\frac{(4-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{8-4i-6i-3}{2^2-i^2}=\frac{5-10i}{4+1}=\frac{5-10i}{5}=1-2i$$

Com isto você já tem condições de trabalhar com as 4 operações básicas dentro do conjunto dos números complexos.

Mas antes, você deve saber como trabalhar com as potências da unidade imaginária.

Responda a sequência abaixo:

8. Qual o valor de i^2?

9. Você pode, a partir do valor de i^2, obter o valor de i^3? Como?

10. Agora que você tem o valor de i^3, é capaz de calcular i^4? Como?

11. O que aconteceu no momento em que calculou o valor de i^4? Você consegue explicar o motivo?

12. Obtenha os valores de i^5, i^6, i^7 e i^8.

Respostas esperadas: 8) -1; 9) Sim, pois $i^3 = i^2 * i = -1 * i = -i$;

10) Sim, pois $i^4 = i^3 * i = -i * i = - i^2 = - (-1) = 1$; 11) i^4 é igual a $i^0 = 1$.

Ver comentário a seguir. 12) $i^5 = i$, $i^6 = -1$, $i^7 = -i$, $i^8 = 1$.

Neste ponto, o aluno terá notado que ao elevar i á quarta potência, o resultado é 1, um número real, e elemento neutro da multiplicação. Enfatize isto, e mostre ainda a eles que, como $i^4 = 1$, então só resta a $i^5 = i^4*i$ ser igual a i. Ao obter os valores de i^6, i^7 e i^8, o aluno começará a perceber que o resultado das potências de i é cíclico, isto é, de tempos em tempos ele "volta ao início", e a sequência de resultados se repete.

Notou algo "estranho"? Acontece que as potências de i formam uma sequência que percorre um ciclo de valores: i, -1, -i, 1. Com isto, para saber o valor de qualquer potência de i, basta verificar em que ponto da sequência a potência desejada se encontra.

Vamos verificar?

13. Calcule i^{10}.

Você já viu que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, etc. Se continuarmos com a sequência, logo notamos que i^{10} deve ser igual a -1.

Mas e se quiséssemos o valor de i^{135}? É necessário encontrar um modo de não precisar escrever a sequência completa todas as vezes... E há um modo!!

Verificando os resultados das potências de i, podemos notar uma relação entre os expoentes e os valores dos resultados.

14. Você consegue visualizar qual é esta relação? Explique a seguir.

Uma dica: esta relação refere-se ao "tempo" que leva até que um valor seja repetido.

O aluno deve compreender aqui que, de quatro em quatro expoentes os valores voltam a se repetir. Assim, $i^5 = i$; $i^6 = i^2 = -1$; $i^7 = i^3 = -i$; $i^8 = i^4 = 1$; etc.

Levarei os alunos a perceberem que a menor potência de i à qual uma potência maior é equivalente é aquela dada pelo resto da divisão do expoente por 4. Ou seja:

$i^k = i^r$, onde r é o resto da divisão de k por 4.

Logicamente, $r \in \{0, 1, 2, 3\}$

15. Encontre o valor das seguintes potências de i:

a) i^{21}

b) i^{87}

c) i^{221}

d) i^{1024}

Respostas esperadas: i; -i; i; 1.

Descritores Associados:
No currículo mínimo:
- Calcular expressões envolvendo as operações com números complexos na forma algébrica.
- Calcular potências de expoente inteiro da unidade imaginária.

Na matriz do saerj/saerjinho:
H36 – Efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica.

3. AVALIAÇÃO:

Os alunos serão avaliados por seu envolvimento na dinâmica da aula e participação nas discussões;

Além disso, faremos exercícios do livro didático a medida que os conceitos forem construídos, os alunos também farão questões adaptadas de provas anteriores do saerjinho, visando a preparação para as mesmas.

Questões:

1. Efetue as seguintes operações:
   a. (3 – 2i) + (1 + 3i) =
   b. (2 – 4i) – (2 + 4i) =
   c. (12 – 3i) – (1 + i) + (8 + 7i) =
   d. (6 + i) . (6 – i) =
   e. (1 + 2i) . (5 – i) =

2. Calcule:
   a. $i^{12} =$
   b. $i^{19} =$
   c. $i^{1601} =$
   d. $i^{42} =$

3. Efetue as seguintes divisões:
   a. $\frac{1+2i}{1+3i} =$
   b. $\frac{2+i}{4+2i} =$
   c. $\frac{4+3i}{4-3i} =$

4. (Saerjinho – 3ºB/2012) Considere os números complexos z = 3 + 2i e w = 5 – 3i. Qual é o número complexo que representa a soma z + w?

5. (Saerjinho – 3ºB/2012) Determine o quociente $\frac{5+2i}{3-i}$ na forma a + bi:

6. (Saerjinho – 3ºB/2012) Considere os números complexos z = 4 + 5i e w = - 2 + 6i. Qual é o número complexo que representa a diferença z - w ?

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BARRETO FILHO, Benigno e SILVA, Cláudio Xavier da. Matemática Aula por Aula. São Paulo: FTD, 2003.

- Roteiros de Ação 1, 2 e 3 – Números Complexos 3ª série | 3º Bimestre | 1º Campo Conceitual.
  Disponível em: http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=111
  Acesso em: 09 ago 2013.

- CAED/SAERJINHO. Avaliação Diagnóstica 3º Bimestre - Língua Portuguesa e Matemática. 3ª série do Ensino Médio. 2012.