Formação Continuada em MATEMÁTICA

Fundação Cecierj/Consórcio CEDERJ

Matemática 3° ano - 4° Bimestre/ 2012

Avaliação da Implementação do Plano de Trabalho I

Polinômios e Equações Polinomiais

Tarefa 3: Avaliação da Implementação do Plano de Trabalho I

Cursista: Maurício Jorge Campos Gonçalves

Tutor: Paulo Roberto Castor Maciel

1 – Pontos Positivos

O plano de trabalho foi bem estruturado e bem organizado. Eu destaquei os pontos principais do conteúdo polinômios e equações polinomiais e enfatizei esses pontos para os alunos. Dúvidas foram esclarecidas durante as explicações para o entendimento do conteúdo. A ficha resumo das matérias auxiliaram bastante os alunos, pois eles conseguiram generalizar o conteúdo da matéria e identificar os pontos mais importantes para o entendimento da mesma. As aulas práticas no laboratório de informática por meio do software geogebra foram atrativas e auxiliaram e muito os alunos na aprendizagem dos conteúdos.

2 – Pontos Negativos

O que poderia ser feito para melhorar ainda mais o plano de trabalho, é mudar as fontes de pesquisa, colocando estas fontes de acordo com as normas da ABNT.

3 – Alterações

A alteração que pode ser feita para melhorar ainda mais o plano de trabalho colocar as fontes de pesquisa de acordo com as normas da ABNT.

4 – Impressões dos alunos

Os alunos tiveram uma boa impressão do plano, pois as aulas foram atrativas pelo fato da ficha resumo identificar os pontos principais e mais importantes do conteúdo. Isso facilitou o entendimento da matéria, de modo que o aluno pode compreender o conteúdo de forma clara e objetiva. Por exemplo, com relação ao Teorema do Resto, Teorema D'Alembert e o Dispositivo Prático de Briot-Ruffini, eles entenderam que o Teorema D'Alembert é uma consequência do Teorema do Resto e isso facilitou a prática de exercícios. Com relação ao Dispositivo Prático de Briot-Ruffini eles viram que é muito mais fácil e rápido dividir dois polinômios quaisquer com o auxílio deste dispositivo.

Formação Cotinuada em MATEMÁTICA

Fundação Cecierj/Consórcio CEDERJ

Matemática 3° ano - 3° Bimestre/ 2012

PLANO DE TRABALHO

Polinômios e Equações Polinomiais

Tarefa 3: Avaliação da Implementação do Plano de Trabalho I

Cursista: Maurício Jorge Campos Gonçalves

Tutor: Paulo Roberto Castor Maciel

S u m á r i o

1 - Introdução

O objetivo deste plano de trabalho e permitir que os alunos percebam, através de assuntos do cotidiano, a utilização da Matemática para resolução de problemas. Transmitir o conhecimento sobre o conteúdo denominado “Polinômios e Equações Algébricas” fazendo, sempre que possível, com que os próprios alunos construam o conhecimento e enriqueçam sua “bagagem” através de atividades diferenciadas e exercícios práticos.

É comum a dificuldade por parte de muitos alunos concernentes a interpretação de enunciados e utilização de raciocínio lógico. Por isso, é extremamente importante mostrar em quais áreas da vida e/ou profissões o tema estudado é utilizado e mostrar que eles têm capacidade de aprender e não simplesmente “gravar” como se faz isso ou aquilo. Basta um pouquinho de boa vontade!

O assunto exige conhecimentos sobre valor numérico, no sentido do aluno desenvolver a expressão algébrica até achar o valor numérico atribuído . Identificar polinômio identicamente nulo, polinômios idênticos inclusive distinguir estes polinômios. Operar as quatro operações fundamentais com os polinômios e no caso da divisão   Método dos Coeficientes a Determinar, Divisão de Polinômios por Binômios do 1° grau, Teorema do Resto, Teorema D’Alembert. Nas equações algébricas Teorema Fundamental da Álgebra, Raízes Múltiplas , Raízes Complexas, Relações de Girard e Raízes Racionais.
Por isso, faz-se necessário revisar alguns temas ao longo do caminho, como por exemplo, valor numérico, raízes de uma equação algébrica do 1° ou 2° grau, identificar por meio da equação parâmetros que auxilia na determinação das raízes da equação etc

1 - Desenvolvimento

ATIVIDADE 1: Tipos de Polinômios, Valor numérico de um polinômio e Operações com polinômios

- Habilidade Relacionada: identificar o grau do polinômio, calcular o valor numérico de um polinômio e efetuar as quatro operações com os polinômios.

- Pré-requisitos: calcular o valor numérico de uma expressão algébrica e efetuar as quatro operações com polinômios.

- Tempo de duração: 300 minutos

- Recursos Educacionais Utilizados: Livro didático, quadro e caneta, RESUMO/EXPLICAÇÕES.

- Organização da Turma: Individual para a apresentação do conteúdo e dupla para realização dos exercícios de fixação.

- Objetivos: Efetuar as quatro operações com polinômios.

- Metodologia Adotada:

  Introduzir o tema mostrando o objetivo dos estudos que estão por vir. Utilizar um exercício da introdução do livro didático para mostrar os tipos de exercícios que podem ser resolvidos através do conteúdo que se desenrolará na primeira parte do bimestre.

  Ex: Determine m, n e p para que $P(x) = (m + n - 3)x^2 + (m - n - 1)x + n – p$ seja identicamente nulo.

  Nesta questão da introdução o aluno vai ver que é possível calcular valores de m, n e p de modo que o polinômio seja nulo.

Entregar para os alunos uma folha contendo um resumo da matéria apresentada. Nesta folha, será destacada :

1 – Grau de um polinômio, polinômio identicamente nulo e polinômios idênticos.
2 – Valor numérico de um polinômio.

1. Valor numérico de um polinômio, polinômio identicamente nulo e polinômios idênticos.

Um polinômio qualquer pode ser representado pela expressão:

$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$

A função polinomial será definida por:

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$

Com:
a_0 , a_1 , a_2, … , a_{n-1} e a_n são números complexos e $n \in N$.

a) Valor numérico de um polinômio

Se observarmos um polinômio qualquer $P(x) = 5x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 2$, para acharmos o seu valor numérico que é o valor de P(x), temos que ter um valor para a incógnita x.
Então, se dissermos que x = 2 o valor que encontrarmos para P(2) quando substituirmos x por 2 será o valor numérico do polinômio.

$P(2) = 5 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^3 + 2^2 - 2 + 2$

$P(2) = 5 \cdot 16 - 3 \cdot 8 + 4 - 2 + 2$

$P(2) = 80 - 24 + 4$

$P(2) = 56 + 4$

$P(2) = 60$

Concluímos que o valor numérico do polinômio $P(x) = 5x^4 – 3x^3 + x^2 – x + 2$, quando
$x = 2$ será **P(2) = 60**.

b) **Raiz ou zero do polinômio**

Se pegarmos um polinômio qualquer $P(x) = - 2x^3 + 5x^2 – x + 1 = 0$, a raiz dele será um número qualquer b se, somente se, o valor numérico do polinômio for zero quando
$x = b$.

Exemplo:

$P(x) = x^2 - 1$, para calcularmos o zero da função, devemos colocar $P(x) = 0$, então:

$x^2 - 1 = 0$
$x^2 = 1$
$x = + 1$ ou $- 1$

Concluímos que -1 e +1 é raiz do polinômio $P(x) = x^2 - 1$.

c) **Grau de um polinômio**

Um polinômio é formado por vários monômios separados por operações, então o grau de um polinômio corresponde ao monômio de maior grau. O único polinômio que não possui grau é o polinômio nulo $P(x) = 0$, por exemplo:

• $P(x) = x^3 - x^2 + 2x -3$ → temos 3 monômios que possuem grau, o que tem maior grau é x^3, então o polinômio tem o mesmo grau que ele.

$P(x) = x^3 - x^2 + 2x -3$ é do 3º grau.

• $P(x) = 5x^0 = 5 \rightarrow$ grau zero.

d) Polinômio identicamente nulo

Polinômio nulo é aquele cujo valor numérico é igual a zero para todo valor da variável x . Indicamos P º 0 (polinômio nulo) .
Para um polinômio P(x) ser um polinômio nulo é necessário e suficiente que todos os seus coeficientes sejam nulos (iguais a zero) .

e) Polinômios idênticos

São polinômios iguais . Se P e Q são polinômios idênticos , escrevemos P º Q . É óbvio que se dois polinômios são idênticos , então os seus coeficientes dos termos correspondentes são iguais .
A expressão P º Q é denominada identidade .

Exercício resolvido

Sendo $P(x) = Q(x) + x^2 + x + 1$ e sabendo que 2 é raiz de P(x) e 1 é raiz de Q(x) , calcule o valor de P(1) - Q(2) .

Solução:

Ora, se 2 é raiz de P(x), então sabemos que P(2) = 0 e se 1 é raiz de Q(x) então Q(1) = 0. Temos então substituindo x por 1 na expressão dada :

$P(1) = Q(1) + 1^2 + 1 + 1$
$P(1) = 0 + 1 + 1 + 1 = 3$. Então P(1) = 3.

Analogamente , poderemos escrever :

$Q(2) = Q(2) + 2^2 + 2 + 1$

$0 = Q(2) + 7$, logo Q(2) = -7.

Logo P(1) - Q(2) = 3 - (-7) = 3 + 7 = 10.
Resp: 10

Exercícios de Fixação

Questão 1

(MACK – SP) Calcule os valores de m, n e l para os quais o polinômio $p(x) = (2m - 1)x^3 - (5n - 2)x^2 + (3 - 2l)$ é nulo.

Questão 2

Determine o valor de a e b no polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + (b - 18)x + 1$, sabendo que 1 é raiz do polinômio e $p(2) = 25$.

Questão 3

Temos que a raiz do polinômio $p(x) = x^2 - mx + 6$ é igual a 6. Calcule o valor de m.

Questão 4

(MACK – SP) Determine $m \in R$ para que o polinômio $p(x) = (m - 4)x^3 + (m^2 - 16)x^2 + (m + 4)x + 4$ seja de grau 2.

Questão 5

Quais são os valores de a e b considerando $p(x) = -4x^3 + ax^2 + bx - 18$, onde 2 é raiz de $p(x)$ e $p(-1) = -18$.

Questão 6

(FAAP–SP)

Calcule os valores de a, b e c para que o polinômio $p(x) = a(x + c)^3 + b(x + d)$ seja idêntico a $p(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 14$.

Questão 7

Considerando que $p(x) = 2x^3 – kx^2 + 3x – 2k$, para que valores de k temos $p(2) = 4$?

Questão 8

(FEI – SP)

Sendo $p(x) = ax^2 + bx^3 + c$ e $q(x) = ax^3 – bx – c$, determine os coeficientes a, b e c, sabendo que $p(0) = 0$, $p(1) = 0$ e $q(1) = 2$.

ATIVIDADE 2 : Operações com Polinômios

- Habilidade Relacionada: efetuar as quatro operações com os polinômios e destacar na divisão o Método dos coeficientes a determinar, o Teorema do Resto, oTeorema D’Alembert e o Dispositivo prático de Briot-Ruffini.

- Pré-requisitos: efetuar as operações de adição,subtração, multiplicação com os polinômios e aplicar o Teorema do Resto, Teorema D’Alembert e o Dispositivo prático de Briot-Ruffini na divisão.

- Tempo de duração: 300 minutos

- Recursos Educacionais Utilizados: Livro didático, quadro e caneta, RESUMO/EXPLICAÇÕES.

- Organização da Turma: Individual para a apresentação do conteúdo e dupla para realização dos exercícios de fixação.

- Objetivos: calcular as quatro operações com os polinômios e aplicar na divisão o Método dos coeficientes a determinar, Teorema do Resto, Teorema D'Alembert e o Dispositivo prático de Briot-Ruffini.

- Metodologia Adotada:

Após a apresentação dos conceitos essenciais sobre polinômios, calcular por meio de uma explicação, a adição e subtração de polinômios mostrando que para efetuar estas operações, basta operar a soma ou diferença nos termos de mesmo grau. Na multiplicação, mostrar que para multiplicar basta multiplicar a constante pelos coeficientes do polinômio

Logo após demonstrar por meio de explicações o método dos coeficientes a determinar.Mostrar que na divisão de polinômios por binômios de 1° grau é necessário demonstrar o Teorema do Resto e o Teorema de D'Alembert. Logo após, destacar a divisão de P(x) por ax + b (a ≠ 0), a divisão de P(x) por (x – a)(x – b), (a ≠ b).

Assim, o resumo apresentado nas próximas páginas apresenta observações importantes objetivando facilitar o entendimento sobre o conteúdo. Este resumo visa facilitar o aluno na aprendizagem da matéria.

FICHA RESUMO

1 – Adição e Subtração de Polinômios

Nas situações envolvendo cálculos algébricos, é de extrema importância a aplicação de regras nas operações entre os monômios. As situações aqui apresentadas abordarão a adição, a subtração e a multiplicação de polinômios.

a)Adição e Subtração

Considere os polinômios $-2x^2 + 5x - 2$ e $-3x^3 + 2x - 1$. Vamos efetuar a adição e a subtração entre eles.

Adição

$(-2x^2 + 5x - 2) + (-3x^3 + 2x - 1)$ → eliminar os parênteses realizando o jogo de sinal

$-2x^2 + 5x - 2 - 3x^3 + 2x - 1$ → reduzir os termos semelhantes

$-2x^2 + 7x - 3x^3 - 3$ → ordenar de forma decrescente de acordo com a potência

$-3x^3 - 2x^2 + 7x - 3$

Subtração

$(-2x^2 + 5x - 2) - (-3x^3 + 2x - 1)$ → eliminar os parênteses realizando o jogo de sinal

$-2x^2 + 5x - 2 + 3x^3 - 2x + 1$ → reduzir os termos semelhantes

$-2x^2 + 3x - 1 + 3x^3$ → ordenar de forma decrescente de acordo com a potência : $3x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

2 – Multiplicação e Divisão de Polinômios

1 – Multiplicação de Polinômios

a) Multiplicação de polinômio por monômio

Para entendermos melhor, observe o exemplo:

$(3x^2) * (5x^3 + 8x^2 – x)$ → aplicar a propriedade distributiva da multiplicação

$15x^5 + 24x^4 – 3x^3$

b) Multiplicação de polinômio por polinômio

Para efetuarmos a multiplicação de polinômio por polinômio também devemos utilizar a propriedade distributiva. Veja o exemplo:

$(x – 1) * (x^2 + 2x - 6)$

$x^2 * (x – 1) + 2x * (x – 1) – 6 * (x – 1)$

$(x^3 – x^2) + (2x^2 – 2x) – (6x – 6)$

$x^3 – x^2 + 2x^2 – 2x – 6x + 6$ → reduzindo os termos semelhantes.

$x^3 + x^2 – 8x + 6$

Portanto, nas multiplicações entre monômios e polinômios aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação.

2 – Divisão de Polinômios

Polinômio é uma expressão algébrica composta por dois ou mais monômios. Na divisão de polinômios, utilizamos duas regras matemáticas fundamentais: realizar a divisão entre os coeficientes numéricos e divisão de potências de mesma base (conservar a base e subtrair os expoentes). Quando trabalhamos com divisão, utilizamos também a multiplicação no processo. Observe o seguinte esquema:

$$\begin{array}{l|l} \text{dividendo} & \text{divisor} \\ \cline{2-2} \text{resto} & \text{quociente} \end{array} \Leftrightarrow \text{quociente} * \text{divisor} + \text{resto} = \text{dividendo}$$

Vamos dividir um polinômio por um monômio, com o intuito de entendermos o processo operatório. Observe:

Exemplo 1:

$$\begin{array}{r|l} 12x^3 + 4x^2 - 8x & 4x \\ \cline{2-2} -12x^3 \qquad\qquad & 3x^2 + x - 2 \\ \cline{1-1} 0x + 4x^2 \qquad & \\ -4x^2 \qquad & \\ \cline{1-1} 0x \quad -8x & \\ +8x & \\ \cline{1-1} 0 \quad & \end{array}$$

Caso queira verificar se a divisão está correta, basta multiplicar o quociente pelo divisor, com vistas a obter o dividendo como resultado.

Verificando → quociente * divisor + resto = dividendo
4x * (3x² + x – 2) + 0
12x³ + 4x² – 8x

Caso isso ocorra, a divisão está correta. No exemplo a seguir, iremos dividir polinômio por polinômio. Veja:

Exemplo 2:

$$\begin{array}{r|l} 10x^2 - 43x + 40 & 2x - 5 \\ \cline{2-2} -10x^2 + 25x \qquad & 5x - 9 \\ \cline{1-1} 0x - 18x + 40 & \\ 18x - 45 & \\ \cline{1-1} -5 & \end{array}$$

Verificando → quociente * divisor + resto = dividendo
$(2x – 5) * (5x – 9) + (–5)$
$10x^2 – 18x – 25x + 45 + (–5)$
$10x^2 – 43x + 45 – 5$
$10x^2 – 43x + 40$

Exemplo 3:

$$
\begin{array}{l|l}
6x^4-10x^3+9x^2+9x-5 & 2x^2-4x+5 \\ \cline{2-2}
-6x^4+12x^3-15x^2 & 3x^2+x-1 \\ \cline{1-1}
0x^4+2x^3-6x^2+9x-5 & \\
\qquad -2x^3+4x^2-5x & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 0x^3-2x^2+4x-5 & \\
\qquad\qquad\quad 2x^2-4x+5 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Verificando → quociente * divisor + resto = dividendo

$(3x^2 + x - 1) * (2x^2 - 4x + 5) + 0$
$6x4 - 12x^3 + 15x^2 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2x^2 + 4x - 5$
$6x4 - 10x^3 + 9x^2 + 9x - 5$

Exemplo 4:

$$
\begin{array}{l|l}
12x^3-19x^2+15x-3 & 3x^2-x+2 \\ \cline{2-2}
-12x^3+4x^2-8x & 4x-5 \\ \cline{1-1}
\quad 0x^3-15x^2+7x-3 & \\
\qquad\quad +15x^2-5x+10 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 2x+7 &
\end{array}
$$

Verificando → quociente * divisor + resto = dividendo

$(4x - 5) * (3x^2 - x + 2) + (2x + 7)$
$12x^3 - 4x^2 + 8x - 15x^2 + 5x - 10 + (2x + 7)$
$12x^3 - 19x^2 + 13x - 10 + 2x + 7$
$12x^3 - 19x^2 + 15x - 3$

3 – Método dos coeficientes a determinar

É um método também conhecido como Método dos Descartes a Determinar, que tem como funções :

- formar o quociente Q, em função de coeficientes a serem determinados, sendo que gr(Q) = gr(A) – gr(B).

- formar o resto R, em função de coeficientes a serem determinados, sendo que gr(R) < gr(B) ou R(x) ≡ 0.

- aproveitar a definição da divisão.

- através da identificação dos polinômios, obter os coeficientes Q e R.

Vejamos um exemplo:

Determinar pelo método de Descartes o quociente e o resto da divisão de:

$x^4 - x^3 = 2x^2 - x + 3$ por $x^3 - 3x^2 + 2$.

$Q(x) = q_1.x + q_0$

$R(x) = r_2.x^2 + r_1.x + r_0$

pois **grau** Q(x) = **grau** D(x) - **grau** d(x)

grau Q(x) = 4 - 3 = 1 e **grau** R(x) < **grau** d(x), **grau** R(x) < 3, **grau** R(x) = 2.

Assim temos:

$$\begin{aligned} x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 3 &\equiv (x^3 - 3x^2 + 2).(q_1 + q_0) + R(x) = r_2.x^2 + r_1.x + r_0 \\ &\equiv q_1x^4 - 3q_1x^3 + 2q_1x + q_0x^3 - 3q_0x^2 + 2q_0 + R(x) = r_2.x^2 + r_1.x + r_0 \\ &\equiv q_1.x^4 + (q_0 - 3q_1).x^3 + (r_2 - 3q_0).x^2 + (r_1 + 2q_1).x + r_0 + 2q_0 \end{aligned}$$

Logo:

$q_1 = 1$

$q_0 - 3q_1 = -1$

$$r_2 - 3q_0 = -2$$

$$r_1 + 2q_1 = -1$$

$$r_0 + 2q_0 = 3$$

então:

q_0 = **2**

r_1 = **- 3**

r_0 = **- 1**

r_2 = **4**

Concluindo temos:

$$Q(x) = x + 2$$

$$R(x) = 4x^2 - 3x - 1$$

4 – Teorema do Resto

O resto da divisão de um polinômio P(x) pelo binômio (x -**a**) é igual a P(**a**) .

Demonstração: O quociente da divisão de P(x) por (x -**a**) é um polinômio Q(x) de grau inferior de uma unidade ao do polinômio P(x) e o resto R(x) é um número constante R , assim podemos escrever:

$$P(x) = (x - \mathbf{a}) . Q(x) + R$$

Para x = **a** temos:

$$P(\mathbf{a}) = (\mathbf{a} - \mathbf{a}) . Q(\mathbf{a}) + R$$

Logo: P(**a**) = R

c.q.d.

Corolário

Se é uma raiz do polinômio **P(x)** , isto é , se **P(a) = 0** , **P(x)** é divisível por **(x -a)** e pode ser posto sob a forma de produto: **P(x)** = **(x -a) . Q(x)**

Exemplo:

O polinômio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ anula-se para x = 1 , ou seja , P(1) = 0 , logo , o polinômio **P(x)** é divisível por x **-** 1 .

Assim:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1).(x^2 - 5x + 6)$$

5 – Teorema de D'Alembert

O teorema de D'Alembert é uma consequência imediata do teorema do resto, que são voltados para a divisão de polinômio por binômio do tipo x – a. O teorema do resto diz que um polinômio G(x) dividido por um binômio x – a terá resto R igual a P(a), para
x = a. O matemático francês D'Alembert provou, levando em consideração o teorema citado acima, que um polinômio qualquer Q(x) será divisível por x – a, ou seja, o resto da divisão será igual à zero (R = 0) se
P(a) = 0.

Esse teorema facilitou o cálculo da divisão de polinômio por binômio (x – a), dessa forma não sendo preciso resolver toda a divisão para saber se o resto é igual ou diferente de zero.

Exemplo 1
Calcule o resto da divisão $(x^2 + 3x – 10) : (x – 3)$.

Como diz o Teorema de D'Alembert, o resto (R) dessa divisão será igual a:

$P(3) = R$
$3^2 + 3 * 3 – 10 = R$
$9 + 9 – 10 = R$
$18 – 10 = R$
$R = 8$
Portanto, o resto dessa divisão será 8.

Exemplo 2
Verifique se $x^5 – 2x^4 + x^3 + x – 2$ é divisível por $x – 1$.

Segundo D'Alembert, um polinômio é divisível por um binômio se $P(a) = 0$.

$P(1) = (1)^5 – 2*(1)^4 + (1)^3 + (1) – 2$
$P(1) = 1 – 2 + 1 + 1 – 2$
$P(1) = 3 – 4$
$P(1) = – 1$

Como $P(1)$ é diferente de zero, o polinômio não será divisível pelo binômio $x – 1$.

Exemplo 3
Calcule o valor de m de modo que o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^4 – mx^3 + 5x^2 + x – 3$ por $x – 2$ seja 6.

Temos que, $R = P(x) \rightarrow R = P(2) \rightarrow P(2) = 6$

$P(2) = 2^4 – m*2^3 + 5*2^2 + 2 – 3$
$2^4 – m*2^3 + 5*2^2 + 2 – 3 = 6$
$16 – 8m + 20 + 2 – 3 = 6$
$– 8m = 6 – 38 + 3$
$– 8m = 9 – 38$
$– 8m = – 29$
$m = 29/8$

Exemplo 4
Calcule o resto da divisão do polinômio $3x^3 + x^2 – 6x + 7$ por $2x + 1$.

$R = P(x) \rightarrow R = P(– 1/2)$

$R = 3*(–1/2)^3 + (–1/2)^2 – 6*(–1/2) + 7$
$R = 3*(–1/8) + 1/4 + 3 + 7$
$R = –3/8 + 1/4 + 10$ (mmc)
$R = –3/8 + 2/8 + 80/8$
$R = 79/8$

6 – Divisão de P(x) por ax + b ($a \neq 0$)

Vamos calcular o resto da divisão de $P(x)=4x^2-2x+3$ por $D(x)=2x-1$.

$$\begin{array}{r|l} 4x^2 - 2x + 3 & 2x - 1 \\ \cline{2-2} \underline{-4x^2 + 2x} & 2x \\ 3 & \end{array}$$

Utilizando o método da chave temos:
Logo: $R(x)=3$
A raiz do divisor é $2x-1=0$ => $x=1/2$.
Agora calculamos $P(x)$ para $x=1/2$.
$P(1/2) = 4(1/4) – 2(1/2) + 3$
$P(1/2) = 3$

Observe que $R(x) = 3 = P(1/2)$
Portanto, mostramos que o resto da divisão de P(x) por D(x) é igual ao valor numérico de P(x) para x=1/2, isto é, a raiz do divisor.

7 – Divisão de P(x) por (x – a)(x – b), ($a \neq b$)

Vamos resolver o seguinte problema: calcular o resto da divisão do polinômio P(x) pelo produto *(x-a)(x-b)*, sabendo-se que os restos da divisão de P(x) por *(x-a)* e por *(x-b)* são, respectivamente, r_1 e r_2.

Temos:
a é a raiz do divisor *x-a*, portanto $\mathbf{P(a)=r_1}$ (eq. 1)
b é a raiz do divisor *x-b*, portanto $\mathbf{P(b)=r_2}$ (eq. 2)
E para o divisor *(x-a)(x-b)* temos **P(x)=(*x-a*)(*x-b*) Q(x) + R(x)** (eq. 3)

O resto da divisão de P(x) por *(x-a)(x-b)* é no máximo do 1º grau, pois o divisor é do 2º grau; logo:
R(x)=cx+d

Da eq.3 vem:
P(x)=(*x-a*)(*x-b*) Q(x) + cx + d
Fazendo:
x=*a* => P(*a*) = c(*a*)+d (eq. 4)
x=*b* => P(*b*) = c(*b*)+d (eq. 5)

Das equações 1, 2, 4 e 5 temos:

$$\begin{cases} ca+d=r_1 \\ cb+d=r_2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos:

$$c=\frac{r_1-r_2}{a-b} \quad \text{e} \quad d=\frac{ar_2-ar_1}{a-b} \quad , \text{ com } a\neq b$$

$$\text{Logo : } R(x)=\frac{r_1-r_2}{a-b}x+\frac{ar_2-ar_1}{a-b} \quad , \text{ com } a\neq b$$

Observações:
1ª) Se P(x) for divisível por *(x-a)* e por *(x-b)*, temos:
P(*a*)= r_1 =0
P(*b*)= r_2 =0
Portanto, P(x) é divisível pelo produto *(x-a)(x-b)*,
pois: $R(x)=\frac{r_1-r_2}{a-b}x+\frac{ar_2-ar_1}{a-b} = 0+0 = 0$

2ª) Generalizando, temos:
Se P(x) é divisível por n fatores distintos $(x-a_1)$, $(x-a_2)$,..., $(x-a_n)$ então P(x) é divisível pelo produto $(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$.

Exemplo:
Um polinômio P(x) dividido por *x* dá resto 6 e dividido por $(x-1)$ dá resto 8. Qual o resto da divisão de P(x) por $x(x-1)$?
Resolução:
0 é a raiz do divisor *x*, portanto **P(0)=6** (eq. 1)
1 é a raiz do divisor $x-1$, portanto **P(1)=8** (eq. 2)
E para o divisor $x(x-1)$ temos **P(x)=x(x-1) Q(x) + R(x)** (eq. 3)

O resto da divisão de P(x) por $x(x-1)$ é no máximo do 1º grau, pois o divisor é do 2º grau; logo:
R(x)=ax+b

Da eq.3 vem:
$P(x)=x(x-1)\ Q(x) + ax + b$
Fazendo:
x=0 => P(0) = a(0)+b => P(0) = b (eq. 4)
x=1 => P(1) = a(1)+b => P(1) = a+b (eq. 5)

Das equações 1, 2, 4 e 5 temos:
$$\begin{cases} b = 6 \\ a + b = 8 \end{cases}$$
Logo: **b=6** e **a=2**.
Agora achamos o resto: R(x) = ax+b = 2x+6
Resposta: **R(x) = 2x+6**.

7 – Dispositivo Prático de Briot-Ruuffini

Serve para efetuar a divisão de um polinômio P(x) por um binômio da forma (ax+b).
Exemplo: Determinar o quociente e o resto da divisão do polinômio $P(x)=3x^3-5x^2+x-2$ por (x-2).
Resolução:

RAIZ DO DIVISOR	COEFICIENTES DE P(x)			
2	3	-5	1	-2
	$\downarrow$	$3.(2)-5$	$1.(2)+1$	$3.(2)-2$
	3	1	3	4
	COEFICIENTES DO QUOCIENTE Q(x)			RESTO

Observe que o grau de Q(x) é uma unidade inferior ao de P(x), pois o divisor é de grau 1.
Resposta: **$Q(x)=3x^2+x+3$** e **$R(x)=4$**.

Para a resolução desse problema seguimos os seguintes passos:

1º) Colocamos a raiz do divisor e os coeficientes do dividendo ordenadamente na parte de cima da "cerquinha".
2º) O primeiro coeficiente do dividendo é repetido abaixo.
3º) Multiplicamos a raiz do divisor por esse coeficiente repetido abaixo e somamos o produto com o 2º coeficiente do dividendo, colocando o resultado abaixo deste.
4º) Multiplicamos a raiz do divisor pelo número colocado abaixo do 2º coeficiente e somamos o produto com o 3º coeficiente, colocando o resultado abaixo deste, e assim sucessivamente.
5º) Separamos o último número formado, que é igual ao resto da divisão, e os números que ficam à esquerda deste serão os coeficientes do quociente.

Exercícios de Fixação

QUESTÃO 01

As soluções da equação Q(x) = 0, em que Q(x) é o quociente do polinômio $x^4 - 10x^3 + 24x^2 + 10x - 24$ por $x^2 - 6x + 5$, são:

a) -1 e 5
b) -1 e -5
c) 1 e -5
d) 1 e 5
e) 0 e 1

QUESTÃO 02 (UESP)

Se o polinômio $P(x) = x^3 + mx^2 - 1$ é divisível por $x^2 + x - 1$, então m é igual a:

a) -3
b) -2
c) -1
d) 1
e) 2

QUESTÃO 03 (UEL)

Dividindo-se o polinômio $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 4x - 21$ por $x + 3$, obtêm-se:

a) $x^3 - 2x^3 + x -12$ com resto nulo;
b) $x^3 - 2x^2 + 3$ com resto 16;
c) $x^3 – x^2 -13x + 35$ e resto 84;
d) $x^3 – x^2 - 3x + 1$com resto 2;
e) $x^3 – x^2 + x -7$ e resto nulo;

QUESTÃO 04 (UEL)

Se o resto da divisão do polinômio $p = x^4 - 4x^3 - kx - 75$ por $(x - 5)$ é 10, o valor de k é:

a) -5
b) -4
c) 5
d) 6
e) 0

QUESTÃO 05

Sejam m e n determinados de tal modo que o polinômio $x^4 - 12x^3 + 47x^2 + mx + n$ seja divisível por $x^2 - 7x + 6$. Então m + n é igual a:

a) 72
b) 0
c) -36
d) 36
e) 58

QUESTÃO 06

Para que o polinômio $2x^4 - x^3 + mx^2 - nx + 2$ seja divisível por $x^2 - x - 2$, devemos ter:

a) m = 1 e n = 6
b) m = -6 e n = -1
c) m = 6 e n = 1
d) m = -6 e n = 1
e) m = 6 e n = -1

Após as explicações cabíveis, utilizar o livro didático para realização de Exercícios de Fixação . Com a correção dos Exercícios de Fixação , dúvidas podem ser esclarecidas.

ATIVIDADE 3: Equações Polinomiais

- Habilidade Relacionada: interpretar o Teorema Fundamental da Álgebra, decompor um polinômio de grau n ($n \geq 1$) em fatores do 1° grau. Interpretar o significado de raízes múltiplas e raízes complexas e aplicar as propriedades das relações de Girard e raízes racionais.

- Pré-requisitos: conhecimentos básicos em álgebra e no dispositivo prático de Briot-Ruffini.

- Tempo de duração: 400 minutos.

- Recursos Educacionais Utilizados: Livro didático, quadro e caneta, RESUMO/EXPLICAÇÕES.

- Organização da Turma: Individual para a apresentação do conteúdo e dupla para realização dos exercícios de fixação e exercícios complementares.

- Objetivos: fazer com que o aluno consiga decompor um polinômio de grau n (n ≥ 1) em fatores do 1° grau, que ele consiga interpretar o significado de raízes múltiplas e raízes complexas e suas aplicações. Calcular as raízes de um polinômio pelas Relações de Girard e pelas propriedades das raízes racionais.

- Metodologia Adotada:

Ensinar os alunos a decompor um polinômio qualquer de fator n (n ≥ 1) em fatores do 1° grau, calcular as raízes múltiplas e as raízes complexas com o auxílio do dispositivo prático de Briot-Ruffini . Mostrar para os alunos que nas relações de Girard em uma equação do 2° grau a soma das raízes é –b/a e o produto é c/a. Da mesma forma, mostrar que em uma equação do 3° grau, a soma é –b/a, a soma dos produtos entra duas raízes distintas é c/a e o produto das 3 raízes é –d/a, generalizando para equações de grau n > 3. Calcular as raízes racionais por meio das propriedades com o auxílio do dispositivo prático de Briot-Ruffini.

FICHA RESUMO

1 – Teorema Fundamental da Álgebra

"***Qualquer equação algébrica, de grau restritamente positivo, aceita no campo complexo pelo menos uma raiz".***

Em relação a este teorema vamos considerar apenas as observações e exemplos abaixo:

a) O teorema fundamental da álgebra apenas garante a existência de pelo menos uma raiz, ele não demonstra qual o número de raízes de uma equação algébrica nem como resolver tais raízes.

b) O T.F.A. somente tem valor para C, já para R este teorema não é válido. Isso quer dizer que em uma equação algébrica a condição de existência de raiz R é incerta, já em C é certeza que sempre terá pelo menos uma raiz.

c) Exemplo: A equação $x^2 + 1 = 0$ não possui raiz real, porém aceita no campo complexo os números i e – i como raízes.

2 – Decomposição de um polinômio em fatores do 1° grau

Vamos analisar dois casos:

1º caso: O polinômio é do 2º grau.
De uma forma geral, o polinômio de 2º grau $P(x)=ax^2+bx+c$ que admite as raízes $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ pode ser decomposto em fatores do 1º grau, da seguinte forma:

$$\mathbf{ax^2+bx+c=a(x-r_1)(x-r_2)}$$

Exemplos:

1) Fatorar o polinômio $P(x)=x^2-4$.
Resolução: Fazendo $x^2-4=0$, obtemos as raízes $\mathbf{r_1=2}$ e $\mathbf{r_2=-2}$.
Logo: $x^2-4 = (x-2)(x+2)$.

2) Fatorar o polinômio $P(x)=x^2-7x+10$.
Resolução: Fazendo $x^2-7x+10=0$, obtemos as raízes $\mathbf{r_1=5}$ e $\mathbf{r_2=2}$.
Logo: $x^2-7x+10 = (x-5)(x-2)$.

2º caso: O polinômio é de grau maior ou igual a 3.
Conhecendo uma das raízes de um polinômio de 3º grau, podemos decompô-lo num produto de um polinômio do 1º grau por um polinômio do 2º grau e, se este tiver raízes, podemos em seguida decompô-lo também.

Exemplo:

Decompor em fatores do 1º grau o polinômio $2x^3-x^2-x$.
Resolução:
$2x^3-x^2-x = x.(2x^2-x-1) \Rightarrow$ colocando x em evidência
Fazendo $x.(2x^2-x-1) = 0$ obtemos: $x=0$ ou $2x^2-x-1=0$.

Uma das raízes já encontramos (x=0).
As outras duas saem da equação: $2x^2-x-1=0 \Rightarrow$ **$r_1=1$** e **$r_2=-1/2$**.
Portanto, o polinômio $2x^3-x^2-x$, na forma fatorada é:
$2.x.(x-1).(x+(1/2))$.

Generalizando, se o polinômio $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ admite n raízes $r_1, r_2,..., r_n$, podemos decompô-lo em fatores da seguinte forma:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0 = a_n(x-r_1)(x-r_2)...(x-r_n)$$

Observações:
1) Se duas, três ou mais raiz forem iguais, dizemos que são raízes duplas, triplas, etc.
2) Uma raiz r_1 do polinômio P(x) é dita raiz dupla ou de multiplicidade 2 se P(x) é divisível por $(x-r_1)^2$ e não por $(x-r_1)^3$.

3 – Raízes Múltiplas

Definição

O número **$r \in C$** será raiz múltipla da equação **$F(x) = 0$** com multiplicidade m, quando:

$$F(x) = (x - r)^m . Q(x) \text{ e } Q(r) \neq 0$$

Portanto, considerando as raízes da equação $F(x) = 0$ como $r_1, r_2, \ldots r_p$ com multiplicidade $m_1, m_2, \ldots, m_p$, respectivamente, a decomposição que vimos anteriormente será:

$$F(x) = a_0 . (x - r_1)^{m1} . (x - r_2)^{m2} . \ldots . (x - r_p)^{mp}$$

Sendo **$m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n$ e $r_1, r_2, \ldots, r_p$ distintas duas a duas**.

Teorema

Considerando r como a raiz **$F(x) = 0$** com **multiplicidade m**, nesse caso r é a raiz da equação **$F'(x) = 0$** com **multiplicidade m -1**, sendo **F'** a função derivada da função polinomial **F**.

Conseqüências

1) Considere r como a **raiz simples de F(x) = 0**, nesse caso r **não é raiz de F'(x) = 0**.

2) Considere r como a **raiz dupla de F(x) = 0**, nesse caso r é a **raiz simples de F'(x) = 0**.

3) Considere r como a **raiz tripla de F(x) = 0**, nesse caso **r** é a **raiz dupla de F'(x) = 0**, **raiz simples de F''(x) = 0** e **não é raiz de F'''(x) = 0**, e assim por diante.

Veja o exemplo:

$$P(x) = 4(x-1)(x-1)(x-2)(x-2)(x-2)(x-8)$$

Note a multiplicidade da raiz 1 (2 vezes) e da raiz 2 (3 vezes). Denomina-se que a equação polinomial $P(x)$ possui a raiz 1 com multiplicidade 2, a raiz 2 de *multiplicidade* 3 e a raiz 8 de *multiplicidade* 1.

4 – Raízes Complexas

A ampliação do conceito de número, com a construção do conjunto dos números complexos, nos oferece um sistema no qual **toda equação polinomial tem uma raiz**. A demonstração dessa propriedade não é simples e foge dos propósitos do nosso curso; ela foi feita em 1799 pelo matemático alemão C. F. Gauss.

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Todo polinômio

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ $(n \geq 1, a_n \neq 0)$

com coeficientes complexos tem ao menos uma raiz complexa.

Note que um número real é também um número complexo; então, o teorema aplica-se para polinômios com coeficiente reais. Também, podemos dizer que a equação P(x) = 0 tem ao menos uma raiz real.

Pelo **teorema do Fator** sabemos que a toda raiz de um polinômio corresponde um fator do 1º grau; então o **Teorema Fundamental da álgebra** garante que podemos fatorar qualquer polinômio P(x) de grau **n** como

$P(x) = (x - c_1) . P_1 (x)$

onde $P_1(x)$ é um polinômio de grau n - 1, e c_1 é uma raiz de P(x).

Conclusão:

Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite o número complexo z = a + bi como raiz, então , o conjugado de z, também é raiz da equação.

Observações:

1) O número de raízes complexas de uma equação polinomial de coeficientes reais é sempre par, pois, se z é raiz, o conjugado de z também é.
2) Uma equação polinomial do 2° grau ímpar e coeficientes reais tem um número ímpar de raízes reais.

Veja um exemplo:

$x^2 - 4x + 5 = 0$

$\Delta = 16 - 20 = -4$
-4 é (4).(-1), certo? Logo, $\sqrt{\Delta} = \sqrt{4}.i = 2i$

Terminado a resolução por Bháskara:

$x = (4 + 2i)/2 = 2 + i$

$x' = (4 - 2i)/2 = 2 - i$

$V = \{2+i ; 2-i \}$

4 – Relações de Girard

Considere a função polinomial

$$\mathbf{F(x) = a_0 . x^n + a_1 . x^{n-1} + a_2 . x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} . x + a_n,}$$

sendo $\mathbf{a_0 \neq 0}$ e $\mathbf{n \geq 1}$.

Considerando o teorema da decomposição podemos representar
$F(x) = a_0 . (x - r_1) . (x - r_2) . \ldots . (x - r_n)$.
Empregando a propriedade distributiva, tornando redutíveis os termos semelhantes, e ordenando o polinômio, temos:

$$\mathbf{F(x) = a_0 . x^n - a_0(r_1 + r_2 + \ldots + r_n) . x^{n-1} + a_0 (r_1r_2 + r_1r_3 + \ldots) x^{n-2} + \ldots}$$

Se igualarmos os coeficientes deste último polinômio, dois a dois, respectivamente, como os coeficientes iniciais a_0, a_1, a_2, …, a_n, obtemos n relações entre **as raízes e os coeficientes de F**, tais relações são denominadas **Relações de Girard**, e são as seguintes:

$$r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + \ldots + r_{n-1} . r_n = +\frac{a_2}{a_0}$$

$$r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \ldots + r_{n-2} . r_{n-1} . r_n = +\frac{a_3}{a_0}$$

$$\vdots$$

$$r_1 . r_2 . r_3 . \ldots . r_n = (-1)^n . \frac{a_n}{a_0}$$

Relações de Girard para uma equação de grau 2

A equação $a_0x^2 + a_1 x + a_2 = 0$ possui como raízes os termos r_1 e r_2, nesse caso:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ r_1 . r_2 = +\dfrac{a_2}{a_0} \end{cases}$$

Relações de Girard para uma equação de grau 3

A equação $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ possui como raízes os termos r_1, r_2 e r_3, nesse caso:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\dfrac{a_1}{a_0} \\[2ex] r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = +\dfrac{a_2}{a_0} \\[2ex] r_1 \,.\, r_2 \,.\, r_3 = -\dfrac{a_3}{a_0} \end{cases}$$

Relações de Girard para uma equação de grau 4

A equação $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$ possui como raízes os termos r_1, r_2, r_3 e r_4, nesse caso:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_2 + r_3 + r_4 = -\dfrac{a_1}{a_0} \\[2ex] r_1 r_2 + r_1 r_3 \,.\, r_1 r_4 .\, r_2 r_3 + r_2 r_4 + r_3 r_4 = +\dfrac{a_2}{a_0} \\[2ex] r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_3 r_4 + r_2 r_3 r_4 = -\dfrac{a_3}{a_0} \\[2ex] r_1 \,.\, r_2 \,.\, r_3 \,.\, r_4 = +\dfrac{a_4}{a_0} \end{cases}$$

Veja um exemplo:

Dada Equação $x^3 - 3x^2 + 5x – 8 = 0$, de raízes x_1, x_2 e x_3, determinar:

a) $x_1 + x_2 + x_3$

b) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

c) $x_1x_2x_3$

d) $\dfrac{1}{x_1x_2} + \dfrac{1}{x_1x_3} + \dfrac{1}{x_2x_3}$

Solução:

Na equação x³ - 3x² + 5x – 8 = 0, temos a = 1, b = -3, c = 5 e d = -8.

Logo:

a)
$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-3)}{1} = 3$$

b)
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} = \frac{5}{1} = 5$$

c)
$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{(-8)}{1} = 8$$

d)
$$\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1x_3} + \frac{1}{x_2x_3} = \frac{x_3 + x_2 + x_1}{x_1x_2x_3} = \frac{-\frac{b}{a}}{-\frac{d}{a}} = \frac{3}{8}$$

5 – Raízes Racionais

"Se o número racional p/q, com p e q primos entre si (ou seja, p/q é uma fração irredutível), é uma raiz da equação polinomial com coeficientes inteiros

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0 = 0$ então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Exemplo:

Queremos saber se a equação $x^3 - 7x + 6 = 0$ possui raízes racionais:

- p deve ser divisor de 6, portanto: ±6, ±3, ±2, ±1;
- q deve ser divisor de 1, portanto: ±1;

Portanto, os possíveis valores da fração p/q são: ±6, ±3, ±2 e ±1.

Substituindo-se esses valores na equação, descobrimos que -3, 1 e 2 são suas raízes.

Como esse polinômio é de grau 3 (x^3) é necessário descobrir apenas uma raiz para determinar as demais. Se fosse de grau 4 (x^4) precisaríamos descobrir duas raízes. As demais raízes podem facilmente ser encontradas utilizando-se o dispositivo prático de Briot-Ruffini e a fórmula de Bháskara.

Exercícios de Fixação

1. (UFF-2010) Considere o polinômio

$$p(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2$$

a) Verifique se o número complexo i é raiz de $p(x)$

b) Calcule todas as raízes complexas de $p(x)$

2. (UECE-2010) Os números $-2, -1, 0, 1\ , 2$ são as soluções da equação polinomial $p(x) = 0$, as quais são todas simples. Se o polinômio $p(x)$ é tal que $p\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$, então o valor de $p(\sqrt{3})$ é igual a:

a) $2\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $3\sqrt{3}$ d) $6\sqrt{2}$

3. (PUC- 2010) O polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + d$ é divisível por $x - 2$

a) Determine d

b) Calcule as raízes de $p(x) = 10$

4. (UEG-2010) João gosta de brincar com números e fazer operações com eles. Em determinado momento, ele pensou em três números naturais e, em relação a esses números, observou o seguinte:

→ A soma desses números é 7.

→ O produto deles é 8.

→ A soma das três parcelas resultantes dos produtos desses números tomados dois a dois é 14.

Assim, os três números pensados por João são raízes da equação:

a) $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$

b) $x^3 + 7x^2 - 14x + 8 = 0$

c) $x^3 - 7x^2 - 14x - 8 = 0$

d) $x^3 + 7x^2 - 14x - 8 = 0$

5. (Mackenzie-2010) Se a, b e c são as raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$, tais que $a = -2bc$, o valor de $\frac{a}{b} + \frac{a}{c}$ é:

a) 2 b) $1/2$ c) -2 d) 3 e) -$1/4$

6. (UEL-2009) A equação

$3x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 28x + 8 = 0$

Tem uma raiz inteira e duas raízes complexas imaginárias puras. Sua quarta raiz é:

a) -2/3 b) -1/3 c) 1/3 d) 2/3 e) 4/3

7. (ITA-2011) Com respeito à equação polinomial

$2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$

É correto afirmar que:

a) Todas as suas raízes estão em $\mathbb{Q}$

b) Uma única raiz está em $\mathbb{Z}$ e as demais

estão em $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

c) Duas raízes estão em $\mathbb{Q}$ e as demais tem parte imaginária não nula.

d) não é divisível por $2x - 1$

e) uma única raiz está em $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ e pelo menos uma das demais está em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

8. (UFRGS-2008) O polinômio

$p(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ tem:

a) apenas duas raízes reais distintas

b) apenas duas raízes positivas

c) todas as raízes positivas

d) quatro raízes iguais

e) quatro raízes distintas

9. (PUC-SP-2007) Sabe-se que a equação

$x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$ admite raízes inteiras. Se m é a maior das raízes não inteiras da equação, então o valor de $m + 1/m$ é:

a) -6   b) -3   c) 0   d) $\sqrt{5}$ e) $2\sqrt{5}$

10. (FUVEST) Suponha que o polinômio do 3º grau $p(x) = x^3 + x^2 + mx + n$ onde m e n são números reais, seja divisível por $x - 1$

a) Determine n em função de m

b) Determine m para que $p(x)$ admita raiz dupla diferente de 1

c) Que condições m deve satisfazer para que $p(x)$ admita três raízes reais e distintas?

11. (FUVEST) A equação $x^3 - 2x^2 - x + 14 = 0$ tem uma raiz inteira r e duas imaginárias s e t.

a) Determine as raízes r, s e t

b) Escreva a equação cujas raízes são $\frac{1}{r}, \frac{1}{s}$ e $\frac{1}{t}$

c) Determine a equação cujas raízes são st, rs e rt

Após as explicações cabíveis, utilizar o livro didático para realização de EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO e ampliação dos conceitos estudados através dos exemplos e das explicações existentes no material.

3 – Avaliação

No decorre do desenvolvimento das atividades, o professor poderá analisar até que ponto os alunos integraram e deram sentido as informações, através das aulas didáticas, dos Exercícios de Fixação realizados ao longo das aulas. Propor um trabalho em equipe (dois tempos de 50 minutos cada para organização e apresentação dos grupos), conforme o seguinte:

- separar a turma em grupos de cinco alunos, sortear dentre 10 questões do livro (ainda não realizadas em sala), uma para cada grupo;

- definir a pontuação da atividade e um dia para realização do trabalho e indicar sites que contenham problemas com resoluções detalhadas para que os alunos possam ampliar ainda mais seus conhecimentos sobre o assunto;

- cada grupo deve solucionar seu problema e escolher um ou dois integrantes para apresentar a resolução detalhada no quadro para os demais alunos da turma na data marcada e na ordem já definida pelo professor;

Também é importante a aplicação de avaliação individual e escrita com duração de 100 minutos para investigação da capacidade de utilização de conhecimentos adquiridos, do valor numérico de um polinômio, operações com polinômios enfatizando na divisão o Método dos coeficientes a determinar, o Teorema do Resto, o Teorema de D'Alembert, Divisão de P(x) por $ax + b$ $(a \neq 0)$, Divisão de P(x) por $(x - a)(x - b)$, $(a \neq b)$ e o dispositivo prático de Briot-Ruffini.Nas equações polinomiais, a avaliação deve constar o Teorema Fundamental da Álgebra, a Decomposição de um polinômio em fatores do 1° grau, Raízes Múltiplas, Raízes Complexas, Relações de Girard e Raízes Racionais.

4 – FONTES DE PESQUISA

- ✓ Brasil: roteiros de ação. Fundação Cecierj/Consórcio Cederj . Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 4º bimestre. Rio de Janeiro, 2012

- ✓ MATEMÁTICA ENSINO MÉDIO, 3º Ano/ Kátia Stocco Smole & Maria Diniz – 6º Edição – São Paulo: Editora Saraiva 2010.

- ✓ Colégio Web: Disponível em: <www.colegioweb.com.br> Acesso em 26/11/2012.

- ✓ Mundo Vestibular: disponível em: <www.mundovestibular.com.br> Acesso em 26/11/2012

- ✓ Infoescola. Disponível em : <www.infoescola.com/matematica> Acesso em 26/11/2012.

- ✓ Pense Vestibular. Disponível em:<www.pensevestibular.com.br> Acesso em 26/11/2012.

- ✓ Brasil Escola. Disponível em <www.brasilescola.com.br> Acesso em 26/11/2102.

.