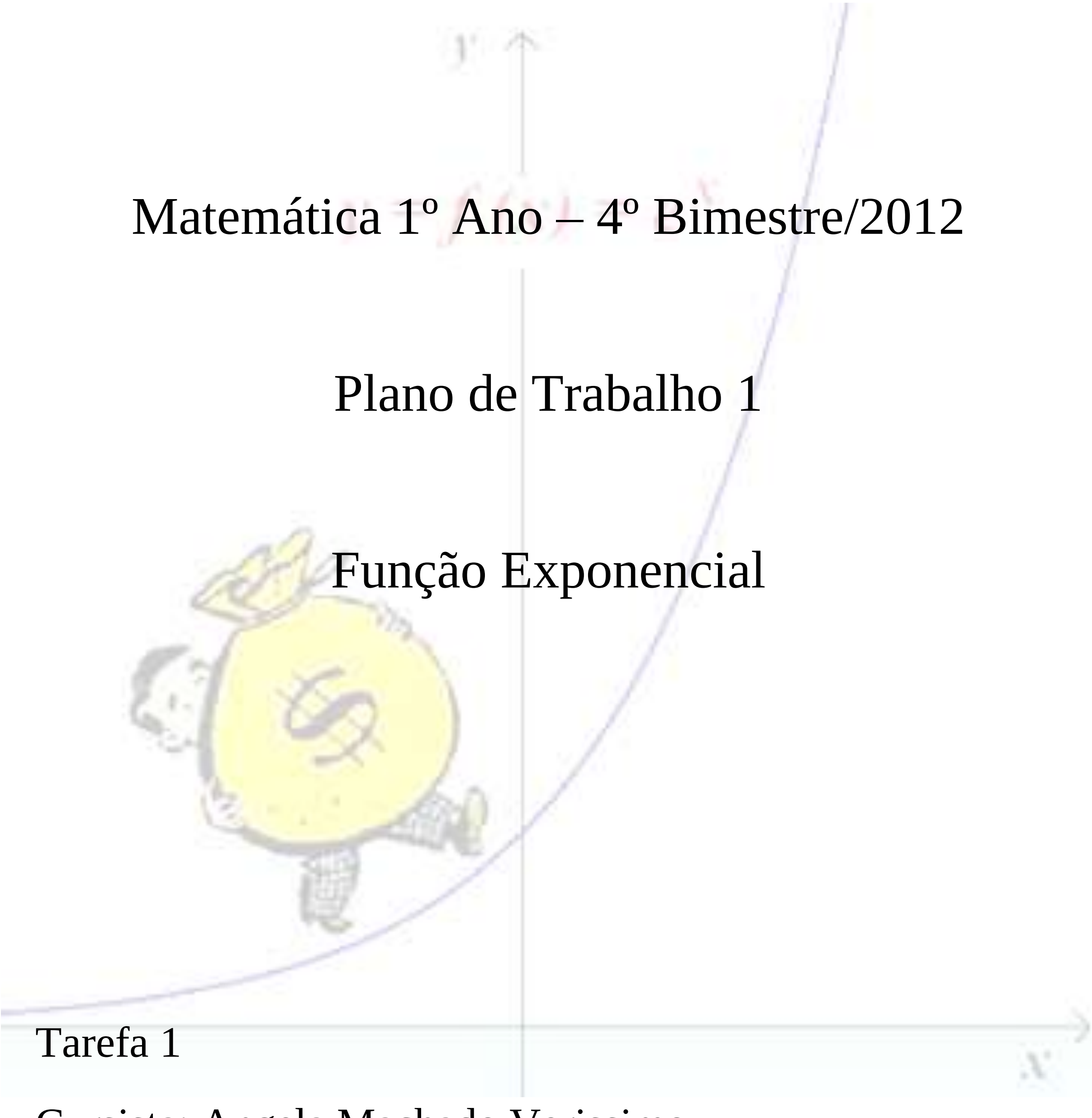
Formação Continuada em Matemática

Fundação CECIERJ/ Consórcio CEDERJ

.



Matemática 1º Ano – 4º Bimestre/2012

Plano de Trabalho 1

Função Exponencial

Tarefa 1

Cursista: Angela Machado Verissimo

Grupo: 7

Tutor: Alexsandro Soares Candido

S U M Á R I O

INTRODUÇÃO

O presente plano de trabalho teve sua aplicação seguindo as seguintes etapas: Bingo das propriedades operatórias das potências; apresentação da função exponencial; fenômenos modelados por Funções Exponenciais; construção de gráficos; slides e resolução das situações-problema. O mesmo tem por objetivo oportunizar aos alunos uma alternativa para o estudo das funções exponenciais por meio de uma metodologia que o possibilite construir o próprio conhecimento de forma dialógica, visando o desenvolvimento do raciocínio lógico e também de habilidades para resoluções de situações-problema relacionadas ao nosso cotidiano.

O conteúdo de Função Exponencial exige conhecimentos relacionados a propriedades de potenciação e proporcionalidade. Portanto, se faz necessário revisar tais temas. Para tanto, a utilização do jogo como recurso metodológico tem como finalidade estimular o raciocínio; possibilitar aos alunos a fixação/memorização das propriedades de potenciação e radiciação, buscando despertar maior interesse do aluno de uma forma mais criativa e motivá-los a aprendizagem; além propiciar a solidariedade.

Levando em conta o objetivo de abordar o conteúdo de Função Exponencial de forma a estimular o raciocínio dos alunos, assim também como um maior interesse pelas aulas, procurou-se mostra-los a aplicabilidade do conteúdo para resolução de situações-problema.

Para a aplicação do plano, serão necessários 11 **tempos** de cinquenta minutos para o desenvolvimento dos conteúdos e avaliação, totalizando550 minutos.

DESENVOLVIMENTO

Atividade 1-Bingo

- **Assunto:** Propriedades operatórias das potências
- **Habilidade relacionada:** H52 - Resolver problemas com números reais envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação).

Objetivos: Buscar um padrão matemático que permita formalizar e sintetizar as propriedades com expoente negativo e fracionário. Trabalhar um método lúdico de memorização das propriedades operatórias das potências.

- **Pré-requisitos:** Propriedades operatórias das potências.
- **Tempo de duração:** 150 minutos
- **Recursos educacionais utilizados:** Folha/texto/ atividade; cartelas com potências; cartões com expressões envolvendo potências, caderno, lápis, lousa, caneta para quadro branco e apagador.
- **Organização da turma:** Em grupos de quatro alunos.
- **Metodologia adotada:** Leitura do texto em sala de aula "Como surgiu a notação exponencial?" Estudar as propriedades de potência a partir das considerações feitas em grupos através de registros, e finalmente abrir discussão entre os grupo, formalizando os conceitos adquiridos.Dinâmica do jogo da memória.

- Distribuir para os alunos a folha xerocada com o texto abaixo:

A história conta: Como surgiu a notação exponencial?

A utilização de numerais indo-arábicos como expoentes de uma base nem sempre foi tão óbvia como nos dias de hoje.

Hoje a ideia de se escrever $x \, . \, x = x^2$ ou $x \, . \, x \, . \, x = x^3$ nos parece óbvia, mas a utilização de numerais indo-arábicos como expoentes de uma determinada base, na forma utilizada hoje, ocorreu somente por volta de 1637, sendo atribuída ao grande matemático francês René Descartes.

A historia já nos mostrou várias vezes, que soluções brilhantes dependem de experimentos, erros e acertos realizados por outros.

Nesse caso, não foi diferente; há registros da utilização de potências, aproximadamente em 1000 a.C. em algumas tabelas babilônicas.

Por volta de 1360 o bispo francês Nicole Oresme deixou manuscritos com notações utilizando potências com expoentes racionais e irracionais e regras sistematizadas para operar com potências. Ainda na França, em 1484, o médico Nicolas Chuquet utilizou potências com expoente zero.

Além desses, outros matemáticos contribuíram para o desenvolvimento da notação exponencial, até que Descartes nos deixasse a notação de potência utilizada hoje.

Um sistema de numeração posicional, na sua escrita usual, "esconde" o que podemos chamar de forma polinômica de um número. No entanto, é nela que ele se estrutura, levando em conta a sua base de agrupamento e reagrupamentos. Observamos que no sistema indo-arábico, cuja base é 10, 1989 “esconde” a expressão: $1 . 10^3 + 9 . 10^2 + 8 . 10^1 = 9 . 10^0$, assim como a sua representação no sistema babilônico, de base 60, “esconde” a expressão $33 . 60^1 + 9 . 60^0$.

✸✸✸

A potência é definida como produto de fatores iguais quando o expoente é um número inteiro maior ou igual a dois, pois só nesses casos faz sentido falar em números de fatores. Os demais casos de expoentes, como 0, 1 e expoentes inteiros negativos são definidos separadamente com a intenção de manter a maioria das propriedades válidas para as potências definidas, como produto de fatores iguais. Assim é que se define: $a^1 = a$, $a^0= 1$, sempre que $a \neq 0$. Além disso, pode-se definir a potencia com expoente negativo com na = $1/a^{-n}$, sempre que n seja um número inteiro e $a\neq 0$.

SISTEMATIZANDO

ATIVIDADE:

- 1-Formulação de regras de cálculo com potências.

a) Indique, em forma de uma única potência, as expressões numéricas $27^{36} \times 27^{25}$ e $27^{36} : 27^{25.}$

b) Faça o mesmo para $27^{25} \times 27^{36}$ e $27^{25} : 27^{36.}$ Que propriedades vocês puderam observar?

b) De modo geral, faça o mesmo para $a^n \times a^m$ para $a^n : a^m$; onde a, n e m são números inteiros com $a \neq 0$.

c)

d) Faça o mesmo para $a^n : a^m$ com $a \neq 0$. Note que $a^n : a^m = 1$. O que você pode concluir?

e)Indique, em forma de uma única potência, as expressões numéricas $12^5 \times 3^5$ 2 $12^5 : 3^5$, respectivamente? Que propriedades vocês puderam observar?

f) De modo geral, indique em forma de uma única potência, $a^n \times b^n$ e $a^n : b^{n}$, onde a, b e n são números inteiros com $b \neq 0$. Que propriedades vocês puderam observar?

2- Complete a tabela abaixo com as propriedades que acabou de estudar.

DADO	RESPOSTA
$a^n \times a^m$	
$a^n : a^m$	
$a^n \times b^n$	
$a^n : b^n$	
$(a^n)^m$	
a^0, $a\neq 0$	

3 – Observando as expressões:

a) $5^3 \times 5$, $5^{\frac{4}{3}} \times 5^{\frac{8}{3}}$ e $5^{2,5} \times 5^{1,5}$, podemos escrevê-las como uma mesma potência?

b) $6^{0,75}$ é igual a $6^{\frac{3}{4}}$?

c) $9^{\frac{3}{2}}$ é igual a $\sqrt{9^3}$?

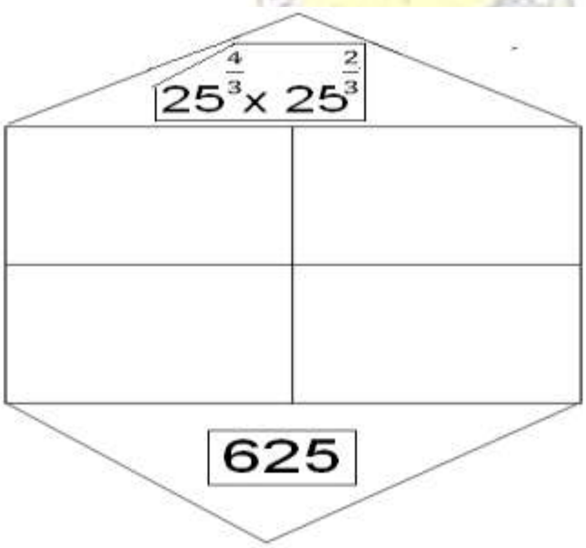
<u>Atividade- Bingo</u>

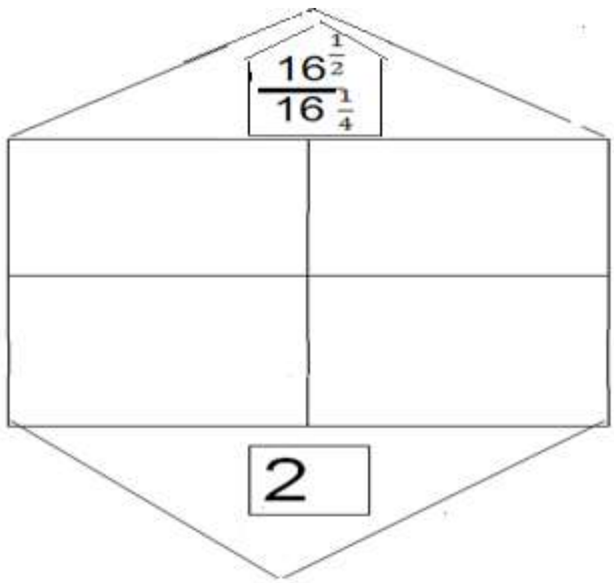
Iniciei o estudo fazendo uma revisão das propriedades de potências com expoente fracionário, e para explora-las (propriedades) de uma forma lúdica utilizei o bingo. Pra tanto, a turma foi dividida em grupos de 4 componentes, e em seguida distribuídas uma cartela para cada grupo que continha uma expressão envolvendo alguma potência; quatro espaços em branco e o valor numérico. Logo, foram sorteadas cartões com outras expressões envolvendo potências com o mesmo valor numérico das expressões contidas nas cartelas. Sorteada uma dessas expressões, o grupo que estiver na cartela uma expressão com o mesmo valor, fará o cálculo na lousa e poderá preencher o espaço em branco.

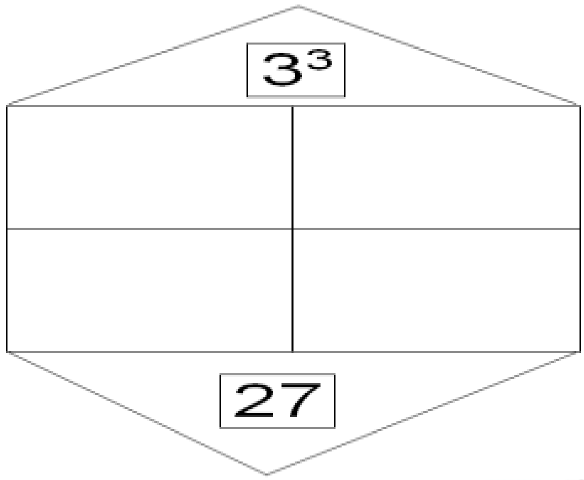
◆ Cartelas e cartões para recorte

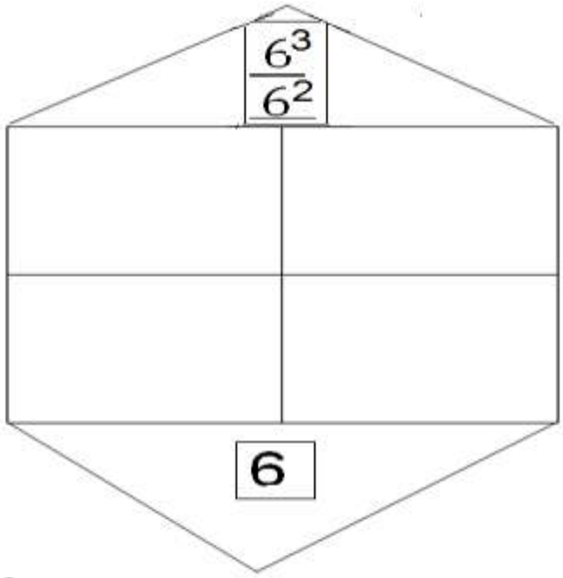
As cartelas serão distribuídas para os grupos (uma por grupo).

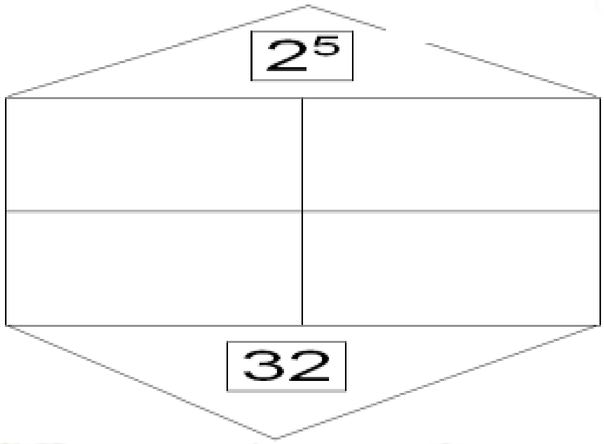
➔ Cartelas para serão distribuídas entre os grupos(recortar):











◆ O professor irá sorteando as expressões que têm o mesmo valor que alguma das expressões das cartelas e as escreveram no quadro, e os grupos irão completando suas cartelas, se conseguirem provar no quadro a igualdade, entre as 2 expressões.

➔ Cartelas com as expressões para recorte:

$4^{\frac{5}{2}}$	$(2^2)^{\frac{5}{2}}$	$\sqrt{4^5}$	$4^{2,5}$
$9^{\frac{3}{2}}$	$(3^2)^{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{9^3}$	$9^{1,5}$
$16^{\frac{1}{4}}$	$(2^4)^{\frac{1}{4}}$	$\sqrt[4]{16}$	$16^{0,25}$
$25^{\frac{6}{3}}$	$(5^2)^{\frac{6}{3}}$	$\sqrt[3]{25^6}$	25^2
$216^{\frac{1}{3}}$	$(6^3)^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[3]{216}$	$216^{0,333...}$

Conforme os grupos forem completando a cartela, o grupo colocara o nome do grupo no quadro, na ordem em que forem preenchendo-as.

Atividade 2

- **Assunto:** Função exponencial
- **Habilidade relacionada:** H58 - Resolver problemas envolvendo a função exponencial. H63- Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial.
- **Objetivos**: Identificar o crescimento exponencial.
- ***P*ré-requisitos:** função polinomial do 1º grau, potenciação e proporcionalidade.
- **Tempo de duração:** 100 minutos
- **Recursos educacionais utilizados:** Folha/texto; caderno, lápis, lousa, caneta para quadro branco e apagador.
- **Organização da turma:** Em duplas.
- **Metodologia adotada:** Orientar os alunos na construção de uma tabela com quatro valores e representa-los no gráfico. Propiciar aos alunos formular hipóteses e prever resultados.Aula expositiva e dialogada através de perguntas orais,escritas e atividades de caderno.
-

❖❖❖.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Megainflação:

O poder aquisitivo da população decresce exponencialmente

ALERTA!

A contaminação pelo novo vírus da gripe tem crescimento exponencial!

Vamos estudar uma nova função que permitirá compreender melhor o sentido das manchetes acima e conhecer algumas aplicações da Matemática em outras áreas das Ciências.

Um biólogo acompanhou o crescimento da folha com forma circular de uma planta aquática.

Se o início das suas observações o biólogo mediu a folha e obteve 1 cm de diâmetro, qual será o diâmetro que ela terá ao final de seu prazo máximo de sobrevivência, que é de 4 meses?

Folha e flor da vitória-régia, planta aquática típica da região amazônica.

http://www.espiraistempo.com.br/2012/02/lenda-vitoria-regia.html

Durante suas observações, o biólogo construiu uma tabela que mostra o aumento do diâmetro da folha da planta em função do tempo. Continue você preenchendo a tabela.

Observação inicial	**1 cm**
Após 1 mês	3 cm
Após 2 meses	9 cm
Após 3 meses	27 cm
Após 4 meses	

1ª – Entendendo o crescimento da folha

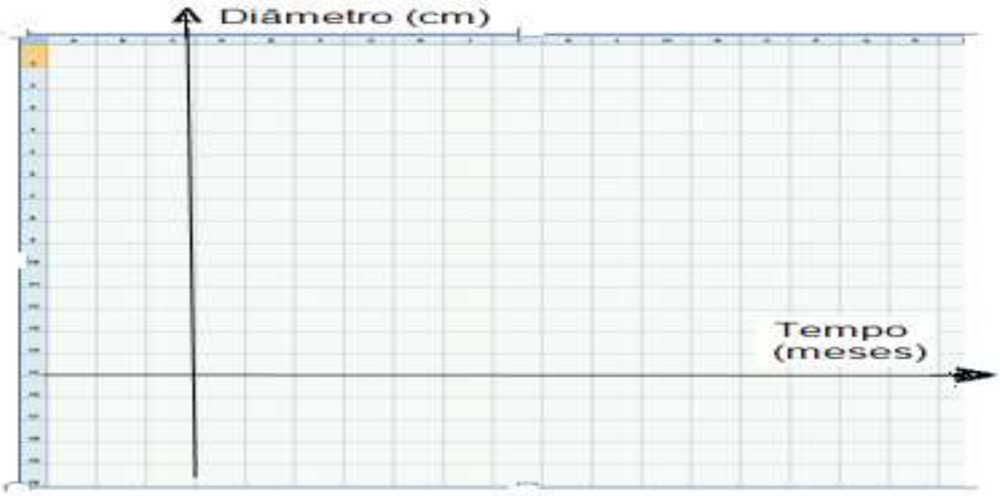
a)Vimos, então, que ao final de 4 meses o diâmetro da folha será igual a ....

b)Assim como o biólogo, concluímos que a cada mês o diâmetro da folha ....

c) Reescreva o aumento do diâmetro da folha, utilizando o preenchimento da tabela acima, como potência de base 3.

Tempo (t)	**Aumento(cm)**
1	
2	
3	
4	

◆Represente o crescimento dessa folha no gráfico ao lado. Una os pontos do gráfico, já que o aumento do diâmetro é contínuo.



Observando o gráfico, podemos dizer que o diâmetro dessa folha cresce **exponencialmente?** Utilizamos esse termo para expressar que ela cresce com sue diâmetro variando na forma de potencia de base fixa, que, neste caso, é igual a 3.

De fato, em 4 meses o diâmetro aumenta aproximadamente 80 vezes!

Iremos abordar problemas como este envolvendo função exponencial.

Retornando a tabela vamos considerar apenas a variação do diâmetro em função do tempo, sem nenhuma restrição.

Tempo(meses)	**Diâmetro(cm)**
0	$1 = 3^0$
1	$3 \,.\, 1 = 3 = 3^1$
2	$3 \,.\, 3 = 9 = 3^4$
3	$3 \,.\, 9 = 27 = 3^5$
4	$3.\ 27 = 81 = 3^4$
5	
6	
⋮	⋮

Se, hipoteticamente, a folha dessa planta crescesse por x meses, seu diâmetro seria 3^x. cm, ou seja, o crescimento seria dado pela função $y = 3^x$, que é uma função exponencial.

Você deve ter observado que foram impostas duas restrições à base a, ou seja, $a > 0$ e $a \neq 1$.

REFLITA E RESPONDA

1 - Considerando a base *a* com os seguintes valores: a=1, a= 0 e a < 0; pode-se garantir a existência de a^x no conjunto dos números reais, assim como a existência da função exponencial? Justifique.

2 - Complete:

❖Sendo assim, podemos concluir que em uma função exponencial a base é ______________________

R função f, de R em R, que a cada número x associa o número a^x, com a> 0 e a≠ 1, é denominada **função exponencial** de base a.

f : R →R
x → y = a^x, com a> 0 e a≠ 1

Atividade 3

❖ **Assunto:** Função exponencial

❖ **Habilidade relacionada:** H58 - Resolver problemas envolvendo a função exponencial. H63- Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial.

❖ **Objetivos:** Desenvolver a capacidade dos alunos resolver problema modelado por uma função exponencial e identificar o decaimento constante de um fenômeno exponencial decrescente e crescimento exponencial.

❖ **Pré-requisitos:** função polinomial do 1º grau, potenciação e proporcionalidade.

❖ **Tempo de duração:** 100 minutos

❖ **Recursos educacionais utilizados:** Folha de atividade; calculadora; caderno, lápis, lousa; caneta para quadro branco e apagador.

❖ **Organização da turma:** Em duplas.

❖ **Metodologia adotada:** Propor aos alunos algumas situações-problema relativas a fenômenos que podem ser modelados por funções exponenciais. Destacar aos alunos os passos que são fundamentais na resolução de uma situação-problema: compreender o problema, encontrar a conexão ente os dados e a incógnita, construir e executar o plano de resolução e validar a solução.

❖❖❖

Fenômenos que podem ser modelados por funções exponenciais são aqueles em que a variação (crescente ou decrescente), num certo instante, é proporcional ao valor da função naquele instante. Fenômenos como crescimento de bactérias ou desintegração de matéria radioativa, por exemplo, são modelados, dentro de certos limites, por função do tipo exponencial: y =ka^t, com a real positivo e diferente de 1.

SITUAÇÕES-PROBLEMA:

②João comprou um carro em 2001, por um valor de R$ 20.000,00. Ele cuida do seu carro com todo carinho, até hoje: lava, limpa, lustra, faz toda a manutenção necessária e lhe deu até um nome, chamando-o carinhosamente de “Possante”. João tem tanto carinho com o carro que seus amigos vivem brincando com João dizendo: *Aí, João, o Possante está ficando velho, hein?* João fica muito bravo e sempre responde: *Meu carro não é velho, é seminovo!*

I-Suponha que o preço de um carro, a cada ano que passa, perde 30% do seu valor.

1) Complete a tabela com o valor do “Possante” no decorrer de alguns anos, descartando os centavos.

ANO	VALOR DO “POSSANTE” (EM REAIS)
2001	20.000
2002	20.000
2003	14.000
2004	
2005	
2006	
2007	
2008	
2009	
2010	
2012	

2) Como você pode encontrar o preço do “Possante” em função de seu preço no ano anterior?

3)Calcule a diferença do preço do carro de João de 2001 a 2003?

4) Calcule a diferença do preço do carro de João de 2010 a 2012?

5) Em um determinado ano, João fez a seguinte afirmação: Meu “Possante” desvalorizou-se demais em relação a dois anos atrás. Essa afirmação aplica-se melhor ao ano de 2003 ou ao de 2012? Por quê?

6) Em 2012, João afirmou: daqui a algum tempo meu “Possante” não valerá nada. A afirmação de João é matematicamente correta?

7) Na tabela da questão 1, os preços do carro, a cada ano, decrescem exponencialmente. Explique, com suas palavras, o que você compreende por decrescimento exponencial.

②As bactérias em um recipiente se reproduzem de forma tal que o aumento do seu número é proporcional ao número de bactérias presentes. Suponhamos que, inicialmente, haja 1 000 bactérias no recipiente e que, após 1 hora, este número tenha aumentado para 1500.

I – Determine:

1) A função do tipo exponencial que modela esse fenômeno.

2) Quantas bactérias haverá cinco horas após o início do experimento.

③Quando a variação de uma população é proporcional ao próprio tamanho da população, com taxa de crescimento constante, aplica-se o modelo exponencial $p(t) = ba^t$. Suponha, então, que a ataxa de crescimento da população de uma cidade seja tal que, a cada 5 anos, ela cresça 2%.

I - Responda:

1) Qual é o crescimento relativo estimado para um período de 20 anos?

2) E num período de t anos?

Atividade 4

- ❖ **Assunto:** Gráfico cartesiano de função exponencial
- ❖ **Habilidade relacionada:** H63- Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial.
- ❖ **Objetivos:** Distinguir funções exponenciais crescentes de decrescentes, identificando suas principais características.
- ❖ **Pré-requisitos:** Potenciação, gráfico da função exponencial. Habilidade para utilizar régua, localizar e representar números reais na reta numérica, identificar e representar pontos no plano cartesiano.
- ❖ **Tempo de duração:** 100 minutos
- ❖ **Recursos educacionais utilizados:** Folha de atividade; régua, lápis, papel milimetrado.
- ❖ **Organização da turma:** Em duplas.
- ❖ **Metodologia adotada:** Aulas expositivas com construções de gráficos e resoluções de situações-problemas. Aplicabilidades da Função Exponencial na vida do ser humano.
- ❖

❖❖❖

GRÁFICO CARTESIANO DA FUNÇAÕ EXPONENCIAL

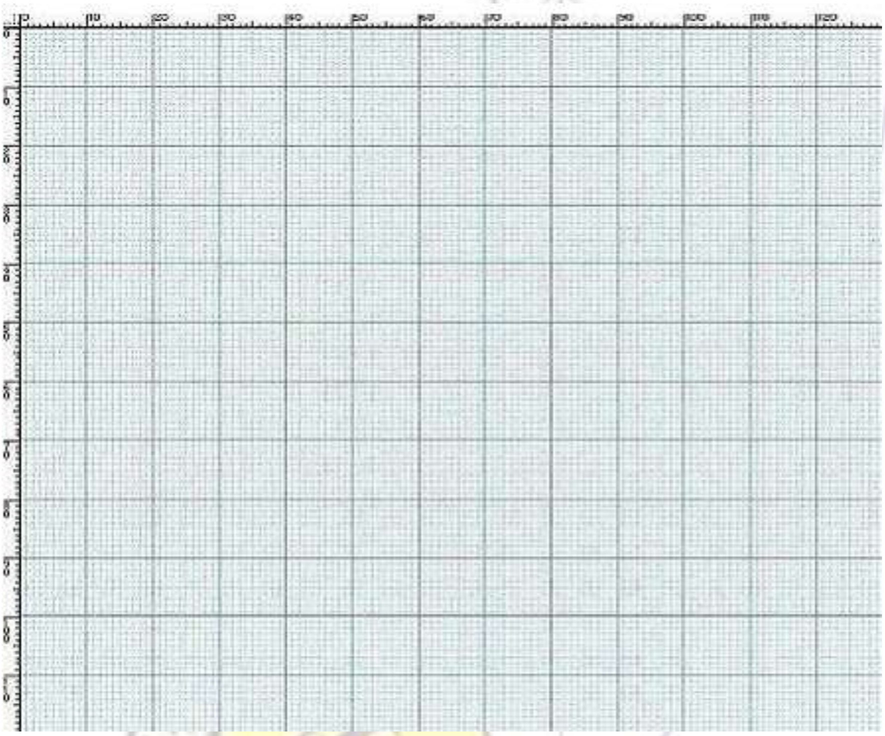
I - Vamos esboçar, inicialmente, os gráficos cartesianos de duas funções exponenciais:

1)Função exponencial de base 2 ; $Y = 2^x$

Atribuído alguns valores a x, complete a tabela abaixo:

x	-2	-1	0	1	2
y					

A partir da tabela, construa o gráfico abaixo.



Observando os gráficos responda:

a) O que ocorre com os gráficos?

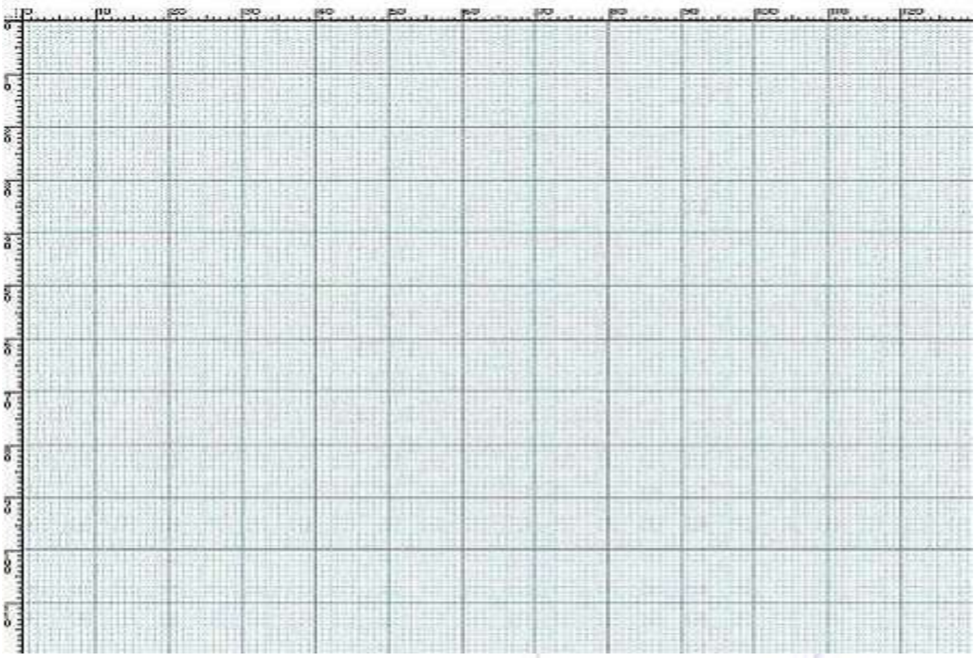
b) O que acontece com as imagens dessas funções, quando x assume valores negativos cada vez menores? E quando assume valores positivos cada vez maiores?

2)Função exponencial de base $\frac{1}{2}$; $Y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Atribuído alguns valores a x, complete a tabela abaixo:

x	-2	-1	0	1	2
y					

A partir da tabela, construa o gráfico abaixo.



Observando os gráficos responda:
a)O que ocorre com os gráficos?
b)O que acontece com as imagens dessas funções, quando x assume valores negativos cada vez menores? E quando assume valores positivos cada vez maiores?

Concluindo:
As respostas acima são as mesmas? Por quê?

Onde a Função Exponencial pode ser aplicada?

Iniciar a atividade propondo para os alunos resolvam em grupos alguns desafios que envolvam funções exponenciais. Como exemplo, sugerimos os seguintes desafios abaixo:

a)Um jogador da Mega Sena ganhou sozinho R$ 1.000.000,00 (um milhão de reais). Ele pretende aplicar todo esse dinheiro na poupança, com um rendimento de 10% ao mês. Considerando que ele irá sacar esse dinheiro somente após 1 (um) ano de aplicação, quanto dinheiro ele terá?

♦f(x) = total de dinheiro que terá daqui a 1 ano
♦a = base = rendimento mensal somado ao valor inicial = 10% + 100% = 0,1 + 1 = 1,1
♦x = expoente = número de meses da aplicação = 1 ano = 12 meses

b)Um casal resolveu comprar uma casa no valor de R$ 350.000,00 (trezentos e cinqüenta mil reais). Como não possuíam o dinheiro para pagar à vista, fizeram um financiamento de R$ 200.000,00 (duzentos mil reais). Os juros do financiamento são de 20% ao ano. Eles pretendem pagar a casa em 10 anos. Qual será o valor final do financiamento da casa?

♦f(x) = valor total a ser pago pelo financiamento daqui a 10 anos
♦a = base = juros anual somado ao valor inicial = 20% + 100% = 0,2 + 1 = 1,2
♦x = expoente = período de financiamento = 10 anos

c)Numa área de preservação ambiental, para que uma espécie de planta não fosse extinta, pesquisadores mantiveram sob cuidados o último exemplar dessa espécie. Sabendo que uma planta dessa espécie gera 10 mudas por ano (que são capazes de se reproduzir após um ano) e logo em seguida morre, e sabendo que seria necessário, no mínimo, 10.000 exemplares para garantir que a espécie não corra mais risco de extinção, será que após 5 anos a espécie não precisará mais de acompanhamento porque saiu do risco de extinção?

♦f(x) = número de exemplares da planta
♦a = base = número de descendentes gerados a cada ano, por planta = 10
♦x = expoente = número de períodos de tempo (ano) considerado = 5

PESQUISA:

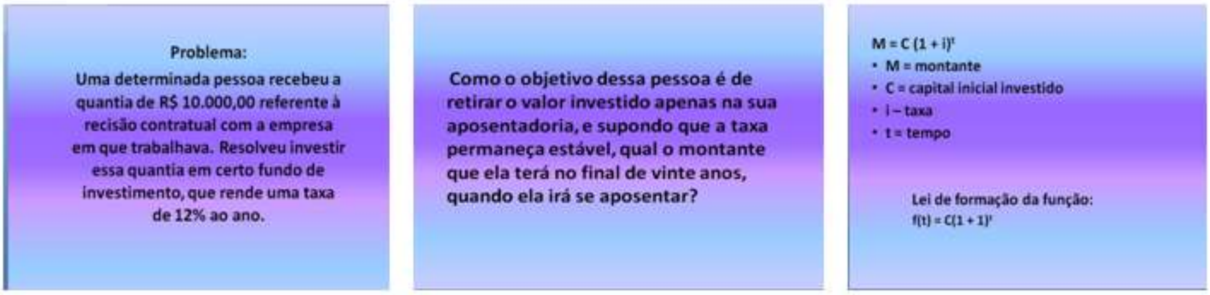
Após a apresentação dos problemas citados e a das suas resoluções, foi solicitado aos alunos que efetuassem uma pesquisa na Internet sobre outras aplicabilidades da Função Exponencial na vida do ser humano. Essa pesquisa será em casa e o resultado será compilado e apresentado ao grupo de discentes através de slides na TV pen drive, mostrando, dessa forma, a grande utilidade da Função Exponencial.

Atividade 5

- **Assunto:** Função Exponencial com enfoque em Matemática Financeira,
- **Habilidade relacionada:** H 58 – Resolver problemas envolvendo a função exponencial.
- **Objetivos:** Reconhecer uma função exponencial como um modelo para situações de nosso cotidiano.
- **Pré-requisitos:** Potenciação e Noção de Porcentagem.
- **Tempo de duração:** 100 minutos
- **Recursos educacionais utilizados:** folha de atividade, lápis, slides, TV e pen drive.
- **Organização da turma:** Turma disposta em grupos de 4 alunos.
- **Metodologia adotada:** Aulas expositivas com resoluções de situações-problemas envolvendo Função Exponencial, disponibilizadas através de slides. Acompanhar as duplas durante a resolução e pedir que compartilhem não somente os resultados, mas a forma que utilizaram para resolver. Pode ser que os alunos expliquem de formas diferentes a resolução de um mesmo desafio.

❖❖❖

As situações-problema apresentadas pelos alunos na aula anterior, juntamente com as devidas fórmulas foram elaboradas em slides. Através de slides na TV pen drive foram apresentados aos alunos. A resolução do problema foi feita em grupo de 4 alunos utilizando a calculadora. O conteúdo abordado é Função Exponencial com enfoque em Matemática Financeira, , etc.
Os slides da compilação estão abaixo representados:



Slides 1

Slides 2

Sllides 3

Sllides 4

Posteriormente, orientar os grupos a criarem 1 desafio que envolva, em sua resolução, os conteúdos trabalhados. Sugerir que os alunos troquem os desafios entre os grupos para que sejam solucionados, de modo que cada grupo terá que solucionar 1 desafio diferente do que foi criado. Posteriormente, oriente que cada grupo exponha para a turma os desafios e as estratégias utilizadas nas respectivas resoluções.

Avaliação

A análise da aprendizagem dos alunos será feita observando três aspectos:

- Será aplicado um exercício em dupla para análise do aprendizado dos alunos em relação aos conceitos de função exponencial, considerando o desenvolvimento e o empenho das duplas na prática das atividades propostas.
- Será aplicada uma avaliação individual.
- Será avaliada a elaboração e resolução dos desafios envolvendo os conteúdos trabalhados

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática Ensino Médio.** Vol. 1. , 6ª Ed. São Paulo: Editora Saraiva 2010.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. Vol. 1. São Paulo: Editora Moderna, 2009.