FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA FUNDAÇÃO CECIERJ/SEEDUC-RJ

Matemática 3ºE.M – 3º Bimestre/2013

Plano de Trabalho 1
Números Complexos

Tarefa 1
Cursista: Vinícius Bento Ferro
Tutora: Maria Cláudia Padilha Tostes

S u m á r i o

INTRODUÇÃO

O presente plano de trabalho tem como objetivo maximizar o entendimento sobre números complexos com uma definição e aplicação adequada para o assunto.

Com o anseio de ampliar a percepção do estudo de números complexos de modo a provocar a visualização de cada aluno para a sensibilidade da utilização diária e contextualizada do conteúdo de modo a se tornar uma realidade em suas vidas.

Sabemos que não temos uma tarefa fácil pela frente, visto que números complexos necessitam de muitos conceitos anteriores para o verdadeiro desenvolvimento, isto é, necessita englobar todos os conjuntos numéricos, quando trabalharmos o conjunto de números complexos precisamos de um conhecimento de álgebra, geometria, trigonometria, plano cartesiano, radiciação, racionalização de denominadores, domínio e habilidade do jogo de sinais, entre outros conteúdos. Com o intuito de adquirir significado ao longo da vida acadêmica dos alunos.

Com intuito de apresentar o conceito de números complexos de forma contextualizada e lúdica, tendo como foco principal a importância e o significado do conceito de números complexos, não privilegiando apenas o conhecimento de fórmulas, regras e operações.

Na medida em que os conceitos envolvidos nos números complexos sejam explorados, discutidos e aplicados, de forma que proporcione uma aprendizagem significativa, como também o desenvolvimento das habilidades esperadas.

Atividade 1

<u>Área de conhecimento</u>: Matemática

<u>Assunto</u>: Números Complexos

<u>PRÉ-REQUISITOS:</u> Operações elementares com números reais; identificação de raízes de uma função a partir da sua representação gráfica; determinação das raízes de uma função a partir da sua representação algébrica; produtos notáveis.

<u>TEMPO DE DURAÇÃO:</u> 100 minutos.

<u>RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:</u> Folha de atividades, lápis e calculadora. Vídeo do youtube: Números complexos, Argand-Gauss e Plano complexo - (http://youtu.be/UG0xVl_NNNA).

<u>ORGANIZAÇÃO DA TURMA:</u> Turma organizada em grupos de 3 ou 4 alunos, propiciando trabalho organizado e colaborativo.

<u>OBJETIVOS:</u> Apresentar os números complexos de uma forma histórica e contextualizada.

<u>DESCRITORES ASSOCIADOS</u>:

H46 - Reconhecer números reais em diferentes contextos.

Abordagem histórica dos números complexos

Para iniciar a aula, iremos apresentar a História da Matemática para mostrar aos alunos o motivo do surgimento de cada conjunto numérico e contar aos alunos de forma dinâmica, descontraída e, principalmente, na linguagem dos alunos a fim de que compreendam e participem de possíveis debates e finalmente a percepção dos números complexos.

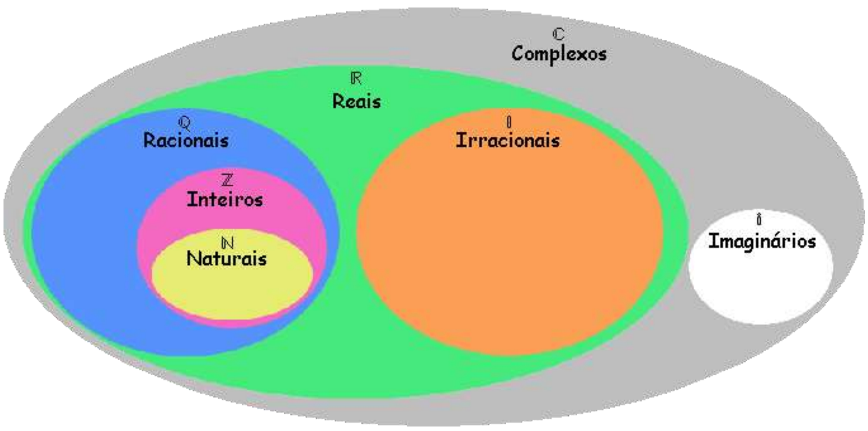
Historicamente, os números complexos começaram a ser estudados graças à grande contribuição do matemático Girolamo Cardano (1501-1576). Esse matemático mostrou que mesmo tendo um termo negativo em uma raiz quadrada era possível obter uma solução para a equação do segundo grau: $x^2 - 10x + 40 = 0$. Essa contribuição foi de grande importância, pois até então os matemáticos não acreditavam ser possível extrair a raiz quadrada de um número negativo. A partir dos estudos de Girolamo Cardano, outros matemáticos estudaram sobre esse impasse na matemática, obtendo uma formalização rigorosa com Friedrich Gauss (1777-1855).

O conjunto dos números complexos é o conjunto que possui maior cardinalidade, afinal ele contém todos os outros conjuntos. É necessário, pois, compreender os processos das operações (aritméticas, trigonométricas, algébricas) envolvendo elementos desse conjunto, assim como a representação geométrica dos números complexos.

Portanto, nessa seção serão abordados assuntos como: concepções básicas do número complexo, operações aritméticas com números complexos, operações trigonométricas com os números complexos, o Plano de Argand-Gauss, entre outros artigos que se relacionam com os números complexos – números de grande importância e aplicabilidade.

Conjuntos Numéricos em Diagrama

No diagrama abaixo observamos que o conjunto dos números reais é um subconjunto do conjunto dos números complexos.



Através deste diagrama podemos concluir que todo número real é complexo, mas nem todo número complexo é real, pois um número complexo pode possuir uma parte imaginária, mas os números reais não a possuem.

Números Imaginários

No conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) a $\sqrt{25}$ é igual a 5, mas qual é a $\sqrt{-25}$?

Como sabemos, não existe a raiz quadrada real de um radicando negativo com índice par. No conjunto dos números reais o máximo que podemos fazer é simplificar o radical desta forma:

$$\sqrt{-25} = \sqrt{-1 \cdot 5^2} = 5\sqrt{-1}$$

Ainda assim o fator $\sqrt{-1}$ não é um número real, pois o radicando -1 é um número negativo.

Unidade Imaginária

A solução para este tipo problema surgiu com a criação dos números imaginários, cuja unidade imaginária representada pela letra **i**, é igual a $\sqrt{-1}$.

Utilizando-se do conceito de número imaginário podemos dizer que a $\sqrt{25}$ é igual a 5i, pois:

$$\sqrt{-25} = \sqrt{-1 \cdot 5^2} = 5\sqrt{-1} = 5i$$

Agora vamos solucionar a equação do segundo grau abaixo:

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

O primeiro passo é calcularmos o seu discriminante:

$$\Rightarrow \quad \Delta = 4 - 20 \quad \Rightarrow \quad \Delta = -16$$

Como o discriminante é negativo, a equação não possui raízes reais:

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-2}{2} \pm \frac{4\sqrt{-1}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = -1 \pm 2\sqrt{-1}$$

Mas possui raízes imaginárias ao substituirmos $\sqrt{-1}$ por **i**:

Nos dois exemplos acima, $\sqrt{-25}$ e $\sqrt{-16}$, temos um radicando que é o valor simétrico de um quadrado perfeito, ou seja, o oposto de 25 e de 16, que são quadrados perfeitos, mas mesmo que não o fossem, ainda assim poderíamos trabalhar com o conceito de números imaginários.

Vejamos o exemplo do número $\sqrt{-13}$:

$$\sqrt{-13} = \sqrt{-1 \cdot 13} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{13} = i\sqrt{13}$$

Observe que não eliminamos o radical, pois o número 13 não é um quadrado perfeito, mas agora temos um radicando positivo.

Quadrado perfeito é qualquer número inteiro maior ou igual a zero, que podemos representar pelo quadrado de um número também inteiro, por exemplo, 144 é um quadrado perfeito, pois: $144 = 12^2$

Há casos em que alguns fatores do número saem do radical e outros fatores não. Veja o exemplo do número $\sqrt{-24}$:

Números Complexos

Ao estudarmos os conjuntos numéricos fundamentais vimos que os números racionais podem ser expressos na forma de uma fração, com numerador e denominador inteiros e com denominador diferente de zero:

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q},\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0$$

De forma semelhante os números complexos podem ser representados por meio de uma expressão algébrica:

$$z = a + bi$$

Sendo a e b números reais e i a unidade imaginária.

a é a parte real do número complexo **z** e **bi** é a sua parte imaginária.

Definimos o conjunto dos números complexos como:

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi\colon a,\ b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\}$$

O conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) e o conjunto dos números imaginários (são subconjuntos do conjunto dos números complexos ($\mathbb{C}$). Em função disto um número complexo pode ser imaginário, imaginário puro ou real.

Exemplos de Números Imaginários

Para a ≠ 0 e b ≠ 0 temos um número imaginário:

- $z = 8 + 4i$
- $z = -3 + 2i$
- $z = 7 - 6i$

Como podemos observar um número imaginário possui uma parte real e outra imaginária.

Exemplos de Números Imaginários Puros

Para a = 0 e b ≠ 0 temos um número imaginário puro:

- $z = 0 + 5i \Rightarrow z = 5i$
- $z = 0 - 3i \Rightarrow z = -3i$
- $z = 0 + i\sqrt{2} \Rightarrow z = i\sqrt{2}$

Números imaginários puros possuem apenas a parte imaginária.

Exemplos de Números Reais

Para a ≠ 0 e b = 0 temos um número real:

- $z = 3 + 0i \Rightarrow z = 3$
- $z = -2 + 0i \Rightarrow z = -2$
- $z = \sqrt{3} + 0i \Rightarrow z = \sqrt{3}$

Números reais não possuem a parte imaginária.

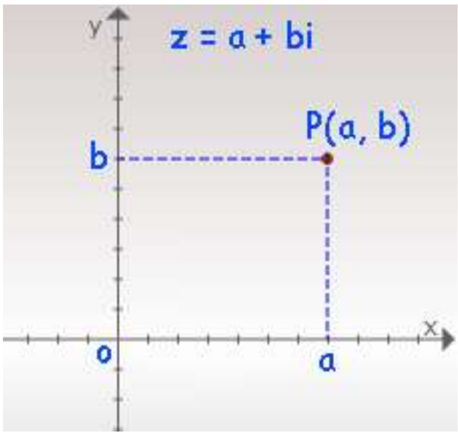
Plano Complexo

Quando apresentamos o plano cartesiano vimos que o mesmo pode ser utilizado na localização gráfica de pontos em um determinado plano.

Ao estudarmos as funções o utilizamos na representação gráfica da sua curva.

Neste tópico vemos outra aplicação do plano cartesiano que é denominada Plano Complexo.

No Plano Complexo ou Plano de Argand-Gauss o eixo das abscissas é chamado eixo real e o eixo das ordenadas chamamos de eixo imaginário.



O ponto P representa graficamente o número complexo z = a + bi.

Observe que o valor a da abscissa representa a sua parte real e o valor b da ordenada representa a sua parte imaginária.

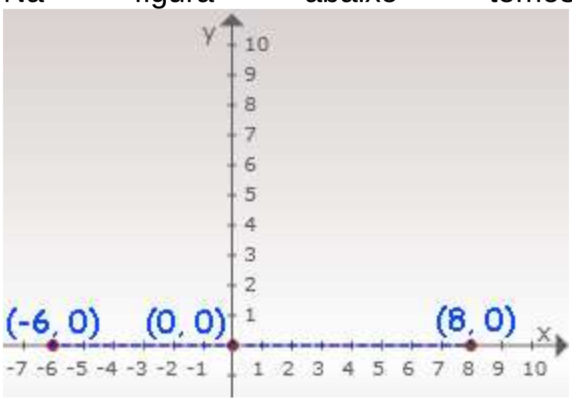
Denominamos o ponto P de afixo ou imagem do número complexo.

Exemplos de Afixos

Afixos Reais

Se um afixo pertence ao eixo das abscissas temos a representação de um número real, pois a sua parte imaginária é nula.

Na figura abaixo temos os seguintes afixos:

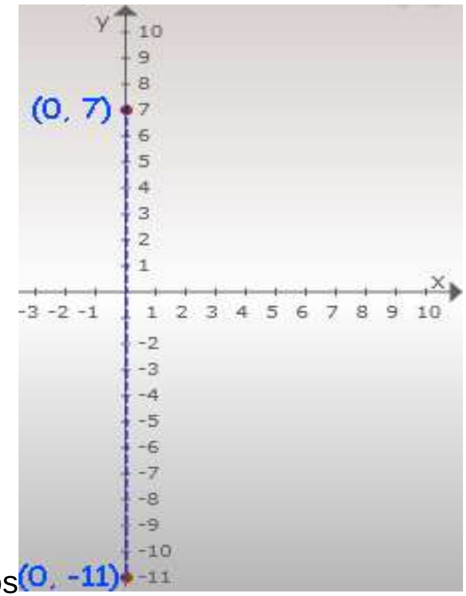


- (-6, 0) = -6 + 0i = -6
- (0, 0) = 0 + 0i = 0

▸ (8, 0) = 8 + 0i = 8

Veja que todos os três afixos pertencem ao eixo das abscissas, por isto a ordenada é zero, o que indica que a parte imaginária do número complexo é nula, ou seja, temos a representação de três números reais.

Os número reais não precisam de um plano para serem representados graficamente. Eles podem ser representados em uma reta real.



Afixos Imaginários Puros

Nesta outra figura temos afixos pertencentes ao eixo das ordenadas.

Nela temos os afixos de dois números imaginários puros:

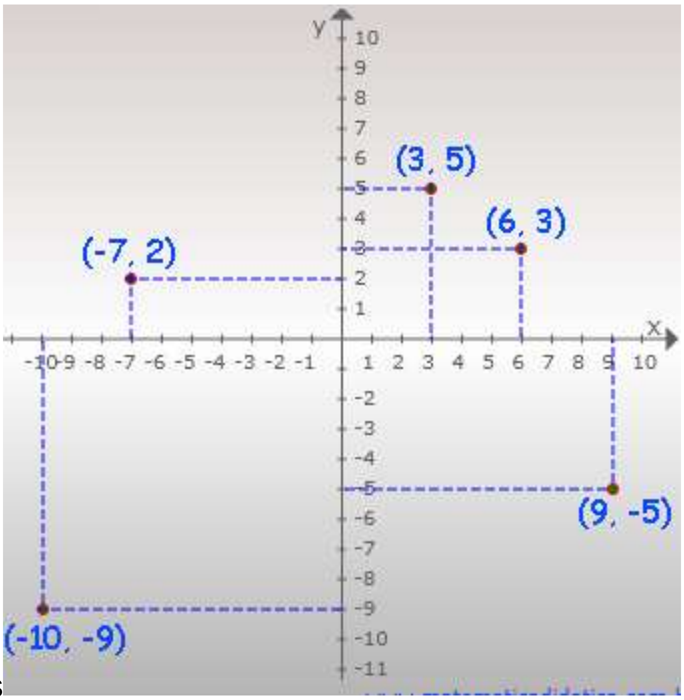
▸ (0, 7) = 0 + 7i = 7i

▸ (0, -11) = 0 - 11i = -11i

Por pertencerem ao eixo das ordenadas, a parte real dos números complexos representados por estes afixos é nula, por isto temos um número imaginário puro.

Note que o afixo (0, 0) embora tenha abscissa nula é real, pois a sua ordenada também é nula.

Este afixo foi visto acima, já que se trata de um afixo real.

Afixos Imaginários 

Na figura ao lado temos cinco afixos representando os seguintes números complexos:

- (3, 5) = 3 + 5i
- (6, 3) = 6 + 3i
- (-7, 2) = -7 + 2i
- (-10, -9) = -10 - 9i
- (9, -5) = 9 - 5i

Todos estes cinco afixos representam números imaginários quem contêm uma parte real e uma parte imaginária.

Finalizando com uma apresentação de um “Vídeo do youtube: Números complexos, Argand-Gauss e Plano complexo.” (http://youtu.be/UG0xVl_NNNA).

Datashow com exemplos de números naturais, inteiros, racionais, irracionais, reais e números complexos.

Atividade 2

HABILIDADE RELACIONADA: Números Complexos no Plano

DURAÇÃO PREVISTA: 100 minutos.

ÁREA DE CONHECIMENTO: Matemática.

ASSUNTO: Números Complexos.

OBJETIVOS: Apresentar o plano de Argand-Gauss e a representação polar dos números complexos.

PRÉ-REQUISITO: Representação algébrica dos números complexos; plano cartesiano; razões trigonométricas no triângulo retângulo; razões trigonométricas na circunferência; Teorema de Pitágoras.

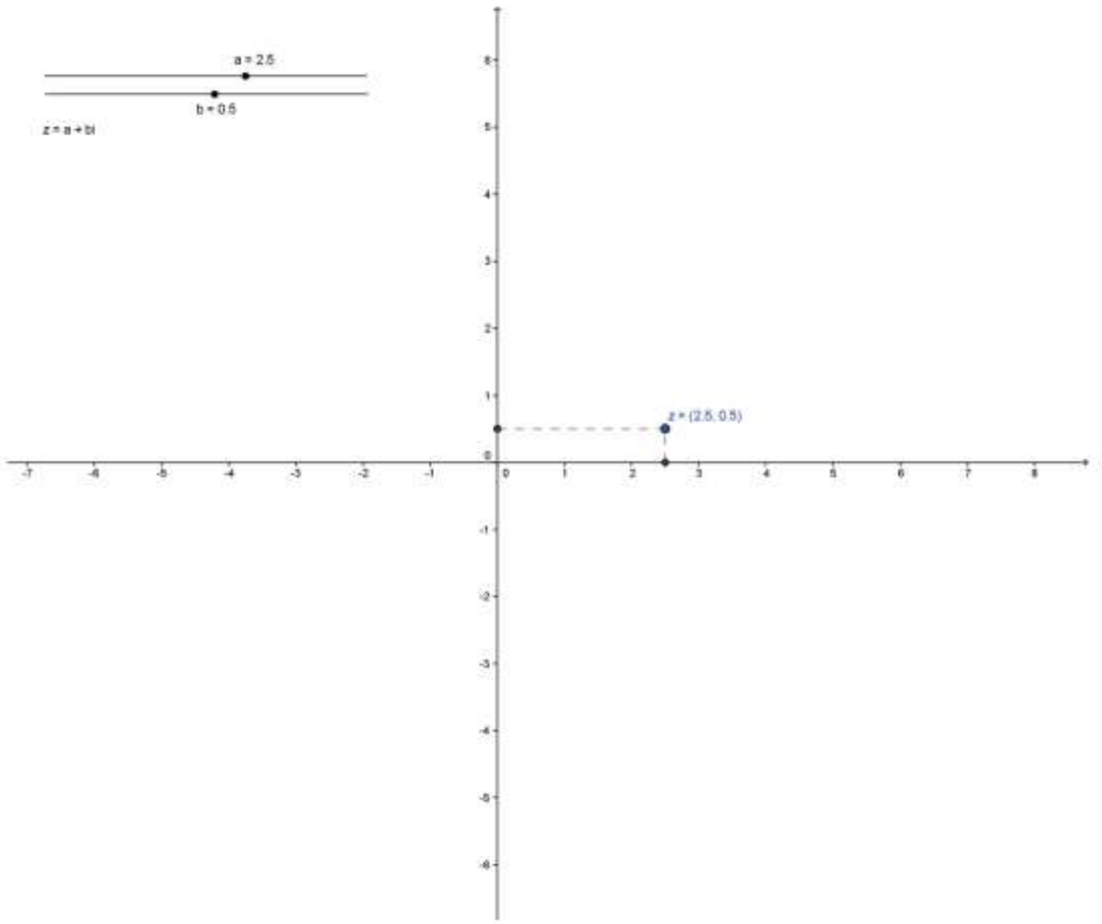
MATERIAL NECESSÁRIO: Folha de atividades; computador com o software Geogebra instalado e os arquivos disponibilizados.

ORGANIZAÇÃO DA CLASSE: Turma disposta em duplas ou trios no laboratório de informática.

DESCRITOR ASSOCIADO: H36 – Efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica.

Números Complexos no Plano

Você deve estar vendo uma tela como a seguinte.



Nela você vê dois controles deslizantes e um ponto indicado por z juntamente com as suas coordenadas.

1. Para começar, você deve mover os parâmetros a e b e observar o que acontece com o ponto z.

2. Você consegue marcar qualquer ponto do plano alterando os parâmetros? Troque ideias com seus colegas.

Você já deve saber que os números complexos podem ser representados na forma z= a+bi, chamada forma algébrica. Naturalmente, podemos associar a cada número complexo o par ordenado (a;b).

3. Você acha que o ponto z indicado no plano, pode representar um número complexo? Por quê? Veja o que seus colegas pensam a respeito e tentem chegar a uma conclusão.
Quando o plano é visto como um plano no qual podemos representar os números complexos, ele é chamado Plano de Argand-Gaus, em homenagem a dois matemáticos importantes não apenas no estudo dos números complexos, mas, sobretudo por terem se dedicado à representação desses números de maneira geométrica.

4. Diga o que cada um dos eixos do Plano de Argand-Gauss representa.

5. É possível que mais de um número complexo esteja representado por um mesmo ponto? Por quê?

6. É possível que mais de um ponto represente o mesmo número complexo? Troque ideias com seus colegas e justifique sua resposta.

Agora, encontre os pontos no plano cujos números complexos obedecem às seguintes propriedades:
(a) Tem parte real igual a zero;
(b) Tem parte imaginária igual a zero;
(c) Tem parte real igual à parte imaginária;
(d) A parte imaginária é igual ao dobro da parte real mais três unidades.

No item a, os alunos devem perceber que esses números se encontram sobre o eixo imaginário.

Já o item b, corresponde a todos os pontos do eixo real.

No item c, esperamos que os alunos consigam perceber que esses números encontram-se sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares, ou seja, sobre a reta $y = x$.

Se você perceber que a turma teve dificuldade em entender esse item, você pode dar uma explicação – por exemplo, usando o próprio Geogebra para marcar diversos pontos com essa propriedade – e solicitar que os alunos respondam a outras perguntas, como por exemplo: “números complexos com parte imaginária igual a 2” (números sobre uma reta paralela ao eixo real na altura 2); “números complexos com parte real igual a 2” (números sobre uma reta paralela ao eixo imaginário); “números complexos com parte imaginária igual ao simétrico da parte real” (números sobre a reta bissetriz dos quadrantes pares, $y=-x$).
Para o item d, os alunos devem perceber que os números estão sobre a reta $y=2x+3$.

Atividade 3

HABILIDADE RELACIONADA: Operações com números complexos.

DURAÇÃO PREVISTA: 100 minutos.

ÁREA DE CONHECIMENTO: Matemática.

ASSUNTO: Números Complexos

OBJETIVOS: Compreender e efetuar operações com números complexos em sua forma algébrica.

PRÉ-REQUISITO: Operações elementares com números reais; compreensão sobre as representações dos números complexos.

MATERIAL NECESSÁRIO: Computador com datashow.

ORGANIZAÇÃO DA CLASSE: Pequenos grupos de dois ou três alunos cada.

DESCRITORES ASSOCIADOS:
H36 - Efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica.

Soma e Subtração de Números Complexos

Nesta atividade, você terá contato com as operações de soma e subtração envolvendo números complexos. Na verdade, você descobrirá que elas muito se assemelham a outros conceitos já estudados anteriormente. Preparado?
Por exemplo, como faríamos a soma dos números complexos $z = 2$ e $w = 4$?
Uma vez que todo número real é um número complexo, tanto faz somarmos complexos que possuam apenas a parte real, apenas a parte imaginária, ou ambas.

Um cuidado deve ser tomado: a unidade imaginária i distingue a parte real da parte imaginária e, sendo cada parte de natureza distinta, não podemos simplesmente uni-las. Assim, o procedimento de soma de dois números complexos se assemelha ao de soma de expressões algébricas de acordo com a forma $ax + b$.

Sob esta ótica, temos, por exemplo:

$z = 2 + 3i$; $w = 5 + 2i$

$z + w = 2 + 3i + 5 + 2i = (2 + 5) + (3 + 2)i = 7 + 5i$

1. Agora efetue as somas $z + w$ abaixo:

a. $z = 3$; $w = 5$
b. $z = 2i$; $w = 4i$
c. $z = 5$; $w = 3i$
d. $z = 2 + 3i$; $w = 3$
e. $z = 3 + 5i$; $w = 3 + 2i$

Multiplicação e Divisão

Assim como fizemos na soma/subtração, podemos considerar a multiplicação e a divisão como uma operação envolvendo a forma algébrica, da mesma forma que fazemos com as expressões algébricas.
E mais: você lembra da "racionalização do denominador de uma fração"? Esse é um procedimento bastante efetuado no estudo de frações envolvendo expressões algébricas e números irracionais. Será utilizado aqui também!

1. Inicialmente, tente efetuar a operação $z \cdot w$, com $z = 3 + 2i$ e $w = 4$.

2. Agora vamos complicar um pouco. Efetue a operação $z \cdot w$, com $z = 2 + 4i$ e $w = 3i$. Não esqueça que, podemos considerar que $i^2 = -1$.

3. Efetue $z \cdot w$, com $z = 2 – 3i$ e $w = 5 – i$.

4. Bom tente efetuar a seguinte divisão: $z : w$, com $z = 6 – 4i$ e $w = 2$.

5. $z : w$, com $z = -9i$ e $w = 3i$.

6. $z : w$, com $z = 6 – 4i$ e $w = 2i$.

7. $z : w$, com $z = 4 – 3i$ e $w = 2 + i$.

8. Qual o valor de i^2?

9. Você pode, a partir do valor de i^2, obter o valor de i^3? Como?

10. Agora que você tem o valor de i^3, é capaz de calcular i^4? Como?

11. O que aconteceu no momento em que calculou o valor de i^4? Você consegue explicar o motivo?

12. Obtenha os valores de i^5, i^6, i^7 e i^8.

13. Calcule i^{10}.

14. Você consegue visualizar qual é esta relação? Explique a seguir.

15. Encontre o valor das seguintes potências de i:

a) i^{21}
b) i^{87}
c) i^{221}
d) i^{1024}

16. Efetue $(2 + 3i)^2$.

17. Efetue:

a. $(2 + 3i)^3$

b. $(1 – i)^3$

18. Agora, efetue $(2 – 3i)^4$.

19. Agora que você já sabe como efetuar multiplicações, divisões e potenciações, efetue as operações solicitadas:

a) $z \cdot w$, sendo que $z = -1 + i$; $w = 3 + 5i$

b) $z : w$, sendo que $z = 5 + 4i$; $w = -i$

c) $w : z$, sendo que $z = 2 - 2i$; $w = 5 + 2i$

d) $z \cdot w$, sendo que $z = 2 + 2i$; $w = 2 - 2i$

e) $w : z$, sendo que $z = 4$; $w = 4 + 3i$

f) z^3, sendo que $z = 3 – i$

g) z^2, sendo que $z = 4 + 2i$

Avaliação

O trabalho com números complexos nos oferece uma infinidade de situações onde podemos trabalhar e avaliar a capacidade dos alunos em utilizar o que aprendeu para solucionar problemas com maior complexidade. Analisar o desenvolvimento das atividades como importante parâmetro do processo de avaliação. A partir delas é possível indicar os principais pontos de obstrução do conhecimento.

É muito interessante que além do trabalho com habilidades matemáticas possamos incentivar a cultura geral de nossos alunos e aproveitar cada oportunidade para que o desenvolvimento cognitivo dos alunos seja constante, rico e pleno.

O aluno ao final do TP1 deverá ser capaz de:

- Efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica.
- Identificar e conceituar a unidade imaginária.
- Resolver uma situação-problema, representando números complexos através de algumas situações apresentadas em diferentes formas.
- Identificar o conjunto dos números complexos e representar um número complexo na forma algébrica.
- Calcular expressões envolvendo as operações com números complexos na forma algébrica.
- Observar gráficos e situações que envolvam números complexos.
- Reconhecer números complexos em diferentes contextos.
- Calcular potências de expoente inteiro da unidade imaginária.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES SOBRE ESTE PLANO DE TRABALHO

Ele foi preparado levando em consideração o tempo disponível de aulas para a turma 3002 do COLEGIO ESTADUAL REPUBLICA DO LIBANO no 3° bimestre do ano letivo em curso (2013) e o grau de conhecimento dos alunos. Informo que, infelizmente, não constam muitas atividades que envolvam o programa Geogebra ou utilização intensa do computador porque apenas 6 computadores estão disponíveis para os alunos na sala de informática, o que dificulta trabalhos desse tipo.

Obviamente há detalhes e atividades interessantes que poderão ser acrescentados caso o tempo permita, que podem prender a atenção dos alunos e mostrar ainda mais a aplicabilidade do tema.

Fontes de pesquisa

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ROTEIROS DE AÇÃO – Números Complexos – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 3° ano do Ensino Médio – 3° bimestre/2013-http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ acessado em 18/08/2013.

DANTE, Luis Roberto. Tudo é Matemática. 3ª ano E.M 2 ed. São Paulo: Ática, 2005.

MATEMÁTICA PAIVA, 3º Ano/Manoel PAIVA – 1º Edição – São Paulo: Moderna, 2009.

Endereços eletrônicos acessados citados ao longo do trabalho:

http://youtu.be/UG0xVl_NNNA> Acesso em: 20 ago. 2013.

<http://www.portalsaofrancisco.com.br > Acesso em: 21 ago. 2013.

MATEMÁTICA Didática. Números Complexos. Disponível em: <http://www.matematicadidatica.com.br/ Acesso em: 24 ago. 2013.