CÍNTIA TEIXEIRA DIAS

POLINÔMIOS

Trabalho apresentado ao curso de Formação Continuada
Fundação CECIERJ/ Consórcio Cederj

Tutora: Maria Cláudia Padilha Tostes
Grupo 1
Curso: Matemática – 3ª série do ensino Médio

RIO DE JANEIRO
2013

INTRODUÇÃO

O objetivo deste plano de estudo é apresentar para os alunos o conceito de Polinômios de uma forma simples e clara, trazendo primeiramente um vídeo para que os alunos compreendam a importância dos polinômios dentro da matemática e no nosso cotidiano.

É muito importante que ao final das aulas, o aluno tenha entendido a importância do estudo do tema, a sua aplicabilidade e bem como efetuar as operações com polinômios. Também será ensinado aos alunos um dispositivo que auxilia na divisão de polinômios: o dispositivo de Briot-Ruffini. Esse dispositivo utiliza a raiz do polinômio e seus coeficientes para calcular a divisão do polinômio pela sua raiz.

Para a totalização do plano, serão necessárias 10 aulas de quarenta e cinco minutos, para desenvolvimento dos conteúdos, mais dois tempos para a avaliação da aprendizagem.

POLINÔMIOS

Área de conhecimento: Matemática

Assunto: Polinômios

Pré-requesitos: Os algoritmos das operações com números inteiros e potenciação.

Tempo de duração: 10 aulas (450 minutos)

Recursos: Computador com Datashow, Folhas de atividade, Quadro branco, Caneta para quadro branco, Apagador e Livro Didático

Conteúdos Específicos:

- Definição de polinômio
- Função Polinomial
- Valor numérico
- Raiz de um polinõmio
- Operações com polinômios
- Dispositivo prático de Briot- Ruffini

Objetivos:

- Reconhecer um polinômio.

-Determinar o grau de um polinômio não identicamente nulo.

- Calcular o valor numérico de um polinômio.
- Efetuar adições, subtrações, multiplicações e divisões com polinômios.

- Utilizar o Algoritmo de Briot-Ruffini como ferramenta na busca por raízes de um polinômio.

Organização da turma: Individual.

Metodologia:

Aula 1: (180 minutos)

Para iniciar aula, o professor apresenta o vídeo disponível em http://www.youtube.com/watch?v=f7ED1pDFlng, que traz uma aplicabilidade para o tema. O vídeo é bem interessante, com curta duração e traz de uma forma bem simples a definição de polinômio, o valor numérico e também a sua aplicabilidade em nosso dia-a-dia.

Depois da apresentação do vídeo, o professor utiliza o livro didático e mostra a definição do polinômio, o grau de um polinômio e como calcular o valor numérico do polinômio.

O professor entrega a seguinte lista de exercícios aos alunos para o aprofundamento do estudo.

Folha de Atividade 1 – Polinômios – 4º bimestre – 3º ano do Ensino Médio

1 – Determine o grau de cada polinômio abaio:

a) $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 4x - 1$
b) $P(x) = 3$
c) $P(x) = -x^8 + 3x^4$

d) $P(x) = x - 2$

2 – Determine o valor numérico do polinômio $P(x) = 2x^2 - 5x + 1$ para :

a) $x = 2$
b) $x = 0$
c) $x = i$
d) $x = -3$

3 – Dado o polinômio $P(x) = 5x^3 + ix^2 - 2i$, determine:

a) $P(i) =$
b) $P(1) =$

4 – Verifique se -2 é a raiz do polinômio $P(x) = x^3 + 4x^2 + \frac{5}{2}x - 3$.

5 – Dado o polinômio $P(x) = 2x^5 - 3x^3 - 4x$, determine:

a) $P(-1) =$
b) $P(2) =$
c) $P(3) =$

Aula 2: (180 minutos)

Para esta aula, iremos usar um roteiro de ação onde vamos propor que os alunos reconheçam e delimitem algoritmos de operações como soma, subtração, multiplicação e divisão de polinômios, a partir dos algoritmos que eles conhecem para estas mesmas operações com números naturais. Será distribuído a folha de atividade a seguir :

Folha de Atividade 2 – Polinômios – 4º bimestre – 3º ano do Ensino Médio

1.Você lembra o motivo de ao somarmos 134 com 256 dispormos os números um abaixo do outro respeitando as classes de unidades? Tente descrever tal motivo em uma linha.

____

Possivelmente seus alunos não saberão responder corretamente a esta questão, mas, esperamos que eles façam referência a obrigação de somarmos unidades com unidades, dezenas com dezenas e assim por diante!.

2. É possível aproveitar a ideia do algoritmo da soma e da subtração de números naturais para realizar somas e subtrações de polinômios. Veja o exemplo inacabado a seguir abaixo e complete o que falta sob a linha pontilhada.

$$\begin{array}{lrrrrr} & 2x^4 & -\,3x^3 & & +\,2x & \\ + & & 2x3 & -\,x2 & & +\,1 \\ \hline & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & -x2 & +\,2x & +\,1 \end{array}$$

3. Considere o que você observou no item anterior e calcule utilizando o mesmo algoritmo, o valor de

a) p(x) + q(x) , sabendo que p x = $3x^5 - 4x^3 + x^2 - 2x + 1$ e

$q(x) = -x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3.$

b) p(x) - q(x) , sabendo que $p\,x = 3x^5 - 4x^3 + x^2 - 2x + 1$ e

$q(x) = -x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3.$

4. Para realizar a subtração indicada no item (b) da questão 3 não foi possível operar exatamente como fazemos no algoritmo de subtração de números naturais. Descreva com suas palavras o que mudou.

____

Esperamos que os alunos observem (isso pode não acontecer em muitos casos!) que no algoritmo de subtração de números inteiros a subtração pressupõe que haja um maior número como a primeira parcela da subtração. No entanto, na subtração de polinômios isso não acontece, pois não há aquele que seja o maior. Assim como não acontece de as operações com as parcelas independerem do algoritmo.

5. Observe o cálculo disposto na primeira coluna (à esquerda) abaixo. Inspire-se nele para sugerir um algoritmo para a multiplicação de polinômios como o que aparece incompleto no lado direito abaixo.

125	$-x^3 + 2x - 1$
x 12	x $x^2 - 3x$

250	$3x^4 \quad - 6x^2 + 3x$
1250	$-x^5 \quad + 2x^3 - x^2$
1500	

Observe que os algoritmos desse item são "PARECIDOS", mas há diferenças importantes. No que utilizamos com números, a multiplicação deve seguir a ordem: unidades, dezenas, centenas e etc. Já no outro, isso não é necessário. Além disso, há outras diferenças. Verifique você mesmo!

Ressalte que aqui não teremos o "vai um", e que a multiplicação por certa classe não precisa ser de mesma classe ou da próxima. Observe se os alunos lembram a propriedade de potenciação $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, se isso não ocorrer dê exemplos justificando esta propriedade da operação com potências.

6. O cálculo de p(x). q(x) também pode ser realizado utilizando a distributividade, como assinalado na ilustração abaixo. Utilize esta propriedade para realizar p(x) . q(x) = $(x^2 - 3x) . (- x^{3+} 2x -1)$ e compare com o resultado anterior.

7. Indique algoritmo de sua preferência para a realização da multiplicação de dois polinômios. Pense no que pode acontecer em outros casos para certificar o seu gosto.

8. Observe agora o algoritmo de divisão de números naturais abaixo e tente completar o algoritmo sugerido ao lado.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
12x^3 & +\,0x^2 & -\,4x & +\,9 & 2x^2 + x + 3 \\ \cline{5-5}
\underline{-12x^3} & \underline{-\,6x^2} & \underline{-\,18x} & & 6x - 3 \\
 & -6x^2 & -\,22x & +\,9 & \\
 & \underline{+6x^2} & \underline{+\,3x} & \underline{+\,9} & \\
 & & -\,19x & +\,18 &
\end{array}
$$

10. Agora fique atento às comparações! Observe o que você fez no item anterior com a ajuda de seu professor e complete a tabela abaixo.

Com números naturais	Com polinômios
O divisor é menor que o dividendo	O grau...
A multiplicação do quociente pelo divisor somada ao resto é igual ao dividendo.	A multiplicação...
O resto é sempre menor que o divisor.	O grau...
A divisão termina quanto o resto é menor que o divisor.	A divisão termina quando o grau do resto é...

10. Agora, considere que p (x)= $2x - 1$, t(x) = $x^3 - 2x^2 + x - 1$, u(x)= $x^4 - 5x + 2$ e

$V(x) = 3x^3 + 4x2 - 1$. E, quando possível, calcule as operações indicadas abaixo, indicando o resultado, quociente e resto, quando foro caso. Se a operação não for possível justifique!

a) $p(x) - u(x) =$

b) $v(x) . u(x) =$

c) $p(x) + u(x) – v(x) =$

d) $p(x) \div v(x) =$

e) $u(x) \div t(x) =$

f) $v(x) . p(x) - v(x) . u(x) =$

g) $v(x) . u(x) + p(x) =$

h) $u(x) + p(x) =$

Professor neste último item é importante que você ressalte as propriedades do Anel de Polinômios. Veja que os alunos podem utilizar a comutatividade da soma no item “c”, da multiplicação para resolver o item “g” aproveitando o resultado do item “b”; a distributividade no item “f” aproveitando o resultado do item “a”; a propriedade do desenvolvimento dos binômios quadrados perfeitos para resolver o item “i” aproveitando os resultados dos itens “a” e “h” .

Para enriquecer e aprimorar os conteúdos aprendidos neste roteiro, serão trabalhados também exercícios do livro didático sobre operações com polinômios.

Aula 3: (90 minutos)

Iniciar a aula dizendo que existe um algoritmo prático para efetuar a divisão de polinômios, dispositivo este que recebeu o nome dos matemáticos que o criaram: Paolo Ruffini e A. Briot: Dispositivo de Briot-Ruffini. Esse algoritmo é utilizado para dividirmos polinômios por um binômio do tipo (x-a).

Esse dispositivo usará apenas os coeficientes do polinômio e o termo constante (a).

Chamemos de p(x) o polinômio a ser dividido (dividendo); e h(x) o divisor no qual h(x)= x - a. Com isso, a estrutura do dispositivo é a seguinte:

Termo constante do divisor com sinal trocado = a	Coeficientes de x do dividendo p(x)	Termo constante do dividendo
	Coeficientes do quociente	Resto

Para melhor compreendermos como este dispositivo funciona, utilizá-lo-emos em um exemplo, e explicaremos passo a passo seu processo. Exemplo:

Efetue a divisão de p(x) por h(x), na qual:

$p(x) = x^2 + 4x + 3 \quad e \quad h(x) = x + 1$

-1	1	4	3
	1 (repita o primeiro coeficiente)		

Agora multiplique esse termo repetido pelo divisor, o resultado será somado ao próximo termo do dividendo p(x).

-1	1	4	3
	1	-1+4=3	
	1×(-1)=-1	3	

Repita o processo agora para o novo elemento, multiplique esse número pelo divisor e some-o ao próximo termo.

-1	1	4	3
	1	-1+4=3	-3+3=0
	1×(-1)=-1	3	0
		3×(-1)=-3	

Obtemos o resto 0 e um quociente da seguinte forma:

$q(x) = 1x + 3$

Para verificarmos se a divisão foi feita de forma correta, podemos utilizar o algoritmo da divisão que diz o seguinte:

$$p(x) = h(x).q(x) + r(x)$$

Dessa forma, temos:

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 1).(x + 3) + 0 = x^2 + 3x + 1x + 3$$
$$x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 3$$

Logo, a divisão foi feita corretamente, pois ao verificar os termos da divisão no algoritmo da divisão constatamos que a igualdade é verdadeira.

Depois, são trabalhados os seguintes exercícios com os alunos:

1 – Determine o quociente e o resto da divisão de P(x) por G(x) em cada caso, utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini:

a) $P(x) = 3x^3 – 4x^2 – x + 1$ e $G(x) = x – 2$

b) $P(x) = x^5 – 3x^3 + x2 -1$ e $G(x) = x + 1$

c) $P(x) = x^4 – 21x^2 -10x -1$ e $G(x) = x – 5$

d) $P(x) = x3 – 3x^2 + 4x – 3$ e $G(x) = x – i$

2 – Determine o valor de a para que o resto da divisão de $P(x) = x^3 – 3x^2 – 2x –a$ por $G(x) = x – 2$ seja igual a 5.

AVALIAÇÃO

A avaliação é um instrumento fundamental para se obter informações sobre o andamento do processo de ensino-aprendizagem e ela será feita em dois momentos distintos:

1. Participação e envolvimento do aluno em todo o desenvolvimento das atividades propostas durante as aulas e na resolução dos exercícios.

2. Avaliação individual, sem consulta ao material de estudo, com duração máxima de 90 minutos, que será aplicada no fim do curso, onde os alunos terão a oportunidade de desenvolver as competências e as habilidades estudadas. Segue o modelo abaixo:

AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA – 4º BIMESTRE – 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

NOME: ___________________________________ Nº _____ TURMA: __________

1 – Observe o seguinte polinômio: $P(x) = 3x^3 – 5x^2 + 4x – 1$. Responda:

a) Qual é o grau do polinômio?

b) Qual é o termo independente do polinômio?

c) Quais são os coeficientes do polinômio?

d) Qual é o coeficiente dominante do polinômio?

2 – Dado o polinômio $P(x) = x^2 - 5x + 3$, calcule:

a) P(1)

b) P(-2)

c) P(3)

3 – Dados $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$, $G(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 1$ e $H(x) = x - 4$, determine:

a) $P(x) + G(x) =$

b) $P(x) - G(x) =$

c) $P(x) . H(x) =$

d) $G(x) . H(x) =$

4 – Em cada caso, obtenha o quociente e o resto da divisão de F(x) por G(x) , utilizando o dispositivo de Briot- Ruffini:

a) $P(x) = -2x^4 + x^3 - 5x^2 - x - 1$ e $G(x) = x + 2$

b) $P(x) = -2x^3 + 4x^2 - 5x + 1$ e $G(x) = x - 3$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1 – **PAIVA,** Manoel. **Matemática – Paiva/ Manoela Paiva**. – 1.ed. – São Paulo: Moderna, 2009.

2 – **IEZZI,** Gelson. **DOLCE,** Osvaldo. **DEGENSZAJN,** David. **PÉRIGO,** Roberto. **ALMEIDA,** Nilze de. **Matemática: ciência e aplicações, 3: ensino médio –** 6.ed. – São Paulo: Saraiva, 2010.

3 – **SILVA,** Cláudio Xavier da. **Matemática aula por aula/** Cláudio Xavier da Silva, Benigno Barreto Filho. – 2e. renov. – São Paulo: FTD, 2005.

4 –. **ROTEIROS DE AÇÃO – Algoritmos por analogia**, Roteiro de ação 2 – Curso de Formação Continuada oferecido por CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 4º bimestre / 2013.

5 – Funções Polinomiais e Polinômios de Preparaçao Digital. Disponível em: <http://www.youtube.com/watch?v=f7ED1pDFlng.>. Acesso em: 26 de outubro de 2013.

6 – OLIVEIRA, Gabriel Alessandro de. Divisão de Polinômios utilizando o Dispositivo de Briot-Ruffini. Disponível em: http://www.brasilescola.com/matematica/divisao-polinomios-utilizando-dispositivo-briotruffini.htm. Acesso em: 26 out. 2013.