Reforço escolar • Matemática •

Média no esporte

Dinâmica 6

3ª Série | 2º Bimestre

Professor

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	3ª do Ensino Médio	Tratamento da Informação	Estatística.

DINÂMICA	Média no esporte
HABILIDADE BÁSICA	H51 - Resolver problemas com números racionais, envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão).
HABILIDADE PRINCIPAL	H73 - Resolver problemas, envolvendo o cálculo da média aritmética, mediana ou moda.
CURRÍCULO MÍNIMO	Resolver problemas, envolvendo o cálculo da média aritmética, mediana e moda. (1 de 2)

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos.

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fundação CECIERJ Consórcio cederj

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar Ideias	Dominó das frações	15 a 20 min	Em 6 grupos, ou menos	Individual
2	Um novo olhar...	Figurinha repetida, não completa álbum!	15 a 20 min	Nos mesmos grupos, com discussão coletiva	Individual
3	Fique por dentro!	Média de gols	25 a 35 min	Nos mesmos grupos, com discussão coletiva.	Individual
4	Quiz	Quiz	10 min	Individual	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quiz	15 min	Coletiva	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor, se tiver dúvidas.			

Professor

Apresentação

O objetivo desta dinâmica é o estudo da média aritmética. Ela é muito utilizada nas escolas para calcular a nota final do aluno, em campeonatos de futebol quando se calcula a média de gols da rodada, por exemplo. Nas análises estatísticas, ela é uma das medidas de tendência central.

Antes disso, a título de revisão, serão propostas atividades sobre adição e subtração de frações. O tema da revisão não está diretamente ligado ao tema do currículo, mas é um assunto importante e pouco conhecido de nossos estudantes que têm dificuldades nos cálculos. Ele está sendo focalizado agora para que possa ser usado na resolução de problemas em geral, quando não seja possível fazer a revisão de todos os pré-requisitos envolvidos.

Como nas demais dinâmicas, você conta com algum tempo para administrar a duração de cada atividade, de acordo com a solicitação e as necessidades da sua turma.

Primeira Etapa
Compartilhar ideias

20 minutos

Atividade • Dominó das frações

Objetivo

Rever frações equivalentes e adição e subtração de frações com o mesmo denominador.

Descrição da atividade

Cada grupo vai receber um jogo de dominós e jogar normalmente. A diferença é que, ao invés dos números de 0 a 6, as peças vêm com frações, adições ou subtrações de frações.

Regras do jogo

O jogo tem 28 peças que devem ser embaralhadas, distribuídas pelos participantes e as restantes ficam sobre a carteira com o verso para cima, como reserva. Seu professor vai estabelecer quantas peças cabem a cada jogador e quantas ficam na reserva.

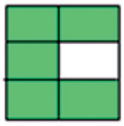
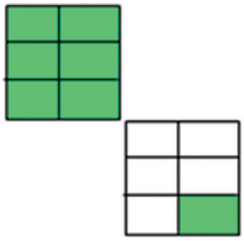
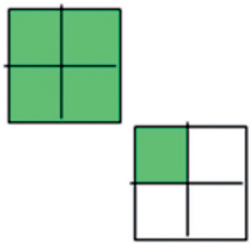
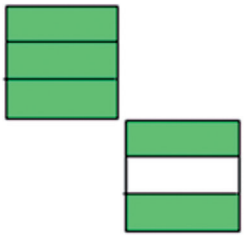
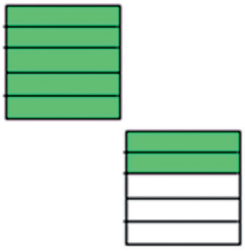
- Inicia o jogo quem tiver a peça casada com a fração $\frac{3}{4}$. Caso nenhum jogador tenha essa peça, inicia aquele que tiver a peça casada com a fração $\frac{5}{3}$. Se estas peças ficaram na reserva, seu professor vai indicar como vocês vão começar o jogo.
- Cada jogador, na sua vez, coloca uma peça numa das extremidades do jogo da mesa. Duas metades de peças justapostas devem representar o mesmo valor.
- Se, na sua vez, o jogador não tiver peça com um dos valores das "pontas" ele deve "comprar" peças da reserva até que consiga uma peça que se encaixe no jogo. Se não houver mais peças na reserva, o jogador passa a vez.
- Ganha quem conseguir jogar todas as peças em primeiro lugar.
- Observe que, nas imagens, a unidade é o quadrado: 

e, embora, não sejam exatas as figuras, suponha que as divisões da unidade têm áreas iguais, em cada unidade. E a fração a ser considerada é a parte pintada.

Dominó:

Professor

$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$
$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{3}+\frac{4}{3}$	$\frac{9}{4}-\frac{6}{4}$
$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}$	$\frac{7}{4}-\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}+\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}-\frac{1}{5}$
$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$	$\frac{7}{6}-\frac{2}{6}$
$\frac{2}{6}+\frac{3}{6}$	$\frac{8}{6}-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}+\frac{5}{6}$	$\frac{7}{3}-\frac{2}{3}$

$\frac{3}{6} + \frac{7}{6}$	$\frac{3}{8} + \frac{7}{8}$	$\frac{5}{12} + \frac{9}{12}$	$\frac{5}{10} + \frac{9}{10}$
$\frac{1}{10} + \frac{5}{10}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{5}{12} + \frac{5}{12}$	$\frac{1}{8} + \frac{5}{8}$
	$\frac{15}{12}$		$\frac{9}{12}$
$\frac{10}{6}$	$\frac{9}{15}$		$\frac{21}{18}$
$\frac{15}{18}$	$\frac{6}{10}$		$\frac{14}{10}$
	$\frac{10}{8}$		$\frac{21}{15}$
$\frac{10}{12}$	$\frac{15}{9}$		$\frac{14}{12}$

Recursos necessários

- Encarte do aluno.
- 28 peças do dominó para cada grupo, em anexo para recorte.

Procedimentos operacionais

- *É importante que os cartões sejam recortados com antecedência. Como são peças de dominó, cada peça é composta de 2 células da tabela. É importante que o recorte seja feito somente nas bordas tracejadas.*
- *Em anexo, encontram-se 6 kits de peças, daí a necessidade de ficar com, no máximo, 6 grupos. Não é possível deixar 1 aluno sozinho, pois o jogo perderia o interesse. Conforme o número de alunos em cada grupo e o tempo disponível para o jogo, você pode estabelecer que o jogo seja entre duplas, deixando cada dupla com um só conjunto de peças de forma que os estudantes façam os cálculos em duplas, um ajudando o outro.*
- *Será preciso determinar o número de peças para cada aluno no grupo e quantas ficam na reserva.*
- *Há espaço para alguns cálculos no encarte do aluno.*
- *Se nenhum jogador tirar as peças casadas com* $\frac{3}{4}$ *ou* $\frac{5}{3}$*, será preciso estabelecer um outro critério. Por exemplo, o adversário tira uma peça do jogador que vai começar o jogo e coloca na mesa, sem saber que peça é.*
- *O jogo deve terminar com a vitória de um aluno ou por fim do tempo estipulado por você, mas antes do encerramento da etapa, todas as peças restantes devem ser colocadas sobre a mesa a fim de que a análise de todos os casos seja feita.*
- *Caso o tempo seja curto, você pode optar por pedir aos alunos que agrupem as peças que indicam o mesmo número, ao invés de fazer todo o jogo. Para manter o espírito lúdico, você pode fazer, no quadro, a lista dos grupos na ordem em que eles terminem o agrupamento.*

Professor

- *A conferência dessa etapa foi pensada para ser realizada durante o próprio jogo.*
- *As frações que aparecem nas peças são as frações*

$$\frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{3}{5}, \frac{7}{5}, \frac{5}{6} \text{ e } \frac{7}{6},$$

frações equivalentes a essas obtidas pela multiplicação de ambos os termos por 2 e por 3 e também como resultado de uma adição e de uma subtração. Entre essas há frações próprias e impróprias. É importante salientar que para ilustrar as frações impróprias numa figura são necessárias mais que 1 unidade. Nos casos aqui focalizados foram necessárias 2 unidades. Daí a necessidade de estabelecer qual é a unidade considerada.

Segunda Etapa

Um novo olhar...

Atividade • Figurinha repetida não completa álbum!

Objetivo

Recordar a adição e a subtração de frações.

Descrição da atividade

Problemas de adição e subtração de frações que Lúcio e Mário estão enfrentando ao contar suas figurinhas.

Atividade 1

Estamos na era tecnológica e, mesmo assim, existem coisas que resistem ao tempo. Uma dessas coisas é o álbum de figurinhas. Já há versão virtual com *sites* de troca de figurinhas repetidas, mas os irmãos Lúcio e Mário resolveram colecionar o álbum de figurinhas do Campeonato Brasileiro de 2012, em papel.

Mário ganhou $\frac{1}{2}$ da quantidade total de figurinhas que cabem no álbum, numa promoção e Lúcio comprou $\frac{3}{5}$ desse total. Resolveram somar estas frações para ver que parte do total de figurinhas tinham juntos. Que fração eles encontraram?

Resposta

Ao somar as frações,

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{5 \times 1 + 2 \times 3}{2 \times 5} = \frac{5+6}{10} = \frac{11}{10}$$

eles encontraram um total de $\frac{11}{10}$.

• • • • •

Ora, o total de figurinhas do álbum é igual a $\frac{10}{10}$ e eles tinham $\frac{11}{10}$. Estavam felizes achando que tinham completado o álbum, quando perceberam que, se havia mais figurinhas do que as que cabiam no álbum é porque havia figurinhas repetidas! Grande decepção! Juntaram todas as figurinhas repetidas e perceberam que elas correspondiam a $\frac{3}{8}$ da quantidade de figurinhas do álbum. Que fração do álbum eles poderiam preencher com as figurinhas que tinham?

Resposta

O problema pede a subtração das figurinhas repetidas do total comprado por Lúcio e Mário.

$$\frac{11}{10} - \frac{3}{8} = \frac{8 \times 11 - 10 \times 3}{10 \times 8} = \frac{88-30}{80} = \frac{58}{80} = \frac{29}{40}$$

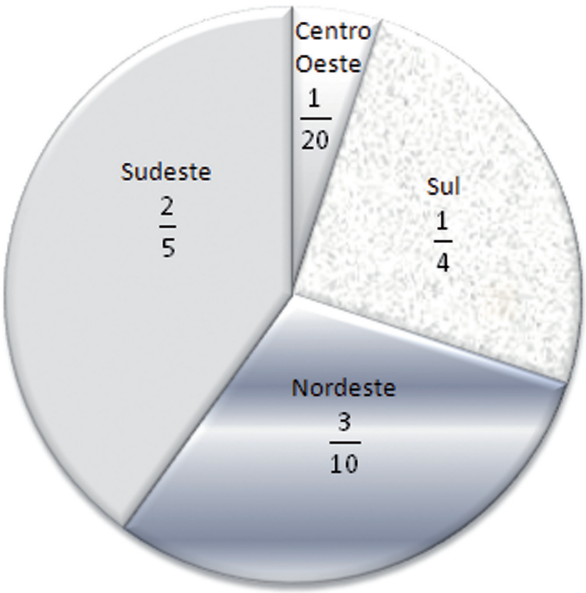
A fração do álbum que equivale à quantidade de figurinhas que podem ser coladas no álbum é, portanto, $\frac{29}{40}$.

• • • • •

Atividade 2

Para ficar mais organizado, o álbum do Campeonato Brasileiro de 2012 da Série B reúne os times conforme sua região. A distribuição das quantidades de figurinhas por regiões brasileiras é dada pelo gráfico de setores a seguir:

Distribuição da quantidade de figurinhas pelas regiões do Brasil



Agora responda!

Que fração das figurinhas de todo o álbum representa a quantidade de figurinhas das regiões Sul, Nordeste e Centro Oeste juntas?

Resposta

Se o aluno já conhecer o mínimo múltiplo comum (mmc), poderá fazer essa soma de uma só vez, levando em conta que mmc (4, 10, 20) = 20, pois 20 é múltiplo de 4 e de 10:

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{10}+\frac{1}{20}=\frac{5\times1+2\times3+1\times1}{20}=\frac{5+6+1}{20}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

e a simplificação final foi obtida pela divisão por 4 de numerador e denominador.

A resposta é, portanto, que as figurinhas dos times daquelas regiões ocupam $\frac{3}{5}$ *do álbum.*

Se o aluno não conhece o mmc ou não se lembra do procedimento para calculá-lo, ele pode somar as frações duas a duas, tomando os produtos dos denominadores. Poderia fazer, por exemplo, o seguinte:

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{10}+\frac{1}{20}=\frac{10\times1+4\times3}{40}+\frac{1}{20}=\frac{22}{40}+\frac{1}{20}=\frac{11}{20}+\frac{1}{20}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

Neste cálculo, a simplificação que passou de $\frac{22}{40}$ a $\frac{11}{20}$ foi muito importante, pois sem ela, o denominador calculado como produto seria 800, o que complicaria muito a continuação dos cálculos.

Recursos necessários

- Encarte do aluno.

Procedimentos operacionais

- *Manter os mesmos grupos da atividade anterior, mas o registro deve ser individual para concentrar melhor a atenção do estudante e para consulta posterior.*
- *A correção dos cálculos pode ser feita nos grupos e, se preciso, numa chamada coletiva ao final da etapa.*

Professor

Intervenção pedagógica

Professor:

- *Em geral, os estudantes sabem calcular o mmc. As dificuldades que eles apresentam na adição ou subtração de frações, em geral são duas:*
  a. *não se lembram de que devem reduzir ao mesmo denominador e procedem como na multiplicação, somando ou subtraindo numeradores e denominadores.*
  b. *mesmo quando se lembram que devem tirar o mmc, não sabem muito bem o que fazer com ele. Chegam a perguntar por qual dos 2 termos devem multiplicar e por qual deles devem dividir. Isso mostra que eles não fazem ideia do que está por trás dessas operações.*
- *Daí, a necessidade de explicar o porquê de cada passo, lembrando que:*
  a. para somar ou subtrair (e também para comparar) quaisquer números, eles devem referir-se à mesma unidade. As frações que são somadas são frações da mesma unidade, mas os numeradores se referem a "pedaços" diferentes dessa unidade: quartos, décimos ou vinte-avos têm tamanhos bem diferentes. É preciso decompor esses "pedaços" em "pedacinhos" todos iguais.

b. esses “pedacinhos” correspondem a mudar o denominador e, para mudar o denominador de uma fração e continuar representando o mesmo número é preciso modificar também o numerador. E o modo de fazer isso, mantendo o número representado, é multiplicar o numerador pelo mesmo número pelo qual foi multiplicado o denominador.

c. para reduzir frações ao mesmo denominador, multiplicando os 2 termos de cada fração por um certo número, o novo denominador deve ser múltiplo dos denominadores das frações dadas. Daí, encontra-se o número pelo qual são multiplicados os 2 termos da fração.

d. se o aluno não aprendeu a calcular o mmc, talvez não haja mais tempo para voltar tanto e ele pode ser aconselhado a usar os produtos e somar frações duas a duas. Se ele já souber calcular o mmc, vale a pena estimulá-lo a usar o mmc e, para isso, é necessário que ele perceba que, ao substituir os denominadores pelo mmc, ele está multiplicando cada denominador por um determinado número e que é por esse mesmo número que ele deve multiplicar o numerador. E como ele pode achar esse número? Ora, dividindo o mmc pelo denominador. Daí, é muito provável que ele guarde com mais facilidade o procedimento de dividir o mmc pelo denominador e multiplicar esse resultado pelo numerador.

Terceira Etapa
Fique por dentro!

35 minutos

Atividade • Média de gols

Objetivo

Calcular a média aritmética

Descrição da atividade

Os alunos deverão resolver um problema que envolve o cálculo da média de gols de jogadores de um time de futebol.

Você entende de futebol? E de médias?

Atividade

Você já parou para pensar quantos gols são feitos durante o Campeonato Brasileiro da Série A? Talvez não. É certo que as pessoas dão palpites de quem será o vencedor. Há, também, aqueles que fazem cálculos estatísticos para saber, por exemplo, qual a média de gols de um time por partida, qual a média de gols de um jogador por partida, qual a média de público por partida, entre outros. E que média é essa?

Por exemplo, a média de gols por partida é o número obtido como se fossem

feitos os mesmos gols, mas considerando que o número de gols em todas as partidas fosse o mesmo. Esse número é o que se chama média.

E, então, como se calcula a média aritmética?

Tente aplicar esta definição em uma sequência de 8 jogos amistosos em que o time A obteve os seguintes resultados: 4 x 2, 3 x 0, 4 x 2, 0 x 1, 3 x 2, 3 x 0, 5 x 4, 2 x 0. Qual a média de gols marcados pelo time A nesses jogos amistosos? E a média de gols sofridos?

Resposta

Média dos gols marcados:

Ora, os gols feitos pelo time A nessas partidas foram num total de: 4 + 3 + 4 + 0 + 3 + 3 + 5 + 2 = 24. Como foram 8 partidas e 24 gols, se o time A tivesse feito o mesmo número de gols em cada uma das partidas, o número de gols em cada uma delas seria dado pela divisão: 24 ÷ 8 = 3. A média de gols marcados foi, portanto de 3 gols por partida.

Média dos gols sofridos:

O raciocínio anterior mostrou o que o aluno já sabe fazer quando calcula sua média na escola: a média aritmética de alguns números é o quociente da soma desses números pela quantidade deles.

Como o time A sofreu 2, 0, 2, 1, 2, 0, 4 e 0 gols, a média nessas 8 partidas pode ser calculada como:

$$M = \frac{2+0+2+1+2+0+4+0}{8} = \frac{11}{8} = 1{,}375 \text{ (média de gols sofridos).}$$

E se os dados fossem apresentados de outro modo?

Em Estatística, é comum que os dados sejam apresentados por sua frequência. Como no exemplo a seguir.

O jogador Chu Ta Nugô acaba de jogar sua centésima partida na seleção de Calculândia, tendo feito muitos gols. A tabela a seguir apresenta a frequência desses gols:

Número de gols numa partida	Frequência (= número de partidas em que ele fez esse número de gols.)
0	14
1	39
2	29
3	18
Total	**100**

Calcule a média de gols por partida de Chu Ta Nugô.

Resposta

Ora, a diferença deste caso para o anterior é que as partidas foram agrupadas conforme o número de gols ao invés de ser dado o número de gols que Chu fez em cada partida. O cálculo do total de gols de Chu não pode ser calculado por uma simples soma. Quando a tabela diz que ele fez 2 gols em 29 partidas, é preciso calcular o produto 29 × 2 para se obter o número de gols nessas 29 partidas. E o mesmo para cada valor do número de gols.

O total de gols é calculado, então, pela soma desses produtos:

Total de gols = 14 × 0 + 39 × 1 + 29 × 2 + 18 × 3 = 0 + 39 + 58 + 54 = 151.

Então, a média de gols de Chu é: M = 151 ÷ 100 = 1,51 gols por partida.

Recursos necessários:

- Encarte do aluno

Procedimentos Operacionais

Mantenha os grupos formados na atividade anterior, mas oriente os alunos a registrarem a atividade individualmente no encarte.

Intervenção Pedagógica

Professor:

- *Se você achar por bem, pode abrir uma discussão no final para deixar mais claros os dois modos de calcular a média, de acordo com a forma como são apresentados os dados. Em algumas situações, costuma-se chamar a média calculada usando as frequências de média ponderada. Isso porque cada valor precisa ser multiplicado pela sua frequência (que seriam os "pesos"). A ideia de média aritmética, no entanto, é uma só. A diferença fica por conta do modo como são fornecidos os dados: numa lista explícita de todos os valores que podem ser repetidos muitas vezes ou numa lista em que cada valor entre uma única vez com a indicação da frequência com que ele apareceria na lista extensa. O fato importante é que a média aritmética é o que aconteceria se houvesse um único valor repetido, mas com a mesma soma dos valores da ocorrência.*

- *Por exemplo, talvez seja o caso de apresentar a mesma situação dos dois modos. Por exemplo, suponha que, em 20 partidas, um jogador de futebol tenha feito o seguinte número de gols:*

TABELA 1: NÚMERO DE GOLS POR PARTIDA									
2	4	0	1	3	4	2	0	1	4
3	2	1	0	3	2	4	0	1	2

Esses dados podem ser apresentados desta forma, por partidas, ou numa tabela de frequências do número de gols:

TABELA 2	
Nº DE GOLS	**FREQUÊNCIA**
0	4
1	4
2	5
3	3
4	4
Total	20

Para calcular a média, é preciso somar o número de gols que ele fez em todas as partidas. Pela tabela 1, a soma é calculada diretamente pela soma de 20 parcelas:

2 + 4 + 0 + 1 + 3 + 4 + 2 + 0 + 1 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 + 3 + 2 + 4 + 0 + 1 + 2 = 39.

Pela tabela 2, a soma é feita em 5 parcelas em que cada uma é um produto:

$$4 \times 0 + 4 \times 1 + 5 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 = 0 + 4 + 10 + 9 + 16 = 39$$

A média será, portanto, igual a $\frac{39}{20} = 1{,}95$.

A vantagem do uso de uma ou outra forma de apresentar os dados depende da quantidade de dados e de valores que eles podem assumir. Por exemplo, se o jogador fosse de basquete e estivéssemos calculando a média do número de pontos que ele tenha feito nas 20 partidas, os dados seriam algo como:

TABELA 3: NÚMERO DE PONTOS POR PARTIDA DE BASQUETE									
22	39	8	15	38	42	25	10	18	41
37	22	19	21	36	28	43	20	19	22

Uma tabela de frequências teria 1 valor com frequência 2 (o 19), 1 valor com frequência 3 (o 22), os 15 demais presentes na tabela com frequência 1 e, se fôssemos considerar todos os números inteiros de 8 a 43, teríamos ainda 16 com frequência 0. Só por curiosidade, a soma desses pontos dá 525, com média por partida igual a 26,25.

- *Para focalizar a atenção nos novos conceitos, sem onerar os estudantes com cálculos mais complicados, os casos estudados aqui foram sempre com números inteiros positivos. A média aritmética, porém, é calculada para qualquer lista de n números reais. Por exemplo, numa semana em que as temperaturas máximas em Calculândia foram de:*

DIA DA SEMANA	DOMINGO	2ª FEIRA	3ª FEIRA	4ª FEIRA	5ª FEIRA	6ª FEIRA	SÁBADO
TEMPERATURA (°C)	12,4°C	3°C	1°C	- 3°C	- 5°C	- 1,4°C	4°C

A temperatura máxima média nessa semana em Calculândia calcula-se do mesmo modo, como:

$$\frac{12,4+3+1+(-3)+(-5)+(-1,4)+4}{7}=\frac{12,4+3+1-3-5-1,4+4}{7}=\frac{20,4-9,4}{7}=\frac{11}{7}\cong 1,5714.$$

A temperatura máxima média em Calculândia nessa semana foi, portanto, de aproximadamente 1,57°C.

Quarta Etapa

10 MINUTOS

Quiz

Questão • (ENEM, questão 154 – caderno 7 – azul – página 24 – 2011)

A participação dos estudantes na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) aumenta a cada ano. O quadro indica o percentual de medalhistas de ouro, por região, nas edições da OBMEP de 2005 a 2009.

Região	2005	2006	2007	2008	2009
Norte	2%	2%	1%	2%	1%
Nordeste	18%	19%	21%	15%	19%
Centro-Oeste	5%	6%	7%	8%	9%
Sudeste	55%	61%	58%	66%	60%
Sul	21%	12%	13%	9%	11%

Disponível em: http://www.obmep.org.br. Acesso em: abr. 2010 (adaptado).

Em relação às edições de 2005 a 2009 da OBMEP, qual o percentual médio de medalhistas de ouro na região Nordeste?

a. 14,6%

b. 18,2%

c. 18,4%

d. 19,0%

e. 21,0%

Quinta Etapa
Análise das Respostas ao Quiz

Resposta

A questão falou em "percentual médio", então, precisamos encontrar a média aritmética entre os valores percentuais da região Nordeste.

Já sabemos que a média é a soma dos valores dividida pelo número de valores. Nesse caso, o número de valores é 5, pois se trata da participação nas edições de 2005 a 2009. Olhando a tabela, percebemos que os valores do nordeste de 2005 a 2009 são, respectivamente, 18%, 19%, 21%, 15% e 19%.

A média será, portanto:

$$M = \frac{18+19+21+15+19}{5}\ \% = \frac{92}{5}\ \% = 18{,}4\ \%$$

e a opção correta é a opção (c).

Distratores

É importante saber qual foi o raciocínio do aluno que fez outra escolha.

- *Provavelmente, o aluno que escolheu (a) ou (b), tenha escolhido essas alternativas por erros de cálculo, já que se trata de uma adição de cinco parcelas seguida de uma divisão, ambas com números decimais. Geralmente, nesses casos o aluno tem maior dificuldade.*
- *O aluno que escolheu a alternativa (d) pode não ter o conhecimento do conteúdo, então, escolheu o 19% por aparecer mais de uma vez na tabela. As dinâmicas ainda não focalizaram as outras medidas de tendência central, mas, neste caso, o 19% é moda e também a mediana dos resultados no Nordeste.*
- *E o aluno que escolheu a alternativa (e) pode ter se equivocado quanto ao conceito da média. Ao invés de entender a média como uma medida de tendência central, entendeu como sendo a medida central, logo escolheu a medida do ano que ficou no meio dos cinco anos analisados.*

Etapa Flex
Para saber +

1. Observe que a média entre alguns números está sempre entre o menor e o

maior deles e só será igual quando todos os números forem iguais, caso em que o menor coincide com o maior.

Com efeito, se você vai tirar a média de 5 números reais que estejam na seguinte ordem:

$$a \leq b \leq c \leq d \leq e$$

e, se você compara as somas, em que você substitui todas as parcelas pelo menor deles ou todas as parcelas pelo maior deles, você terá as seguintes desigualdades:

$$a + a + a + a + a \leq a + b + c + d + e \leq e + e + e + e + e$$
$$\text{ou} \quad 5a \leq a + b + c + d + e \leq 5e$$

que, divididas por 5, dão: a ≤ média aritmética de a, b, c, d, e ≤ e.

Esse mesmo tipo de raciocínio mostra que esse resultado vale em geral, qualquer que seja a quantidade de números da qual se calcula a média aritmética.

2. Observe também que nem sempre a média aritmética é um número da lista. Por exemplo: a média entre 1, 2, 3 e 4 é igual a $\frac{10}{4}$ = 2,5, que não está na lista.

3. A média na Escola:

É muito frequente o uso de médias nas escolas. Em geral, a média entre as 4 notas bimestrais é calculada simplesmente como média aritmética ou como média ponderada, em que os pesos são 1, 2, 3 e 4 respectivamente para a nota do 1º, 2º, 3º e 4º bimestre.

Nem sempre os colegas de outras áreas apreciam o uso da média ponderada. Nem os próprios alunos têm muita facilidade para controlar a nota de que precisam no 4º bimestre para serem aprovados, quando a média deve ser calculada com pesos.

Um argumento interessante que leva o professor a pensar na escolha da média a ser calculada é a comparação entre dois alunos. Por exemplo, o aluno Raimundo teve notas 1, 3, 5 e 8 nessa ordem. O aluno Renato teve as mesmas notas, mas na ordem contrária: suas notas do 1º ao 4º bimestre foram 8, 5, 3 e 1. Qualquer professor que analise esses dois alunos, vai concordar que o Raimundo melhorou durante o ano e tem muito mais chances de acompanhar o ano seguinte do que Renato que começou bem, mas teve algum problema durante o curso e seu aproveitamento caiu demais. Essas notas sugerem que Renato não possa acompanhar a matéria num nível mais avançado sem algum tipo de recuperação.

O que se verifica, porém, no cálculo das médias é que Raimundo e Renato têm a mesma média aritmética, 4,25 por terem tirado as mesmas notas. Se for calculada a média ponderada com os pesos (que substituem as frequências no caso da Estatística) 1, 2, 3 e 4, a média de Raimundo é igual a

$$\frac{1\times1+2\times3+3\times5+4\times8}{10} = \frac{1+6+15+32}{10} = \frac{54}{10} = 5{,}4$$

o que o aprova. A média de Renato é igual a

$$\frac{1\times8+2\times5+3\times3+4\times1}{10} = \frac{8+10+9+4}{10} = \frac{31}{10} = 3{,}1$$

o que o remete a algum tipo de recuperação.

Os "pesos" crescentes do 1º para o 4º bimestre dão mais força às notas finais e tomados os pesos 1, 2, 3 e 4, eles têm a vantagem de ter soma 10, o que facilita os cálculos. Hoje em dia essa facilidade nos cálculos perdeu a importância com o uso de planilhas eletrônicas, mas ainda pode ajudar nas avaliações que cada aluno vai fazer da nota de que precisa para ser aprovado.

4. Você pode assistir à aula de número 33 do Novo Telecurso que fala sobre a média aritmética.

http://www.youtube.com/watch?v=J7lpnznJTfo

Professor

Agora, é com você!

1. Janaína faz tapetes de retalhos. Ela quer saber qual é a média diária que ela consegue produzir. Resolveu anotar o quanto ela faz em cada um dos 6 dias e obteve a seguinte tabela:

DIA DA SEMANA	2ª FEIRA	3ª FEIRA	4ª FEIRA	5ª FEIRA	6ª FEIRA	SÁBADO
FRAÇÃO DE TAPETE PRODUZIDA	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{3}$

Ajude Janaína a calcular essa média.

Resposta

Foram 6 dias de trabalho. Será preciso somar a produção nesses 6 dias e dividir a soma por 6. Ora a soma será:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+\frac{1}{1}+\frac{7}{6}+\frac{1}{3} = \frac{3+4+8+6+7+2}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

A média de produção de Janaína nos 6 dias úteis dessa semana foi, portanto, $\frac{5}{6}$.

2. Janaína achou que devia melhorar essa média passando a produzir, em média, 1 tapete por dia. Quanto Janaína deveria aumentar a sua média para chegar à média de 1 tapete?

Resposta

A média era de $\frac{5}{6}$*, para passar a ser de 1 tapete ela teria que aumentar:*

$$\frac{1}{1} - \frac{5}{6} = \frac{6-5}{6} = \frac{1}{6}.$$

3. Para fazer esse aumento na média, Janaína teria que aumentar 6 vezes esse aumento. Ela resolveu que deveria fazer o mesmo aumento nos 6 dias. Qual é a nova tabela que Janaína deve obedecer para chegar à média de 1 tapete por dia, aumentando a mesma tarefa a cada dia?

Resposta

Como

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3+1}{6} = \frac{4}{6} \text{ ou } \frac{2}{3};$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4+1}{6} = \frac{5}{6};$$

$$\frac{4}{3} + \frac{1}{6} = \frac{8+1}{6} = \frac{9}{6} \text{ ou } \frac{3}{2};$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{6} = \frac{6+1}{6} = \frac{7}{6};$$

$$\frac{7}{6} + \frac{1}{6} = \frac{7+1}{6} = \frac{8}{6} \text{ ou } \frac{4}{3};$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} \text{ ou } \frac{1}{2};$$

a nova tabela ficará:

DIA DA SEMANA	2ª FEIRA	3ª FEIRA	4ª FEIRA	5ª FEIRA	6ª FEIRA	SÁBADO
FRAÇÃO DE TAPETE A SER PRODUZIDA	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{2}$

4. Pela nova tabela, em que dias Janaína vai ter que completar mais do que 1 tapete?

Resposta

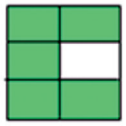
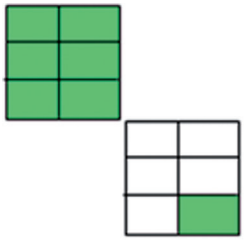
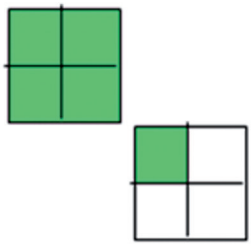
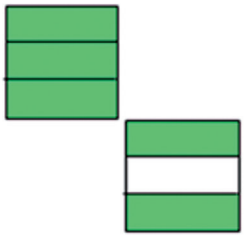
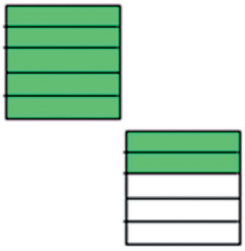
Às quartas, quintas e sextas feiras, ela terá que fazer mais do que 1 tapete, pois a fração que dá a tarefa desses dias é uma fração com numerador maior do que o denominador.

• • • • •

Anexo I

$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$
$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{3}+\frac{4}{3}$	$\frac{9}{4}-\frac{6}{4}$
$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}$	$\frac{7}{4}-\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}+\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}-\frac{1}{5}$
$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$	$\frac{7}{6}-\frac{2}{6}$
$\frac{2}{6}+\frac{3}{6}$	$\frac{8}{6}-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}+\frac{5}{6}$	$\frac{7}{3}-\frac{2}{3}$

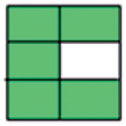
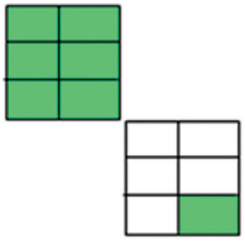
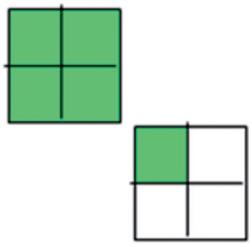
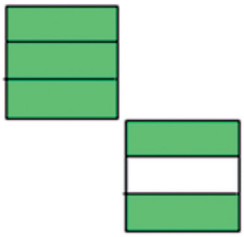
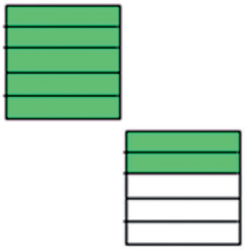
Anexo I

$\frac{3}{6} + \frac{7}{6}$	$\frac{3}{8} + \frac{7}{8}$	$\frac{5}{12} + \frac{9}{12}$	$\frac{5}{10} + \frac{9}{10}$
$\frac{1}{10} + \frac{5}{10}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{5}{12} + \frac{5}{12}$	$\frac{1}{8} + \frac{5}{8}$
	$\frac{15}{12}$		$\frac{9}{12}$
$\frac{10}{6}$	$\frac{9}{15}$		$\frac{21}{18}$
$\frac{15}{18}$	$\frac{6}{10}$		$\frac{14}{10}$
	$\frac{10}{8}$		$\frac{21}{15}$
$\frac{10}{12}$	$\frac{15}{9}$		$\frac{14}{12}$

Anexo I

$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$
$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{3}+\frac{4}{3}$	$\frac{9}{4}-\frac{6}{4}$
$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}$	$\frac{7}{4}-\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}+\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}-\frac{1}{5}$
$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$	$\frac{7}{6}-\frac{2}{6}$
$\frac{2}{6}+\frac{3}{6}$	$\frac{8}{6}-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}+\frac{5}{6}$	$\frac{7}{3}-\frac{2}{3}$

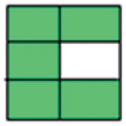
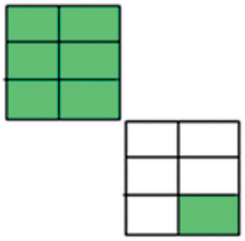
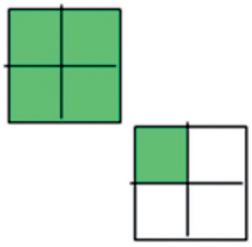
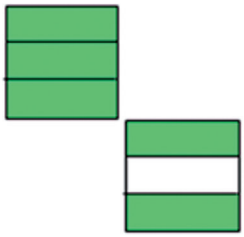
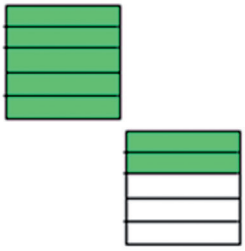
Anexo I

$\frac{3}{6} + \frac{7}{6}$	$\frac{3}{8} + \frac{7}{8}$	$\frac{5}{12} + \frac{9}{12}$	$\frac{5}{10} + \frac{9}{10}$
$\frac{1}{10} + \frac{5}{10}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{5}{12} + \frac{5}{12}$	$\frac{1}{8} + \frac{5}{8}$
	$\frac{15}{12}$		$\frac{9}{12}$
$\frac{10}{6}$	$\frac{9}{15}$		$\frac{21}{18}$
$\frac{15}{18}$	$\frac{6}{10}$		$\frac{14}{10}$
	$\frac{10}{8}$		$\frac{21}{15}$
$\frac{10}{12}$	$\frac{15}{9}$		$\frac{14}{12}$

Anexo I

$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$
$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{3}+\frac{4}{3}$	$\frac{9}{4}-\frac{6}{4}$
$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}$	$\frac{7}{4}-\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}+\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}-\frac{1}{5}$
$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$	$\frac{7}{6}-\frac{2}{6}$
$\frac{2}{6}+\frac{3}{6}$	$\frac{8}{6}-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}+\frac{5}{6}$	$\frac{7}{3}-\frac{2}{3}$

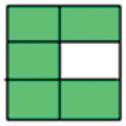
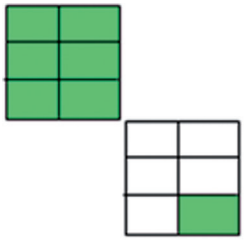
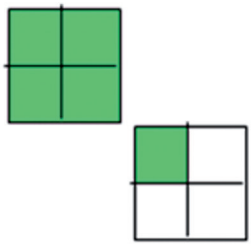
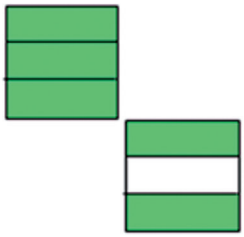
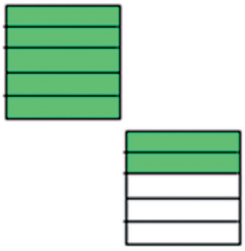
Anexo I

$\frac{3}{6} + \frac{7}{6}$	$\frac{3}{8} + \frac{7}{8}$	$\frac{5}{12} + \frac{9}{12}$	$\frac{5}{10} + \frac{9}{10}$
$\frac{1}{10} + \frac{5}{10}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{5}{12} + \frac{5}{12}$	$\frac{1}{8} + \frac{5}{8}$
	$\frac{15}{12}$		$\frac{9}{12}$
$\frac{10}{6}$	$\frac{9}{15}$		$\frac{21}{18}$
$\frac{15}{18}$	$\frac{6}{10}$		$\frac{14}{10}$
	$\frac{10}{8}$		$\frac{21}{15}$
$\frac{10}{12}$	$\frac{15}{9}$		$\frac{14}{12}$

Anexo I

$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$
$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{3}+\frac{4}{3}$	$\frac{9}{4}-\frac{6}{4}$
$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}$	$\frac{7}{4}-\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}+\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}-\frac{1}{5}$
$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$	$\frac{7}{6}-\frac{2}{6}$
$\frac{2}{6}+\frac{3}{6}$	$\frac{8}{6}-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}+\frac{5}{6}$	$\frac{7}{3}-\frac{2}{3}$

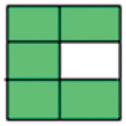
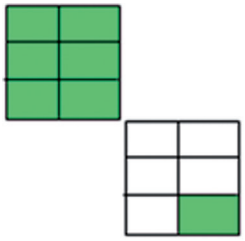
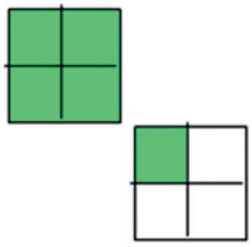
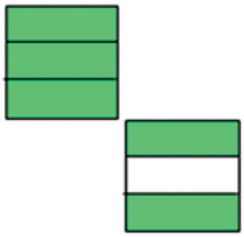
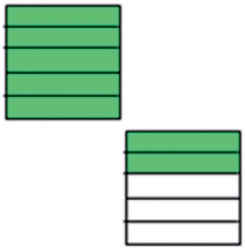
Anexo I

$\frac{3}{6} + \frac{7}{6}$	$\frac{3}{8} + \frac{7}{8}$	$\frac{5}{12} + \frac{9}{12}$	$\frac{5}{10} + \frac{9}{10}$
$\frac{1}{10} + \frac{5}{10}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{5}{12} + \frac{5}{12}$	$\frac{1}{8} + \frac{5}{8}$
	$\frac{15}{12}$		$\frac{9}{12}$
$\frac{10}{6}$	$\frac{9}{15}$		$\frac{21}{18}$
$\frac{15}{18}$	$\frac{6}{10}$		$\frac{14}{10}$
	$\frac{10}{8}$		$\frac{21}{15}$
$\frac{10}{12}$	$\frac{15}{9}$		$\frac{14}{12}$

Anexo I

$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$
$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{3}+\frac{4}{3}$	$\frac{9}{4}-\frac{6}{4}$
$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}$	$\frac{7}{4}-\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}+\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}-\frac{1}{5}$
$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$	$\frac{7}{6}-\frac{2}{6}$
$\frac{2}{6}+\frac{3}{6}$	$\frac{8}{6}-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}+\frac{5}{6}$	$\frac{7}{3}-\frac{2}{3}$

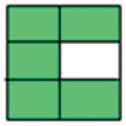
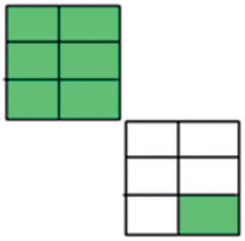
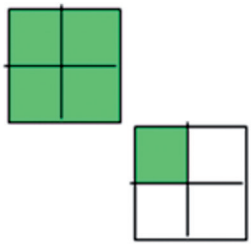
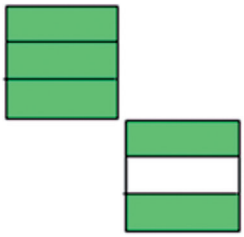
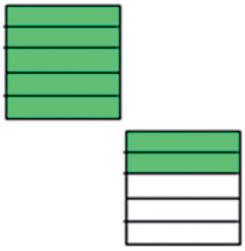
Anexo I

$\frac{3}{6} + \frac{7}{6}$	$\frac{3}{8} + \frac{7}{8}$	$\frac{5}{12} + \frac{9}{12}$	$\frac{5}{10} + \frac{9}{10}$
$\frac{1}{10} + \frac{5}{10}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{5}{12} + \frac{5}{12}$	$\frac{1}{8} + \frac{5}{8}$
	$\frac{15}{12}$		$\frac{9}{12}$
$\frac{10}{6}$	$\frac{9}{15}$		$\frac{21}{18}$
$\frac{15}{18}$	$\frac{6}{10}$		$\frac{14}{10}$
	$\frac{10}{8}$		$\frac{21}{15}$
$\frac{10}{12}$	$\frac{15}{9}$		$\frac{14}{12}$

Anexo I

$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$
$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{3}+\frac{4}{3}$	$\frac{9}{4}-\frac{6}{4}$
$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}$	$\frac{7}{4}-\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}+\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}-\frac{1}{5}$
$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$	$\frac{7}{6}-\frac{2}{6}$
$\frac{2}{6}+\frac{3}{6}$	$\frac{8}{6}-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}+\frac{5}{6}$	$\frac{7}{3}-\frac{2}{3}$

Anexo I

$\frac{3}{6} + \frac{7}{6}$	$\frac{3}{8} + \frac{7}{8}$	$\frac{5}{12} + \frac{9}{12}$	$\frac{5}{10} + \frac{9}{10}$
$\frac{1}{10} + \frac{5}{10}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{5}{12} + \frac{5}{12}$	$\frac{1}{8} + \frac{5}{8}$
	$\frac{15}{12}$		$\frac{9}{12}$
$\frac{10}{6}$	$\frac{9}{15}$		$\frac{21}{18}$
$\frac{15}{18}$	$\frac{6}{10}$		$\frac{14}{10}$
	$\frac{10}{8}$		$\frac{21}{15}$
$\frac{10}{12}$	$\frac{15}{9}$		$\frac{14}{12}$