



FUNÇÃO EXPONENCIAL

Sumário

Introdução	2
Atividade 1- Que crescimento é esse?.....	3
Atividade 2– A função Exponencial como modelo matemático.	6
Atividade 3 – Formalizando o conteúdo:.....	9
Avaliação.....	12
Referências Bibliográficas.	14

Introdução

O objetivo deste plano de trabalho é permitir que os alunos percebam o conceito de função exponencial partindo de situações comuns do seu cotidiano. Além de poderem identificar nas mesmas uma ferramenta com aplicações em outras áreas do conhecimento tais como: Física, Biologia, química, etc.

Assim como outros conceitos envolvidos no estudos das funções exponenciais, será necessário a revisão de alguns pré-requisitos como: propriedades de potências, propriedades dos radicais, função polinomial do primeiro grau e porcentagens.

Para o desenvolvimento do trabalho foram utilizados os roteiros de ação 1 e 4 adaptados. A parte na qual era usada o Excel foi omitida pelo fato do laboratório da escola não está funcionando. Em princípio, os alunos irão construir uma tabela de porcentagens de forma manual e eu mostrei como ilustração em meu laptop como a mesma ficaria se fosse usado o Excel.

Atualmente, é de suma importância o aluno saber analisar um gráfico e fazer sua leitura. Várias situações do cotidiano são representadas através dessa ferramenta e veiculadas através das mídias. Essas representações gráficas visam retratar os dados numéricos de situações como se fosse um “retrato” da parte algébrica que está por trás das informações levantadas através de pesquisas feitas por determinados órgãos específicos.

Atividade 1- Que crescimento é esse?

- DURAÇÃO PREVISTA: 100 minutos
- ÁREA DE CONHECIMENTO: Matemática
- ASSUNTO: Função Exponencial
- OBJETIVOS: Apresentar a função exponencial trabalhando a diferença entre o crescimento exponencial e o crescimento proporcional.
- PRÉ-REQUISITOS: Função polinomial do 1º grau, potenciação, proporcionalidade.
- MATERIAL NECESSÁRIO: Folha de atividades, lápis, computador com planilha eletrônica, por exemplo, Excel.
- ORGANIZAÇÃO DA CLASSE: Turma disposta em duplas, propiciando trabalho organizado e colaborativo.
- DESCRITORES ASSOCIADOS:
H58 – Resolver problemas envolvendo a função exponencial.

Há uma lenda sobre o jogo de xadrez que conta que um rei empolgado com as tramas possíveis de serem construídas com esse jogo, pede ao sábio responsável por sua invenção que escolha qualquer coisa do seu reino como forma de gratificação. O sábio pede como prêmio grãos de trigo. O rei, bastante surpreso pela simplicidade do pedido, pergunta imediatamente qual é a quantidade desejada. O sábio, deixando o rei ainda mais assustado e intrigado, pede ao soberano 1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos pela segunda, 4 grãos pela terceira, 8 grãos pela quarta, 16 pela quinta, e assim por diante, dobrando sempre o número de grãos de trigo na passagem de cada casa. O rei fica perplexo e não entende a simplicidade do pedido.

1º Parte – Entendendo o pedido do sábio

1) O rei parece perplexo com o pedido. E você? Qual a sua opinião sobre o pedido do sábio? A quantidade de grãos pedida poderia ser paga pelo rei? Discuta com seus colegas sobre essa questão.

2) Vamos entender o pedido do sábio inventor do jogo de xadrez? Para isso, preencha a Tabela 1 até a 10ª casa do tabuleiro, seguindo as orientações do texto.

Casa do tabuleiro Grãos recebidos

Casas do tabuleiro	Grãos recebidos
1	1
2	2
3	4
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Tabela 1

3) O que está acontecendo com a quantidade de grãos a cada casa do tabuleiro? E com as casas do tabuleiro de xadrez, elas seguem a mesma regra? Converse com seu colega.

Os alunos deverão verificar que a quantidade de grãos está dobrando a cada passagem de casa do tabuleiro, mas o mesmo não ocorrerá com as casas do tabuleiro. Mostrar para os alunos que essa diferença faz com que a quantidade de grãos aumente numa velocidade muito maior.

4) Reescreva cada quantidade de grãos encontrada no item 2) como uma potência de base 2. O preenchimento da Tabela 2 irá ajudá-lo.

Grãos recebidos	Potência de base 2
1	2^0
2	2^1
4	2^2
8	

Lembre-se que você pode utilizar a fatoração para descobrir a potência?!

5) É possível estabelecer alguma relação entre o número de grãos de trigo com as casas do tabuleiro? Escreva uma fórmula que relacione o número de grãos (y) com as casas do tabuleiro (x).

2º Parte – A contra proposta do rei

Preocupado com o sábio, o rei resolveu fazer uma contra proposta. Ele ofereceu dois grãos pela primeira casa e ao invés de dobrar a quantidade de trigo a cada casa do tabuleiro, ele sugeriu que fossem somados dois grãos na passagem das casas. Ou seja, seriam colocados 2 grãos na primeira casa, 4 grãos na segunda, 6 grãos na terceira, 8 grãos na quarta, 10 grãos na quinta e assim sucessivamente até a 64ª casa.

6) E aí? Essa é uma boa proposta? Você acha que a quantidade de grãos recebidos será maior, menor ou igual? Por quê? Discuta com seu colega.

7) Para ajudar na comparação com a outra forma de se obter os grãos, preencha a Tabela 3 de acordo com a regra proposta pelo rei e diga em qual situação o sábio ganharia mais grãos.

Casa do tabuleiro	Grãos recebidos.
1	2
2	4
3	6
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Observando a Tabela 3 preenchida, responda:

8) O que está acontecendo com a quantidade de grãos de trigo?

9) Podemos afirmar que ao dobrar a casa do tabuleiro, também dobramos a quantidade de grãos? E se fosse outro múltiplo (triplo, quádruplo), o que aconteceria?

10) Como podemos relacionar a quantidade de grãos com as casas do tabuleiro? Escreva uma fórmula que relacione a quantidade de grãos (y) com a casa do tabuleiro (x).

11) Que tipo de função caracteriza a nova regra?

Neste momento, os alunos podem achar que a quantidade de grãos recebidos será maior, já que os primeiros números a aparecer são 2, 4, 6, maiores do que

os três primeiros números da regra inicial. Mas sabemos que isso não é verdade. De qualquer maneira incentive os alunos a pensarem sobre as duas propostas e optarem por alguma antes de fazerem os cálculos.

Após o preenchimento, os alunos devem perceber que a quantidade de grãos está aumentando, mas de forma mais lenta. Devem perceber também que ao dobrar uma casa do tabuleiro, a quantidade de grãos também dobra. Sugira que eles observem, por exemplo, as casas 2 e 4 e as suas respectivas quantidades de grãos, 4 e 8. Nesse caso, 4 é o dobro de 2 e 8 também é o dobro de 4. Sugira que eles comparem outras casas que não estejam relacionadas pelo dobro – por exemplo, as casas 3 e 9, que terão 6 e 18 grãos, respectivamente. Chame a atenção da turma para o fato dessas serem grandezas proporcionais, justamente por esse fato. Nesse caso a fórmula que as relaciona é uma função linear: e é a que os alunos devem encontrar no item 10. Aproveite para relembrar com sua turma que apenas as funções lineares gozam das propriedades de proporcionalidade.

Atividade 2– A função Exponencial como modelo matemático.

- DURAÇÃO PREVISTA: 100 minutos
- ÁREA DE CONHECIMENTO: Matemática
- ASSUNTO: Função Exponencial
- OBJETIVOS: Reconhecer uma função exponencial como um modelo para um problema nas ciências.
- PRÉ-REQUISITOS: Noções de Porcentagem
- MATERIAL NECESSÁRIO: Folha de atividades, computador com programa de planilha eletrônica, por exemplo, Excel.
- ORGANIZAÇÃO DA CLASSE: Turma disposta em duplas, propiciando trabalho organizado e colaborativo.
- DESCRITORES ASSOCIADOS:

H58 – Resolver problemas envolvendo a função exponencial.

Na cidade Jodré, o lago Solice, em volta do qual a cidade foi construída, está poluído devido ao despejo de esgoto in natura. Pretendo dar uma vida mais saudável a sua população o prefeito resolveu promover uma campanha entre as empresas para despoluir o lago. O prefeito se interessou pela seguinte proposta uma vez que, de acordo com o seus cálculos, o lago estaria despoluído em 10 anos.

Proposta da empresa Alifia

A empresa dispôs para essa despoluição uma máquina capaz de tratar por ano 10% da água do lago. Além disso, ela também ficará responsável pelo tratamento de todo o esgoto da cidade, ou seja, o lago Solice não receberá mais esgoto.

1. Supondo que o volume de água do lago não se alterará, passado um ano qual será a porcentagem de poluentes nesse rio?
2. Para facilitar o entendimento, suponha que o lago tenha 100kg de poluentes. Quantos quilos de poluentes restarão ao final de um ano?
3. Discuta com seus colegas e decidam quantos anos serão necessários para que o lago não tenha mais poluentes.

Nesse primeiro momento, espera-se que seu aluno indique que, ao final de 1 ano, a porcentagem de poluentes no lago Solice será de 90%. Dessa forma, eles devem concluir, no item 2, que, se o lago tiver 100kg de poluentes, ao final de um ano, terá 90kg.

Para o item 3, é muito importante que deixe a turma livre para conjecturar. É natural que eles utilizem um pensamento linear e afirmem que serão necessários 10 anos. *O objetivo desse roteiro é mostrar para os alunos que o pensamento linear nem sempre pode ser aplicado.* De qualquer maneira, é importante que os alunos exponham os seus argumentos. Esteja atento para que ao final da atividade, os alunos sejam capazes de perceber que essa ideia inicial – muito comum – estava equivocada.

Vamos verificar a sua resposta? Para isso utilizaremos a hipótese de que o lago possuía 100kg de poluentes no início da despoluição.

4. Primeiramente, utilize o valor obtido no item 2 e determine a quantidade de poluentes no final de 2 anos.
5. Faça o cálculo para determinar a quantidade de poluentes ao final de 3 anos, 4 anos e 5 anos.
6. Discuta com seus colegas e avaliem se a resposta dada no item 3 está correta. Não se esqueçam de argumentar sobre a sua conclusão.

Nesse momento, esperamos que os alunos façam cálculos e encontrem os seguintes valores.

Tempo	Quantidade de poluentes
Inicial	100kg
1 ano de tratamento	90kg
2 anos de tratamento	81kg
3 anos de tratamento	72,9kg
4 anos de tratamento	65,61kg
5 anos de tratamento	59,049kg

Deixar os alunos livres para utilizarem calculadoras, afinal, o objetivo não está no cálculo em si. Nesse sentido, também não é interessante que eles façam aproximações. De qualquer maneira, é importante estar atento à realização desses cálculos, pois esse é um tópico que a maioria dos alunos tem dificuldades; então, se for necessário, não deixe de fazer uma pequena revisão tanto sobre cálculo em geral, como sobre cálculo de porcentagens. A seguir fazemos uma pequena retomada sobre o cálculo de porcentagens, mas é interessante que você esteja atento às necessidades/carências de seus alunos.

7. Você deve ter reparado que o valor da quantidade de poluentes está ficando um número com muitas casas decimais. Para isso precisamos entender como esses valores são gerados. Vamos lá? Observe a sequência a seguir: Para calcular 25% de uma quantia, basta multiplicá-la por 0,25. Por exemplo, 25% de 300 é igual a 75
Mas em algumas situações temos um desconto de 25%, nesse caso, o mais interessante pode ser determinar diretamente quanto iremos pagar. Ou seja, não queremos saber quanto é 25%, na verdade, queremos saber quanto é 75% (100%- 25%). De acordo com essas informações, diga qual é a porcentagem de poluentes que restam no final de cada ano. Por qual valor devemos multiplicar?

Nesse momento espera-se que o aluno perceba que restam 90% de poluentes ao ano e, por isso, para saber a quantidade de poluentes que resta basta multiplicar a quantidade anterior por 0,9.

Para facilitar o entendimento vamos completar a seguinte tabela com os percentuais.

Tempo Transcorrido	Quantidade de poluentes
Início	100
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

8. Observando os valores obtidos na planilha, você muda de opinião com relação à quantidade de tempo necessária para a despoluição completa do lago Solice? E seus colegas? Troquem ideias, considerem os valores obtidos na planilha e tentem chegar a uma conclusão.

E aí? Você seria capaz de dizer quanto tempo será necessário para despoluir todo o lago Solice?

Atividade 3 – Formalizando o conteúdo:

- DURAÇÃO PREVISTA: 100 minutos
- ÁREA DE CONHECIMENTO: Matemática
- ASSUNTO: Equação e função exponencial
- OBJETIVOS: Formalizar o conteúdo sobre equações e funções exponenciais.

Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial

- PRÉ-REQUISITOS: Propriedades das potências e radicais.
- MATERIAL NECESSÁRIO: Folha de atividades, lápis, computador com planilha eletrônica, vídeo.
- ORGANIZAÇÃO DA CLASSE: Turma disposta em duplas, propiciando trabalho organizado e colaborativo.
- DESCRITORES ASSOCIADOS:
H58 – Resolver problemas envolvendo a função exponencial.

Anteriormente a aplicação do plano de trabalho foi feita uma revisão sobre propriedades de potências e dos radicais.

1 – Equações Exponenciais:

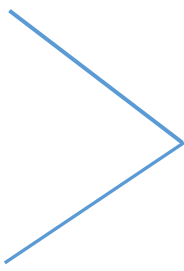
As equações exponenciais são equações que apresentam incógnitas no expoente de uma potência. Para resolver uma questão exponencial, você deve proceder da seguinte forma:

1 - Transformar a equação dada em uma igualdade de duas potências de mesma base;

2 - Igualar os expoentes e resolver a nova equação que surgir, que pode ser do 1º grau ou do 2º grau.

Exemplos:

$$\begin{aligned} \text{a) } 2^x &= 128 \\ 2^x &= 2^7 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

128		2		$128 = 2^7$
64		2		
32		2		
16		2		
8		2		
4		2		
2		2		
1		2		

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt[6]{2^x} &= 128 \\ 2^{x/6} &= 2^7 \\ \frac{x}{6} &= 7 \rightarrow x = 7 \cdot 6 \rightarrow x = 42 \end{aligned}$$

Atividades

01. A idade de Caroline pode ser indicada pela equação exponencial definida por $2^{2x} = 102$. Qual é a idade de Caroline?

02. Determine o conjunto solução da equação exponencial definida por $3^x = 243$

03. Determine o conjunto solução da equação exponencial definida por $(\sqrt{5})^3 = 5^x$

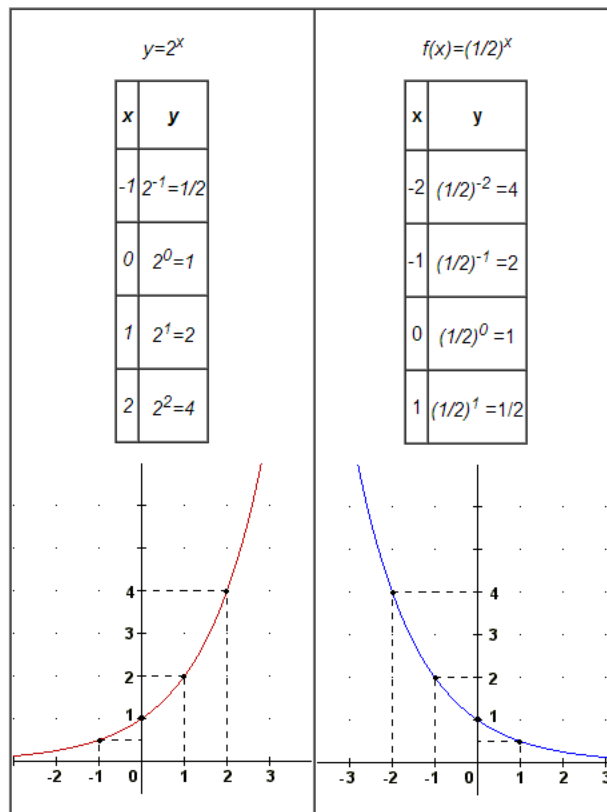
2 – Funções Exponenciais:

Vídeo sobre Função Exponencial:

Formalizando as idéias.

Exemplos:

Vamos traçar o gráfico das funções $f(x)=2^x$ e $f(x)=(1/2)^x$, para isso vamos dar valores para "x" e achar seu correspondente em "y":



Lembre-se:

- Uma função exponencial será crescente se sua base for maior que 1 ($a > 1$);
- Uma função exponencial será decrescente se sua base for menor que 1, mas sempre positiva ($0 < a < 1$).
- Qualquer gráfico de função exponencial do tipo $f(x) = a^x$ passa pelo ponto $(0, 1)$, pois qualquer número elevado na potência zero vale 1:

$$a^0 = 1$$

Serão utilizadas algumas atividades do livro do aluno.

Avaliação

A avaliação do conteúdo consistirá de atividades que contemplem as habilidades previstas no currículo mínimo. O próprio trabalho proposto servirá como uma avaliação qualitativa. Além disto, os alunos farão atividades propostas no livro adotado pela escola.

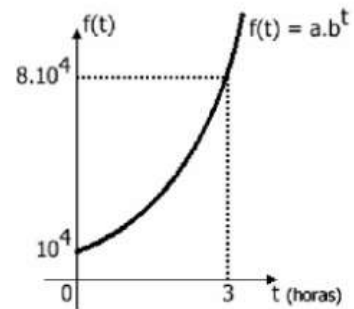
Será feito também uma Atividade Avaliativa com os mesmos objetivos trabalhados no plano de trabalho, avaliando a capacidade de utilização dos conteúdos apresentados.

Atividade Avaliativa

- (PUC-RIO) Uma das soluções da equação $10^{x^2-3} = \frac{1}{100}$ é:
 - $x = 1$
 - $x = 0$
 - $x = \sqrt{2}$
 - $x = -2$
 - $x = 3$
- (PUC-MG) Considere como verdadeiras as igualdades: $A^x - y = 2$ e $A^{3y} = 8$. Nessas condições, o valor de A^x é:
 - 4
 - 6
 - 8
 - 10
- (MACKENSIE) Se $2^x \cdot 3^{y-1} = \frac{18^y}{2}$, então $x \cdot y$ é:
 - 0
 - 1
 - 2
 - 3
 - 1
- (PUC-MG) Uma população de bactérias começa com 100 e dobra a cada três horas. Assim, o número n de bactérias após t horas é dado pela função $n(t) = 100 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$. Nessas condições, pode-se afirmar que a população será de 51.200 bactérias depois de:
 - 1 dia e 3 horas.
 - 1 dia e 9 horas.
 - 1 dia e 14 horas.
 - 1 dia e 19 horas.

5. (MACKENSIE) O gráfico mostra, em função do tempo, a evolução do número de bactérias em certa cultura. Dentre as alternativas abaixo, decorridos 30 minutos do início das observações, o valor mais próximo desse número é:

- a) 18.000
- b) 20.000
- c) 32.000
- d) 14.000
- e) 40.000



6. (UNIRIO) Numa população de bactérias, há $P(t) = 10^9 \cdot 4^{3t}$ bactérias no instante t medido em horas (ou fração da hora). Sabendo-se que inicialmente existem 10^9 bactérias, quantos minutos são necessários para que se tenha o dobro da população inicial?

- a) 20
- b) 12
- c) 30
- d) 15
- e) 10

Referências Bibliográficas.

Atividades Auto Reguladoras. Disponível em <
http://www.conexao professor.rj.gov.br/downloads/cm/cm_70_10_2S_1.pdf>
Acessado em 05 de nov. de 2013.

Roteiro de Ação 1. Disponível em <
<http://projeto seeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=109>> Acesso em
3 de nov. de 2013

Roteiro de Ação 4. Disponível em <
<http://projeto seeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=109>> Acesso em
3 de nov. de 2013

Filme sobre função exponencial. Disponível em
<http://www.youtube.com/watch?v=7_T2JGEqZgg> Acessado em 3 de nov. de
2013

Exercícios. Disponível em <<http://pt.scribd.com/doc/23608526/Lista-de-exercicios-Funcao-exponencial>> Acessado em 3 de nov. de 2013