FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ
COLÉGIO: Colégio Estadual Dr. Phillippe Uébe
PROFESSOR: José Alves Novaes Júnior
MATRÍCULA: 0009282740
SÉRIE: 1º ANO DO ENSINO MÉDIO
TUTOR : RODOLFO GREGORIO DE MORAES

PLANO DE TRABALHO SOBRE TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

José Alves Novaes Júnior
novaesjunior@gmail.com

1. Introdução:

No bimestre passado mostramos aos alunos como a trigonometria esta presente em nossas vidas como fenômenos periódicos e sua importância. Nesse bimestre precisamos apresentá-la de uma maneira mais generalizada, mostrando a eles que esses fenômenos periódicos constituem modelos matemáticos próprios e que podem ser expressos em termos de função trigonométrica, necessitando do aluno uma abstração maior. Chegou o momento de mostrar ao aluno o tratamento das relações trigonométricas como funções de domínio real, e consequentemente retirar delas inúmeras identidades.

A presença da circunferência e estar familiarizado com os arcos notáveis agora são fundamentais para o aluno orientar seu raciocínio na resolução de problemas e na construção dos gráficos que representam essas funções.

Procurei enfatizar o estudo das funções trigonométricas partindo de construções feitas pelos alunos. Procurando explorar o conteúdo de trigonometria compatibilizando com as necessidades do ensino médio. Acredito que a exploração das funcionalidades do software GeoGebra proporciona ao aluno a possibilidade de verificar facilmente situações que antes se mostravam de muita dificuldade no ensino-aprendizagem das funções trigonométricas, com ele o aluno é um ser ativo no processo de construção do conhecimento obtendo assim uma melhor aprendizagem, fazendo com que o aluno não esqueça o que foi aprendido, além da satisfação e prazer que proporciona o desenvolvimento intelectual, cultural e científico.

2. Estratégias adotadas no Plano de Trabalho:

Primeira parte:

-Duração prevista: 200 minutos.

-Recursos educacionais utilizados: régua, compasso, folhas de papel ofício, lousa, calculadora e folha de atividade.

-Descritores: H21 Transformar grau em radiano ou vice-versa.

H71 Resolver problemas envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos.

H72 Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa.

H09 Reconhecer círculo/circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.

H02 Associar pontos num plano cartesiano às suas coordenadas e vice-versa.

-Organização da turma: alunos dispostos em pequenos grupos de 4 alunos.

-Pré-requisitos: O aluno deverá saber a definição de circunferência, diâmetro e raio.

Associar pontos num plano cartesiano às suas coordenadas e vice-versa.

Deverá dominar as relações que definem seno, cosseno e tangente e os valores correspondentes aos ângulos notáveis.

-Objetivos: Ler, identificar, construir e representar as funções trigonométricas***;***

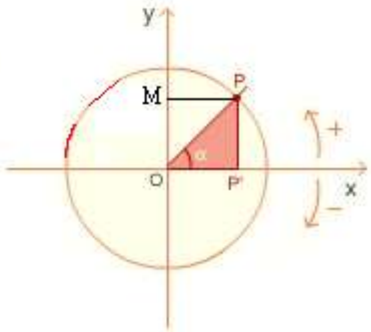
Efetuar operações e verificar identidades trigonométricas;

Reconhecer a ampliação dos conceitos da trigonometria aplicada no triangulo retângulo para a trigonometria aplicada no círculo;

-Metodologia:

Para iniciar o assunto, pretendo retornar ao ciclo trigonométrico fazendo a sua construção com os alunos. Distribuo uma folha oficio a cada um dos alunos e com o uso de régua e compasso montamos o ciclo, colocando os valores dos ângulos que estão sobre os eixos e os ângulos notáveis e seus simétricos.

Após o posicionamento de cada ângulo no ciclo, vamos aprender como localizar o seno, cosseno.



Partindo do triângulo retângulo formado, OPP', temos:

sen x = $\frac{P`P}{OP} = \frac{OM}{1}$ = OM $\therefore$ sem x = OM

cos x = $\frac{OP`}{OP} = \frac{OP`}{1}$ = OP` $\therefore$ cos x = OP`

Daí, definimos:

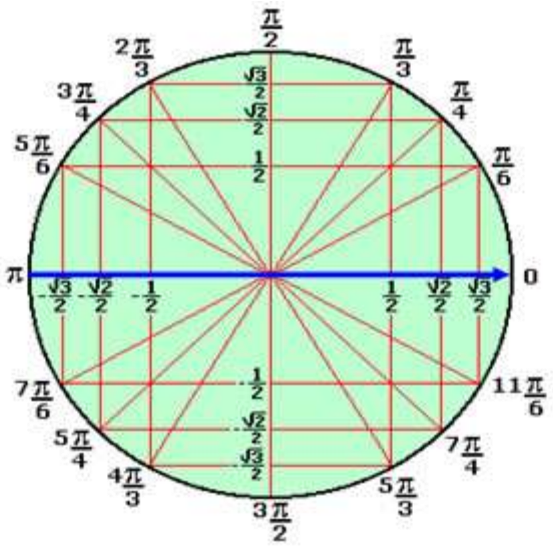
- Seno de x é a ordenada do ponto P
- Cosseno de x é a abscissa do ponto P

Essa definição é válida para qualquer valor de x no ciclo trigonométrico

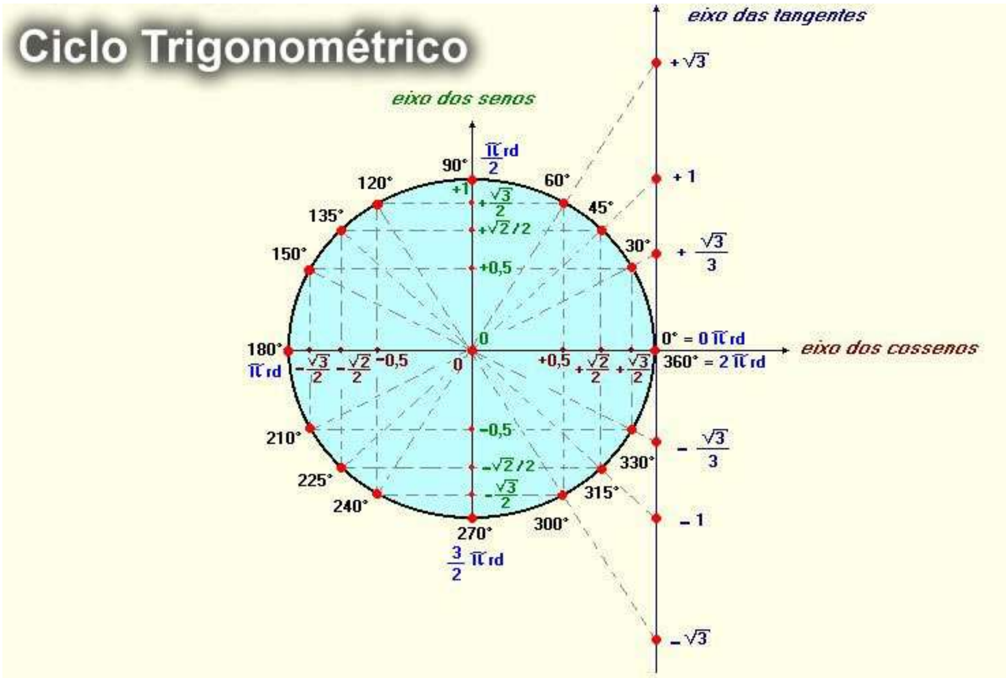
O eixo y é denominado eixo dos senos e o eixo x é denominado eixo dos cossenos.

Daí, se P é um ponto do ciclo trigonométrico podemos escrever P(cos x, sen x).

Agora podemos falar de seno e cosseno de arcos, ou ângulos de qualquer medida, e partindo da simetria existente entre os eixos, podemos determinar o seno e cosseno de vários ângulos baseados nos ângulos notáveis.



Partindo do mesmo principio podemos determinar a tangente.



E a partir daí, completar a tabela:

Grau	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
rad																	
sen																	
Aprox. Déc.																	
cos																	
Aprox. Déc.																	
tg																	
Aprox. Déc.																	

Resolver exercícios do tipo:

-Os biólogos de uma reserva ecológica descobriram que a população P de animais de certa espécie presente na reserva variava durante o ano segundo a fórmula:

$P(t) = 500 - 150 \cos\frac{(t+2)\pi}{3}$, em que t é o tempo em meses e t = 1 corresponde ao mês de janeiro. Qual seria a população de animais dessa espécie na reserva no me de novembro?

-Calcule os possíveis valores reais de x:

a)sen x = -1 b)tg x = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) cos x = $\frac{1}{2}$

Segunda parte:

-Duração prevista: 200 minutos.

-Recursos educacionais utilizados: Software GeoGebra; folha de atividades; laboratório de informática (opcional) / projetor multimídia e notebook do professor.

-Descritores:

H71 Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos.

H72 Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa.

H02 Associar pontos num plano cartesiano às suas coordenadas e vice-versa.

-Organização da turma: alunos dispostos em pequenos grupos de 4 alunos.

-Pré-requisitos: O aluno deverá conhecer o ciclo trigonométrico.

-Objetivos: Construir o gráfico da função seno e cosseno.

-Metodologia:

Nessa aula vamos começar a construir os gráficos que representam as funções seno e cosseno. Para estudar a função seno (y = sen x) e a função cosseno (y = cos x) vamos variar x no intervalo [0, 2π]. Para tanto utilizaremos o software GeoGebra.

<u>Construção do gráfico da função seno</u>

Passos:

1- No campo "Entrada", disponível na parte inferior da tela, digite O=(0,0).

O programa marcará o ponto O, origem do sistema de eixos cartesianos.

2- Agora vamos traçar a circunferência que representará o ciclo trigonométrico. Para isso, clique no botão 

, disponível no 6º menu de botões, e clique no ponto O (origem do sistema cartesiano). Vai abrir-se uma caixa de diálogo, pedindo que você informe que raio você deseja que sua circunferência tenha. Digite 1, que é o raio do ciclo trigonométrico, e o botão OK, e você verá na tela uma circunferência de centro O e raio unitário.

3- Agora vamos marcar a origem do ciclo trigonométrico. Como vimos, a origem é o ponto (1,0), que chamaremos nesta construção de A. Então, novamente no campo Entrada, digite A=(1,0) seguido da tecla ENTER. Surgirá na tela o ponto A(1,0).

4- Proceda da mesma maneira para marcar os pontos B=(-1,0), C=(0,1) e D=(0,-1). Este é o ciclo trigonométrico, e os pontos A, B, C e D são os limites dos quadrantes.

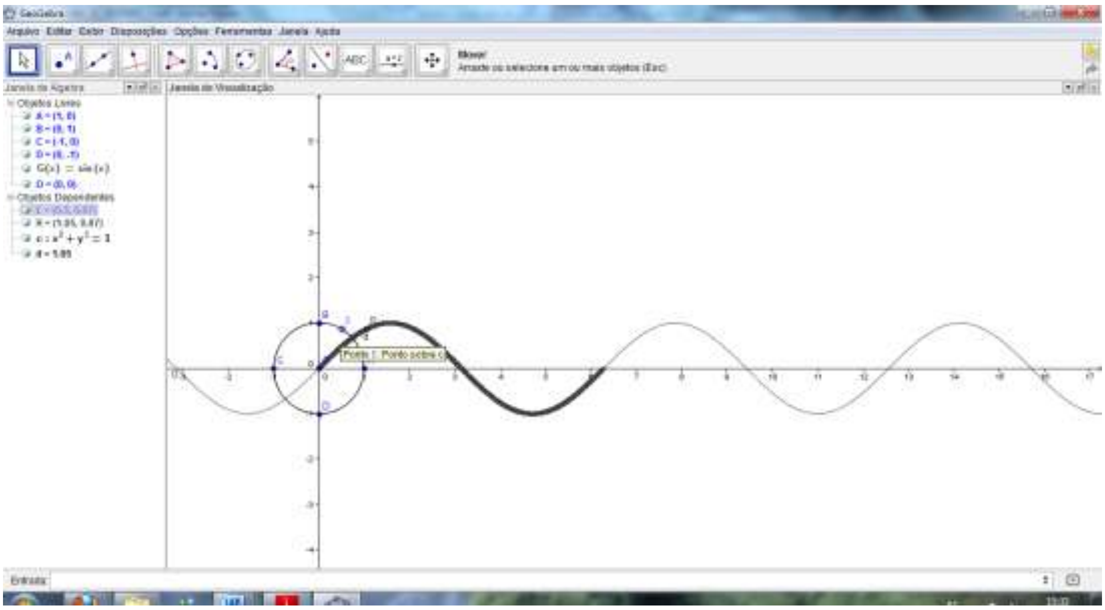
5- Tome um ponto E qualquer no ciclo trigonométrico e marque o arco AOE, clicando no botão  (6º menu de botões) e, sequencialmente, nos pontos O, A e E. Você verá na janela da álgebra surgir a indicação "*d*=...", que representa o comprimento do arco AOE.

6- Digite no campo Entrada os pontos G=(sin(d),0) e R=(d,sin(d)). Surgirão na tela os pontos G e R, de maneira que o comprimento do segmento OG indica o seno do arco AOE e o ponto R é o ponto cuja ordenada é o comprimento do arco AOE e a abscissa é o seno desse arco. Movimente o ponto E no ciclo trigonométrico e observe G e R movendo-se, o primeiro no intervalo de [-1,1] no eixo y e o segundo, pela tela.

7- Para observar o caminho que o ponto R está descrevendo, vá à Janela da Álgebra e clique com o outro botão do mouse sobre o ponto R, vai abrir-se uma caixa de opções, como podemos ver na figura abaixo. Clique na opção Habilitar Rastro

8- Agora movimente o ponto E novamente em torno do ciclo trigonométrico e observe o caminho descrito pelo ponto R. Podemos ver que forma-se um ciclo completo de 0 a 2π da função seno. Digite agora no campo Entrada a função g(x)=sin(x) e observe. (Para deixar de exibir o rastro do ponto R, basta clicar novamente sobre ele com o outro botão do mouse e desabilitar a opção “habilitar rastro”).

Nossa tabela ficará assim:



Exercícios

1-Clique no ponto E, movimente-o no sentido anti-horário sobre o círculo trigonométrico percorrendo o primeiro quadrante e responda:

a) Os números reais do intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$ possuem seno positivo ou negativo?
b) Nesse intervalo, quando o percorremos no sentido crescente o ponto E está percorrendo o círculo no sentido anti-horário. Durante esse movimento, os valores da ordenada de E vão aumentando ou diminuindo? Então os respectivos senos estão aumentando ou diminuindo?

2-Faça E se movimentar em cada um dos outros três quadrantes, sempre no sentido crescente (de $\frac{\pi}{2}$ a π, de π a $\frac{3\pi}{2}$ e, finalmente, de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π), observando esse movimento, e o movimento do ponto R (e de seu rastro). A partir dessas observações complete a tabela abaixo:

Função seno	1º quadrante	2º quadrante	3º quadrante	4º quadrante
Sinal				
Crescimento				
Imagem				

<u>Construção do gráfico da função cosseno</u>

Passos:

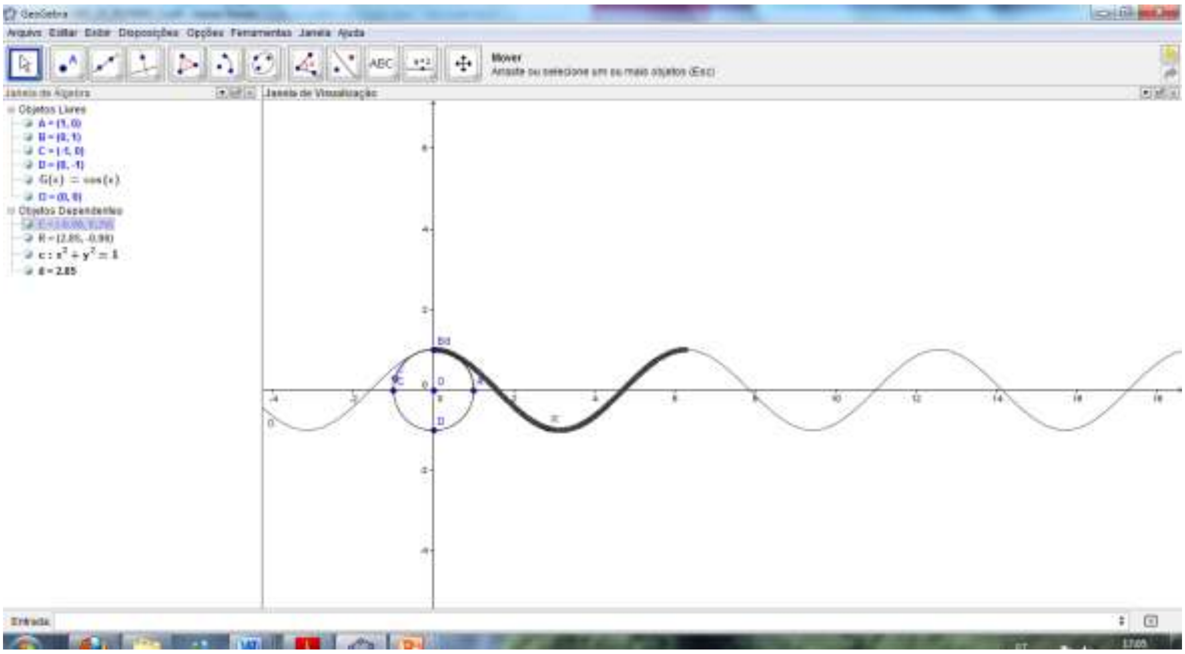
1-Refaça os paços da tarefa 1, procedendo da mesma maneira nos passos 1, 2, 3, 4 e 5.

6-Digite no campo Entrada os pontos G=(cos(d),0) e R=(d,cos(d)). Surgirão na tela os pontos G e R, de maneira que o comprimento do segmento OG indica o cosseno do arco AOE e o ponto R é o ponto cuja abscissa é o comprimento do arco AOE e a ordenada é o cosseno desse arco. Movimente o ponto E no ciclo trigonométrico e observe G e R movendo-se, o primeiro no intervalo de [-1,1] no eixo y e o segundo, pela tela.

7-Para observar o caminho que o ponto R está descrevendo, vá à Janela da Álgebra e clique com o outro botão do mouse sobre o ponto R, vai abrir-se uma caixa de opções, como podemos ver na figura abaixo. Clique na opção Habilitar Rastro

8-Agora movimente o ponto E novamente em torno do ciclo trigonométrico e observe o caminho descrito pelo ponto R. Podemos ver que forma-se um ciclo completo de 0 a 2π da função cosseno. Digite agora no campo Entrada a função g(x)=cos(x) e observe. (Para deixar de exibir o rastro do ponto R, basta clicar novamente sobre ele com o outro botão do mouse e desabilitar a opção “habilitar rastro”).

Nossa tabela ficará assim:



Exercícios

1-Clique no ponto E, movimente-o no sentido anti-horário sobre o círculo trigonométrico percorrendo o primeiro quadrante e responda:

a) Os números reais do intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$ possuem cosseno positivo ou negativo?

b) Nesse intervalo, quando o percorremos no sentido crescente o ponto E está percorrendo o círculo no sentido anti-horário. Durante esse movimento, os valores da abscissa de E vão aumentando ou diminuindo? Então os respectivos cossenos estão aumentando ou diminuindo?

2- Faça E se movimentar em cada um dos outros três quadrantes, sempre no sentido crescente (de $\frac{\pi}{2}$ a π, de π a $\frac{3\pi}{2}$ e, finalmente, de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π), observando esse movimento, e o movimento do ponto R (e de seu rastro). A partir dessas observações complete a tabela abaixo:

Função cosseno	1º quadrante	2º quadrante	3º quadrante	4º quadrante
Sinal				
Crescimento				
Imagem				

Terceira parte:

-Duração de 200 minutos.

-Recursos educacionais utilizados: Uso de folha de atividades.

-Organização da turma: alunos dispostos em duplas.

-Objetivos: colocar em prática os conceitos adquiridos nas atividades anteriores.

-Metodologia:

Nessa aula e na próxima serão feitos vários exercícios de fixação que trabalhem os vários assuntos que abordamos.

Folha de atividade em anexo.

3. Avaliação:

Durante o decorrer das aulas as atividades em grupo serão recolhidas para serem avaliadas e com isso observado o desenvolvimento dos alunos, além de ser realizada a avaliação bimestral na qual conterá questões sobre os temas abordados.

4. Referências:

DANTE, L. R. **Matemática:** contexto e aplicações**.** São Paulo: Ática, 2010, v.2

GIOVANNI, J. R. & BONJORNO, J. R. **Matemática completa.** 2. ed. renov. São Paulo: FTD, 2005, v.1

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D. et al. **Matemática:** ciência e aplicações. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010, v.1, 304 p.

XAVIER, Claudio & BARRETO, Benigno. **Matemática aula por aula.** 2. ed. São Paulo: FDT, 2005, v.1

ANEXO

Exercícios

1-Determine o valor de x em cada equação trigonométrica abaixo:

a) cos x = $\frac{\sqrt{2}}{2}$
b) tg x = - $\sqrt{3}$
c) 2. sen x = - 1, para $0 < x < 2\pi$
d) sen x = $\sqrt{2}$
e) 1 + cos x = 0, para $-\pi < x < \pi$

2-(FGV-SP) Um supermercado, que fica aberto 24 horas por dia, faz a contagem do número de clientes na loja a cada 3 horas. Com base nos dados observados, estima-se que o número de clientes possa ser calculado pela função trigonométrica:

$$F(x) = 900 - 800.\text{sen}\,\frac{x\pi}{12}$$

onde f(x) é o número de clientes e x, a hora da observação (x é um número inteiro tal que $0 \leq x \leq 24$). Utilizando essa função, responda:

a)Qual a estimativa da diferença entre o número máximo e o número mínimo de clientes dentro do supermercado, em um dia completo?

b)Em que horário do dia a estimativa é de se ter 1300 clientes?

3-Um artigo publicado em um caderno de economia prevê que as exportações de um certo país (em milhões de dólares), no ano de 2010 + x, em que $x \in \{0, 1, 2, 3, ..., 19, 20\}$, serão dadas pela lei:

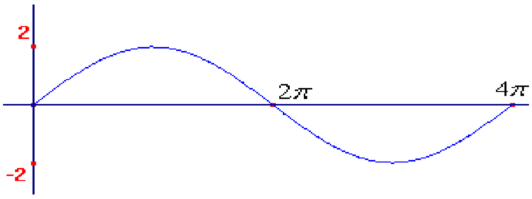
$$F(x) = 400 + 18.\cos\frac{x\pi}{3}$$

Supondo que isso realmente ocorra, determine:

a)o valor das exportações desse país nos anos de 2015 e 2020, em milhões de dólares.

b)quantas vezes, entre 2010 e 2030, f atingirá seu valor mínimo e qual é esse valor?

4- A figura abaixo mostra parte do gráfico da função:



a) sen(x)

b)2sen($\frac{x}{2}$)

c) sen($\frac{x}{2}$)

d) 2sen(x)

e)sen(2x)

5- Qual o valor máximo da função y = 10 + 5 cos 20x?

6-Determine o período, a imagem e construa o gráfico de cada uma das funções abaixo:

a) f(x) =3sen(x)

b) f(x) = cos(4x)

c) f(x) = 1 - sen(3x)

d) f(x) = -cos(x)

Obs.: Planejamento feito para duas semanas de aula, contando com as atividades avaliativas.