Formação Continuada Para Professores de Matemática CECIERJ / SEEDUC-RJ
Colégio: Colégio Estadual Stella Matutina
Professor: Eduardo Basílio Robba
Matrícula: 00914003-9
Modalidade / Nível de Ensino: 1º ano do Ensino Médio
Componente Curricular: Matemática
Tema: Geometria
Sub-Tema: Equações e funções trigonométricas
Tutor (a): Elisiane Aparecida Nunes Silva.

e-mail: eduardobbr@yahoo.com.br

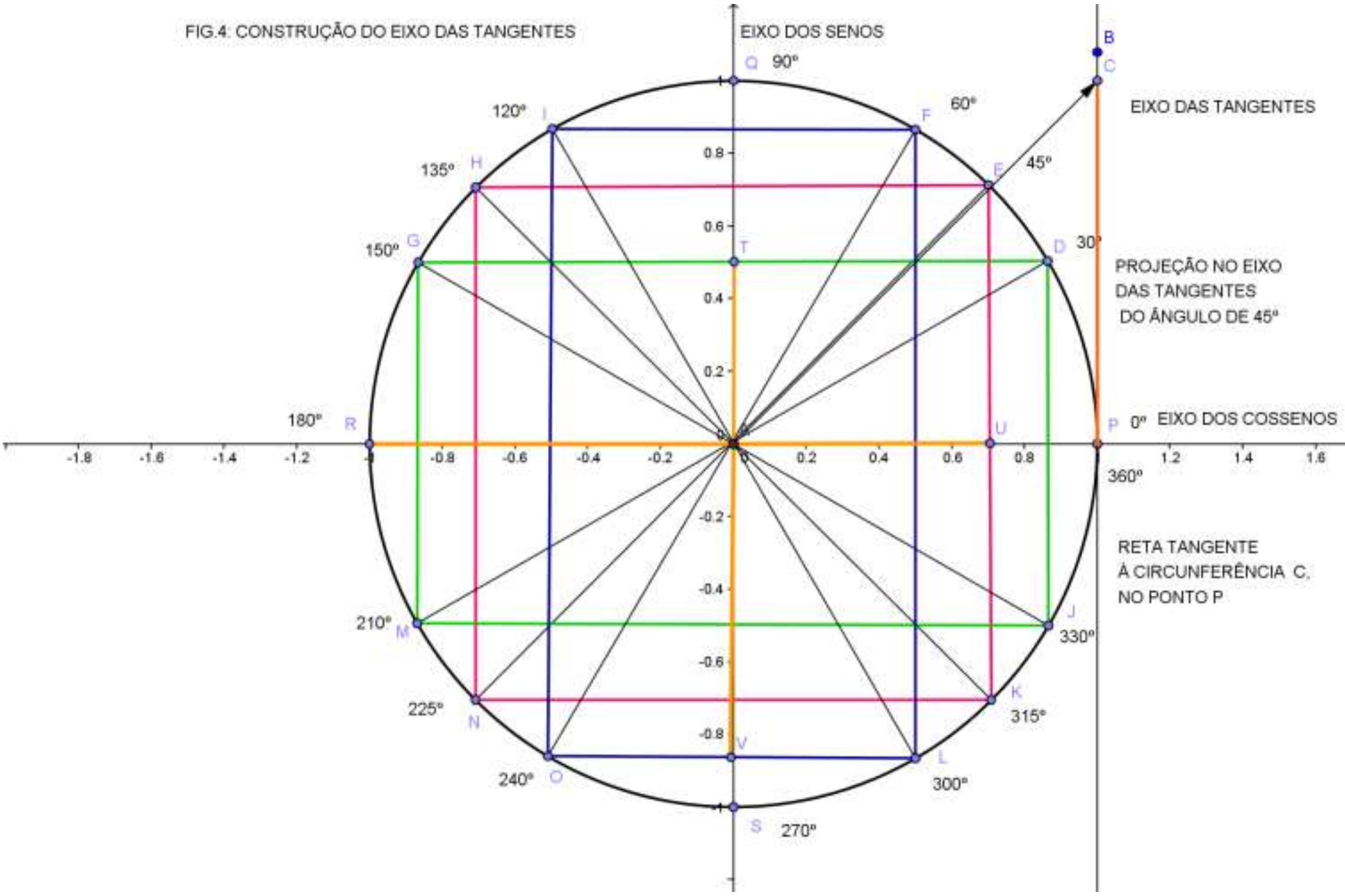
Introdução

Equações e funções trigonométrica

O trabalho de trigonometria na circunferência teve como desenvolvimento o reconhecimento dos eixos seno, cosseno e tangente e ainda a construção dos principais ângulos na circunferência trigonométrica. Foi mostrado as projeções de alguns ângulos nesses eixos, dando uma idéia geométrica dos valores de seno, cosseno e tangente, como mostram o texto e a figura a seguir.

“Devemos mostrar aos alunos a localização dos eixos dos senos e co-senos e fazer a construção do eixo das tangentes no sistema. Vamos mostrar os segmentos referentes ao seno, co-seno e tangente dos ângulos de 30º, 45º e 60º por suas devidas projeções aos respectivos eixos. Na figura 4 podemos identificar, em laranja, as projeções dos ângulos de 30º e 150º no eixo dos senos. Podemos identificar a projeção, no eixo das tangentes, do ângulo de 45º, em laranja. É uma forma geométrica de reconhecer os valores de seno, co-seno e a tangente de um ângulo. (Gráfico 4)”.

FIG.4: CONSTRUÇÃO DO EIXO DAS TANGENTES



.- O que o aluno poderá aprender com esta aula?

- Reconhecer e localizar os ângulos no circulo trigonométrico e suas respectivas medidas;
- Desenvolver e ampliar o conceito de medidas que se remetem em um círculo trigonométrico;
- Identificar e diferenciar unidade de ângulo e de arco, e suas respectivas transformações;
- Identificar o conjunto dos números reais a partir da circunferência trigonométrica;
- Compreender e calcular o comprimento de um arco;
- Resolver equações trigonométricas

- Pré-requisitos: Razões trigonométricas: a trigonometria no triângulo retângulo; deverá também relembrar o sistema de coordenadas cartesianas, seno, cosseno e tangente dos principais ângulos; funções trigonométricas.

(Ver: www.brasilescola.com)

- Material utilizado: Lápis de desenho (6B), lápis de cor (cores variadas), lápis de cera (cores variadas), régua (20 ou 30 cm), esquadros (90º, 45º, 45º e 90º, 30º, 60º), borracha macia, transferidor de ângulos, compasso, folha de papel A4, caderno de atividades, livro didático, folha de exercícios propostos.

- Recursos educacionais utilizados: notebook associado ao projetor multimídia; uso do programa geogebra.

- Tempo necessário para a execução das atividades: 8 aulas de 50 minutos cada.

- Descritores:

- H23: reconhecer círculo / circunferência seus elementos e algumas de suas relações;
- H81: Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam
- H91: Transformar grau em radiano ou vice-versa
- H103: resolver problemas que envolvam números reais e suas operações(adição, subtração, multiplicação,divisão, potenciação).

Desenvolvimento: 8 aulas de 50 minutos

Aula 1: Apresentação da equação trigonométrica

Estratégias: Dispor a turma em grupos de dois a quatro alunos.

Objetivos: Fazer com que o aluno aprenda a desenvolver equações que envolvam a função seno e sua representação gráfica.

A aula será iniciada com a projeção de alguns gráficos construídos com a ferramenta Geogebra. Será apresentada a construção da circunferência trigonométrica e seus principais ângulos e suas devidas projeções nos eixos dos senos, cossenos e das tangentes já exposta na introdução.

Para que exista uma equação qualquer é preciso que tenha pelo menos uma incógnita e uma igualdade. Agora, para ser uma equação trigonométrica é preciso que, além de ter essas características gerais, é preciso que a função trigonométrica seja a função de uma incógnita.

sen x = cos 2x

sen 2x – cos 4x = 0

4 . sen3 x – 3 . sen x = 0

São exemplos de equações trigonométricas, pois a incógnita pertence à função trigonométrica.

x^2 + sen 30° . (x + 1) = 15

Esse é um exemplo de equação do segundo grau e não de uma equação trigonométrica, pois a incógnita não pertence à função trigonométrica.

Grande parte das equações trigonométricas é escrita na forma de equações trigonométricas elementares ou equações trigonométricas fundamentais, representadas da seguinte forma:

sen x = sen a   cos x = cos a   tg x = tag a

Cada uma dessas equações acima possui um tipo de solução, ou seja, de um conjunto de valores que a incógnita deverá assumir em cada equação.

Equação trigonométrica elementar, é qualquer equação da forma:

sen x = sen a,   **cos x = cos a**   **e**   **tg x = tg a**,

onde x é um arco trigonométrico incógnita, a ser determinado, e a um arco trigonométrico qualquer.

Via de regra, qualquer equação trigonométrica não elementar, pode ser transformada numa equação elementar, através do uso das relações trigonométricas usuais.

Nota: os arcos a e a + k.2π onde k é um número inteiro (representando o número de voltas na circunferência) possuem as mesmas extremidades inicial e final, pois diferem entre si, por um número inteiro de voltas, ou seja: $a + k.2\pi \;\Rightarrow\; a + k.2\pi - a = k.2\pi$

Este resultado é importante e, será utilizado para o desenvolvimento que segue.

Observação: $2.\pi$ = 360º = uma volta completa.

Para a solução das equações trigonométricas elementares, vamos estabelecer as relações fundamentais a seguir:

Arcos de mesmo seno

Já sabemos que: $sen\,(\pi - a) = sen\ a$

Usando o conceito contido na nota acima, sendo x um arco trigonométrico, as soluções gerais da igualdade acima serão da forma:

$x = (\pi - a) + k.2\pi$ **ou** $x = a + k.2\pi.$

$x = \pi + 2k.\pi - a$ **ou** $x = a + k.2\pi$

$x = (2k + 1)\pi - a$ **ou** $x = 2k\pi + a$

Portanto, a solução genérica de uma equação do tipo: **sen x = sen a** será:

$x = (2.k + 1).\pi – a$ ou $x = 2k\pi$

Exemplo: Encontrar o conjunto solução da equação elementar sen x = 0,5.

Como 0,5 = sen 30º = sen $\pi/6$, vem, utilizando o resultado geral obtido acima:

sen x = sen $\pi/6$, de onde conclui-se:

$x = (2k + 1).\pi - \pi/6$ ou $x = 2k\pi + \pi/6$, com k inteiro, que representa a solução genérica da equação dada. K é o número de voltas.

Fazendo k variar no conjunto dos números inteiros, obteremos as soluções particulares da equação.

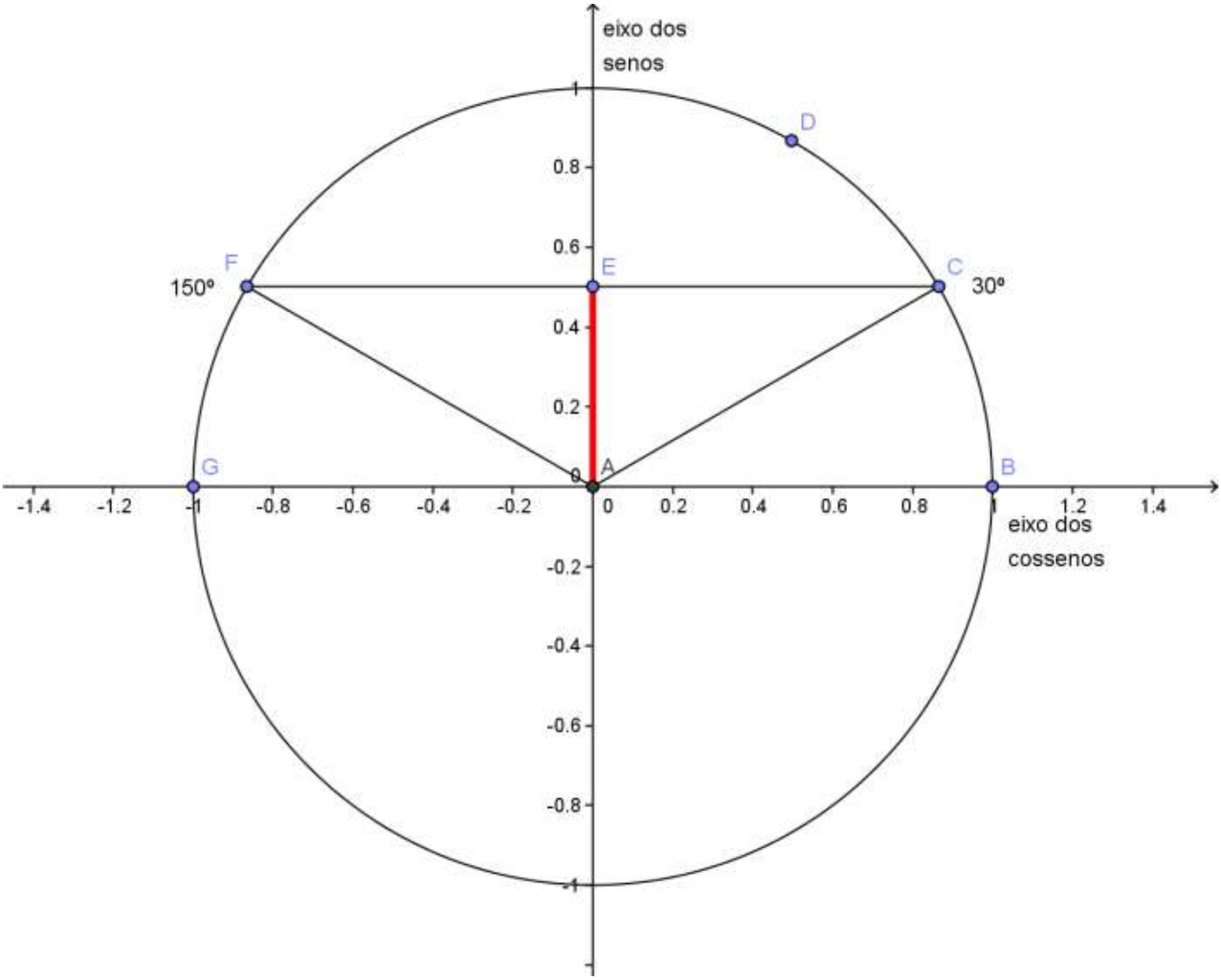
Assim, por exemplo, fazendo k = 0, obteremos por mera substituição na solução genérica encontrada acima,

$x = - \pi/6$ ou $x = \pi/6$;

fazendo k = 1, obteremos $x = 17\pi/6$ ou $x = 13\pi/6$, e assim sucessivamente.

Observar que a equação dada, possui um número infinito de soluções em **R** (conjunto dos números reais).

Segue abaixo a representação gráfica (geométrica) do sen x = $\frac{1}{2}$, com sua devida projeção no eixo dos senos no intervalo definido por: 0 < x < 2π .



Poderemos escrever o conjunto solução da equação dada na forma geral:

S = {x| x$\in$R; x =(2k + 1)π - π/6 ou x = 2kπ + π/6, k $\in$ Z}

Poderemos também listar os elementos do conjunto solução:

S = {..., - $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{17\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$, ...}

Exercícios: Encontre o conjunto solução para as seguintes equações;

a) sen x = sen 45º

b) sen x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Aula 2: Apresentação da equação trigonométrica (cont.)

Estratégias: Dispor a turma em grupos de dois a quatro alunos.

Objetivos: Fazer com que o aluno aprenda a desenvolver equações que envolvam a função co-seno e sua representação gráfica.

Arcos de mesmo co-seno

Já sabemos que **cos (-a) = cos a**.

Analogamente ao exposto em seno, poderemos escrever para as soluções gerais da igualdade acima:

x = (-a) + 2kπ ou x = a + 2kπ, sendo k um número inteiro.

Portanto, a solução genérica de uma equação do tipo ***cos x = cos a*** será dada por:

x = 2kπ + a* ou *x = 2kπ - a

Exemplo: Encontrar o conjunto solução da equação elementar $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Como $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^{o} = \cos \frac{\pi}{4}$, vem, utilizando o resultado geral obtido acima:

$\cos x = \cos \frac{\pi}{4}$, de onde conclui-se:

$x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ ou $x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$, com k inteiro, que representa a solução genérica da equação dada. K é o número de voltas.

Fazendo k variar no conjunto dos números inteiros, obteremos as soluções particulares da equação.

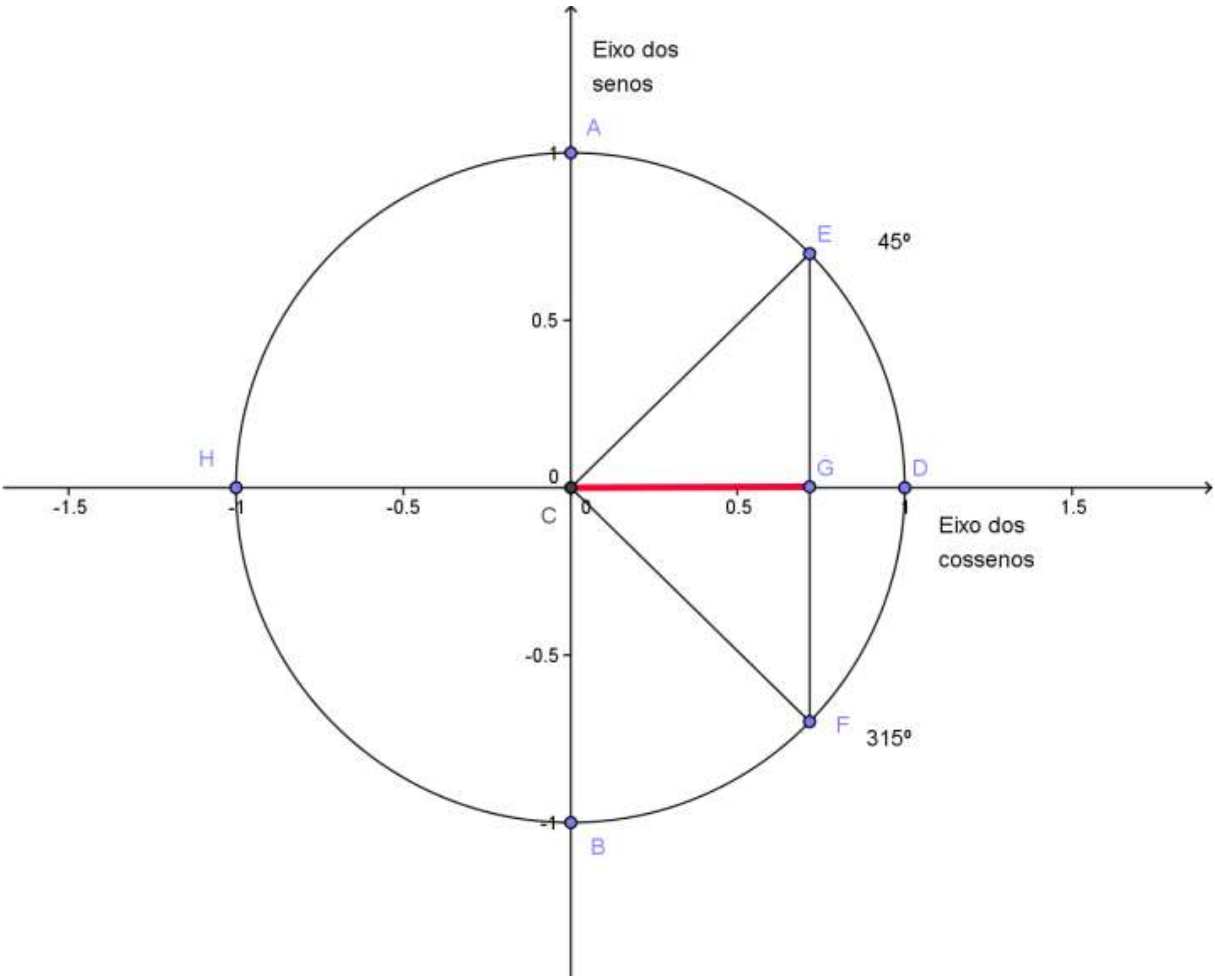
Assim, por exemplo, fazendo k = 0, obteremos por mera substituição na solução genérica encontrada acima,

$x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = -\frac{\pi}{4}$;

fazendo k = 1, obteremos $x = \frac{9.\pi}{4}$ ou $x = \frac{7.\pi}{4}$, e assim sucessivamente.

Observar que a equação dada, possui um número infinito de soluções em **R** (conjunto dos números reais).

Segue abaixo a representação gráfica (geométrica) do cos x = $\frac{\sqrt{2}}{2}$, com sua devida projeção no eixo dos cossenos no intervalo definido por: 0 < x < 2π .



Poderemos escrever o conjunto solução da equação dada na forma geral:

S = {x| x∈R; x = 2kπ + $\frac{\pi}{4}$ ou x = 2kπ - $\frac{\pi}{4}$, k ∈ Z}

Poderemos também listar os elementos do conjunto solução:

S = {..., - $\frac{\pi}{4}$, + $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7.\pi}{4}$, $\frac{9.\pi}{4}$, ...}

Exercícios: Encontre o conjunto solução para as equações que seguem e represente-as graficamente;

a) cos x = cos 60º

b) cos x = $\frac{1}{2}$

Aula 3: Apresentação da equação trigonométrica (cont.)

Estratégias: Dispor a turma em grupos de dois a quatro alunos.

Objetivos: Fazer com que o aluno aprenda a desenvolver equações que envolvam a função tangente e sua representação gráfica.

Arcos de mesma tangente

Já sabemos que **tg(π + a)= tg a.** Poderemos escrever as soluções gerais da igualdade acima:

$x = (\pi + a) + 2k\pi$ ou $x = a + 2k\pi$

Arrumando convenientemente, podemos escrever:

$x = (2k + 1)\pi + a$ ou $x = 2k\pi + a$, sendo k um número inteiro.

Observando que 2k é um número par e 2k + 1 é um número ímpar, para k inteiro, percebemos que poderemos reunir as duas expressões acima numa única: $x = k\pi + a$.

Portanto, a solução genérica de uma equação do tipo **tg x = tg a** , será dada por: $\mathbf{x = k\pi + a}$.

Exemplo: Encontrar o conjunto solução da equação elementar $\tan x = \sqrt{3}$

Como $\sqrt{3} = \tan 60^{\circ} = \tan \frac{\pi}{3}$, vem, utilizando o resultado geral obtido acima:

$\tan x = \tan \frac{\pi}{3}$, de onde conclui-se: $x = k\pi + \frac{\pi}{3}$
com k inteiro, que representa a solução genérica da equação dada. K é o número de voltas.

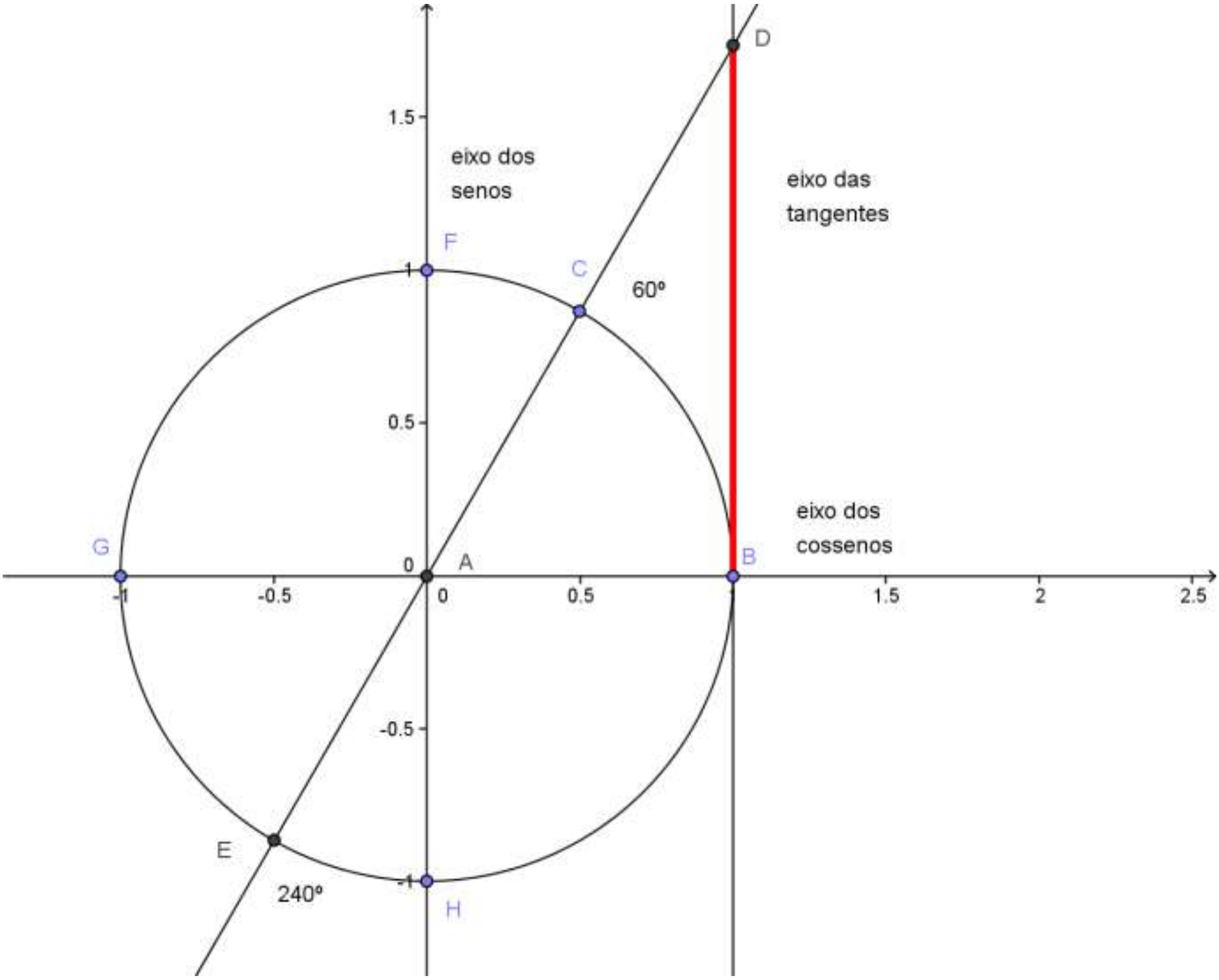
Fazendo k variar no conjunto dos números inteiros, obteremos as soluções particulares da equação.

Assim, por exemplo, fazendo k = 0, obteremos por mera substituição na solução genérica encontrada acima,

$x = \frac{\pi}{3}$; fazendo k = 1, obteremos $x = \frac{4.\pi}{3}$, e assim sucessivamente.

Observe que a equação dada, possui um número infinito de soluções em **R** (conjunto dos números reais).

Segue abaixo a representação gráfica (geométrica) do tan x = $\sqrt{3}$, com sua devida projeção no eixo das tangentes no intervalo definido por: 0 < x < 2π .



Poderemos escrever o conjunto solução da equação dada na forma geral:

S = {x| x∈R; x = $\frac{\pi}{3}$ + kπ , k ∈ Z}

Poderemos também listar os elementos do conjunto solução:

S = {..., $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4.\pi}{3}$, ...}

Exercícios: Encontre o conjunto solução para as equações que seguem e represente-as graficamente;

a) tan x = tan 30º

b) tan x = 1

Resumo:

sen x = sen a ⇔ x = (2k + 1)π - a ou x = 2kπ + a

cos x = cos a ⇔ x = 2kπ + a ou   x = 2kπ - a

tg x = tg a ⇔ x = kπ + a

sendo k um número inteiro.

Nota: O símbolo ⇔ significa: <u>equivale a</u>

Como qualquer equação trigonométrica pode ser reduzida a uma equação elementar através de transformações trigonométricas convenientes, as igualdades acima são básicas para a resolução de qualquer equação trigonométrica.

As funções a seguir são definidas nos termos das duas primeiras. As quatro equações abaixo são definições e não identidades demonstradas.

Tangente: $\tan x = \dfrac{sen\ x}{\cos x}$

Secante: $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

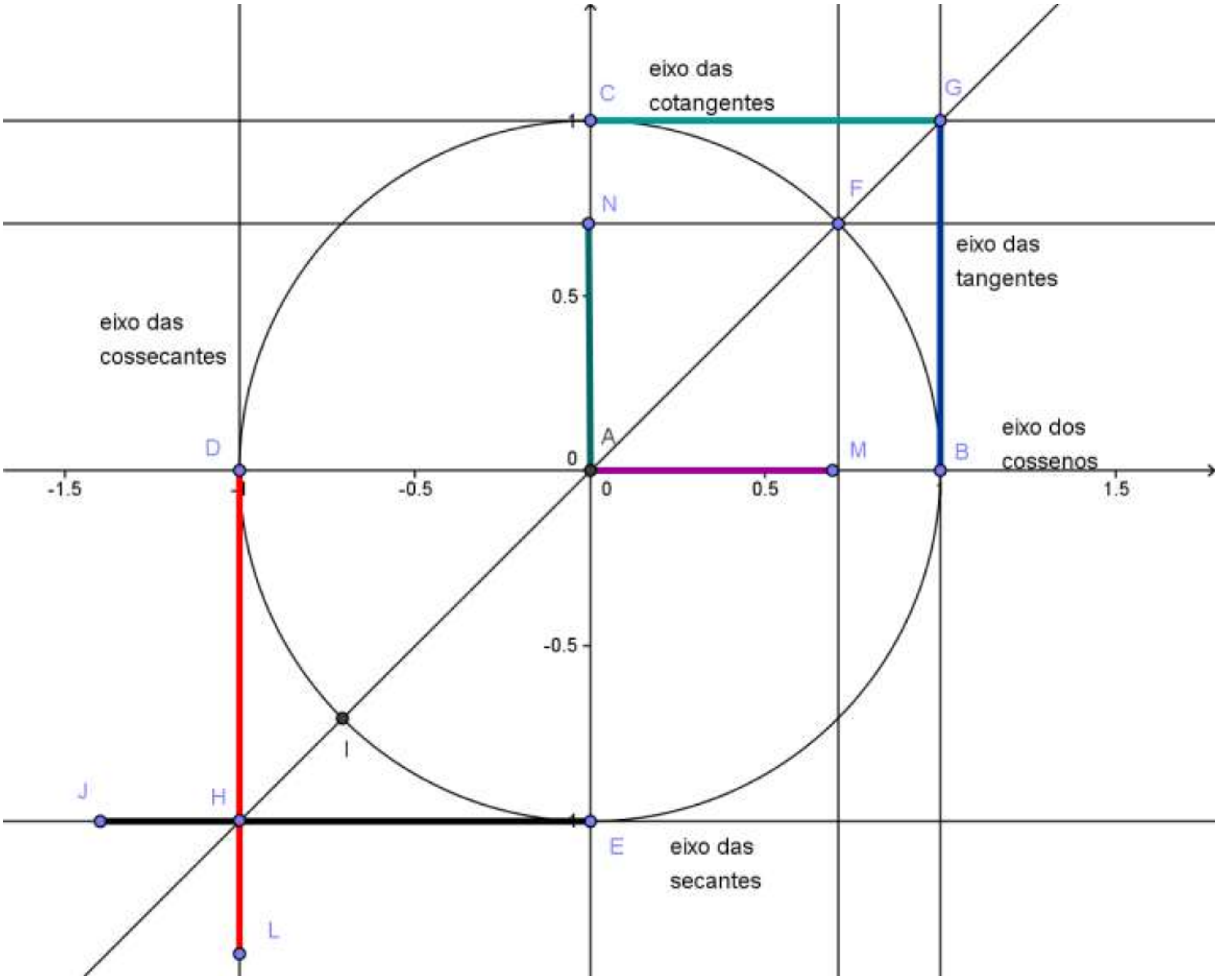
Cossecante: $\csc x = \dfrac{1}{sen\ x}$

Cotangente: $\cot x = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{sen\ x}$

O seno, o cosseno e a tangente são, de longe, as mais importantes. As inversas destas funções são geralmente designadas de arco-função, i.e., arcsin, arccos, etc., ou adicionando o expoente -1 ao nome, como em sen^{-1}, cos^{-1}, etc.

O resultado da função inversa é o ângulo que corresponde ao parâmetro da função. Por exemplo, arcsen(1) = 90°.

Segue a representação gráfica do sen, cos, tan, csc, sec e cot de 45º ou $\frac{\pi}{4}\ rd$. (Tal desenho foi desenvolvido no Geogebra)



Repare que o segmento $\overline{AF}$ é congruente aos segmentos $\overline{BG}\ e\ \overline{CG}$. E que o segmento $\overline{AH}$ é congruente aos segmentos $\overline{EJ}\ e\ \overline{DL}$. Ou seja, a tangente e a cotangente de 45º possuem a mesma medida da diagonal do quadrado AMFN, que é o raio da circunferência, 1, cujos lados possuem a mesma medida de seno e co-seno do mesmo ângulo; e que a secante e a co-secante do ângulo de 45º possuem a mesma medida da diagonal do quadrado ADHE, cujo os lados vale 1, raio da circunferência trigonométrica.

Aulas 4, 5, 6, 7, 8: Apresentação da equação trigonométrica (cont.)

Estratégias: Dispor a turma em grupos de dois a quatro alunos.

Objetivos: Fazer com que o aluno exercite o conhecimento adquirido e tire as dúvidas que permanecerem.

Exercícios: Equações trigonométricas resolvidas

Resolva as seguintes equações trigonométricas:

a) 2cosx – 3secx = 5

Solução:

Lembrando que secx = 1/cosx, vem, por substituição:

2.cosx – 3.(1/cosx) – 5 = 0 $\Rightarrow$ 2.cosx – 3/cosx – 5 = 0

Multiplicando ambos os membros por cosx $\neq$ 0, fica:

$2.\cos^2 x - 3 - 5.\cos x = 0$ Arrumando convenientemente, teremos:

$2.\cos^2 x - 5.\cos x - 3 = 0$.

Resolver a equação do segundo grau em cosx. Teremos:

$$\cos x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.2.(-3)}}{2.2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4}$$

Portanto, cosx = 3 ou cosx = -1/2.

A equação cosx = 3 não possui solução, já que o cosseno só pode assumir valores de –1 a +1.

Já para a equação cosx = -1/2, teremos:

cosx = -1/2 = cos120º = cos(2π/3) Logo, cosx = cos(2π/3)

Da solução genérica obtido anteriormente, podemos escrever:

$x = 2k\pi + 2\pi/3$ ou $x = 2k\pi - 2\pi/3$

Estas soluções podem ser reunidas na forma: $x = 2k\pi \pm 2\pi/3$.

Logo, o conjunto solução da equação proposta será:

S = {x | x = 2kπ $\pm$ 2π/3, k inteiro}. S = { x $\in R$ / x = 2kπ $\pm$ 2kπ/3, k inteiro}.

b) $5tg^2x - 1 = 7\ secx$ Resposta: $x = k\pi$ ou $x = k\pi + \pi/4$.

c) $3.senx - \sqrt{3}.cosx = 0$

Solução:

Teremos: $3.senx = \sqrt{3}.cosx$ Dividindo ambos os membros por $cosx \neq 0$, fica:

$3.senx/cosx = \sqrt{3}.cosx/cosx = \sqrt{3}$.

$3.tgx = \sqrt{3} \Rightarrow tgx = \sqrt{3}/3 = tg30º = tg(\pi/6)$ Vamos então resolver a equação elementar

$tgx = tg(\pi/6)$ Da solução genérica vista anteriormente, vem imediatamente que:

$x = k\pi + \pi/6$.

d) $\sqrt{3}.senx - cosx = 0$. Resposta: $x = k\pi + \pi/6$.

e) $tgx + cotgx = 2$

Solução:

Substituindo tgx e cotgx pelos seus valores expressos em função de senx e cosx, vem:

$senx/cosx + cosx/senx = 2$

Efetuando a operação indicada no primeiro membro, vem:

$(sen^2x + cos^2x)/(senx.cosx) = 2$ Como $sen^2x + cos^2x = 1$, fica:

$1/senx.cosx = 2 \Rightarrow 1 = 2.senx.cosx \Rightarrow 1 = sen2x \Rightarrow sen2x = 1 = sen90º = sen(\pi/2)$.

logo, $sen2x = sen(\pi/2)$, , vem:

$2x = (2k+1)\pi - \pi/2$ ou $2x = 2k\pi + \pi/2$. Dividindo ambas as expressões por 2, fica:

$x = (2k+1).\pi/2 - \pi/4$ ou $x = k\pi + \pi/4$. Simplificando a primeira expressão, vem:

$x = k\pi + \pi/4$ ou $x = k\pi + \pi/4$. Portanto, $x = k\pi + \pi/4$, que é a solução procurada.

f) $tgx + cotgx = 4/\sqrt{3}$ Resposta: $x = k\pi + \pi/3$ OU $x = k\pi + \pi/6$.

g) $4(sen^3x – cos^3x) = 5(senx – cosx)$

Solução:

Lembrando da identidade:

$A^3 – B^3 = (A – B)(A^2 + AB + B^2)$, poderemos escrever:

$4(senx – cosx)(sen^2x + senx.cosx + cos^2x) = 5(senx - cosx)$

Como $sen^2x + cos^2x = 1$, vem, substituindo:

$4(senx – cosx)(1 + senx.cosx) = 5(senx – cosx)$ Simplificando os termos em comum, vem:

$4(1 + senx.cosx) = 5 \Rightarrow 1 + senx.cosx = 5/4 \Rightarrow senx.cosx = 5/4 – 1 = 5/4 – 4/4 = 1/4$

$senx.cosx = 1/4$ Multiplicando ambos os membros por 2, fica:

$2.senx.cosx = 2(1/4) \Rightarrow 2.senx.cosx = 1/2$

Como já sabemos da Trigonometria que **$2.senx.cosx = sen\ 2x$**, vem:

$sen2x = 1/2 = sen30º = sen(\pi/6) \Rightarrow sen2x = sen(\pi/6)$

Aplicando a solução genérica, fica:

$2x = (2k+1)\pi - \pi/6$ ou $2x = 2k\pi + \pi/6$ Dividindo ambas as expressões por 2, vem:

$x = (2k+1).\pi/2 - \pi/12$ ou $x = k\pi + \pi/12$ Simplificando a primeira expressão, fica:

$x = k\pi + 5\pi/12$ ou $x = k\pi + \pi/12$, que é a solução procurada.

Portanto,

$S = \{x \mid x = k\pi + 5\pi/12$ ou $x = k\pi + \pi/12$, k inteiro$\}$.

h) Resolva a mesma equação anterior, no conjunto universo $U = [0, \pi/2]$.

Resposta: $S = \{5\pi/12, \pi/12\}$.

Obs: Basta atribuir valores inteiros a k na solução geral vista no exercício anterior e considerar apenas aqueles resultados compreendidos no intervalo dado $[0,\pi/2]$.

Nota: Existem diversos tipos de equações trigonométricas, sendo impossível abordá-las num único arquivo. Podemos afirmar, entretanto, que qualquer que seja a equação trigonométrica dada, através de transformações convenientes, sempre recairemos numa equação elementar, dos tipos vistos acima.

Formas de avaliações:

Os alunos serão avaliados da seguinte forma:

- Pelas construções gráficas realizadas em sala de aula; (1 ponto)
- Pelas anotações feitas durante a exposição das aulas; (1 ponto)
- Pela realização em sala dos exercícios propostos; (2 pontos)
- Pela plena participação no decorrer das aulas; (2 pontos)
- Por um trabalho em grupo que abordará cálculo e construção geométrica; (2 pontos)
- Uma prova individual contendo os conceitos aqui estudados; (2 pontos)

Referências Bibliográficas

- BARROSO, Juliane Matsubara (Ed.). *Conexões de matemática*. São Paulo: Ed. Moderna, 2010. 304 p.
- RIBEIRO, Jackson. *Matemática.* São Paulo: Ed. Scipione, 2011. 328p.
- CARMO, Manfredo P.; MORGADO, Augusto. C & WAGNER, Eduardo. Trigonometria e Números Complexos. 2ª Edição. Rio de Janeiro. SBM, 1999, p. 5.
- DANTE, Luiz Roberto. Matemática. Coleção Novo Ensino Médio. 2ª Edição. Rio de Janeiro. Ed. Ática, 2004, p. 22.
- IEZZI, Gelson. Fundamentos da Matemática Elementar. 6ª Edição. São Paulo. Ed. Atual, 1995, p. 93-C.
- GOVERNO DO ESTADO DO PARANÁ: *Os radianos*. [S.I.: s.n., 2011]. Disponível em: <http://www.diaadia.pr.gov.br/tvpendrive/modules/debaser/singlefile.php?id=21146(em 13.09.2011)>.

Rio de Janeiro, 18.09.2012
Eduardo Basílio Robba