Avaliação da execução do Plano de Trabalho 1 – 3º ano

Por: Sueli da Silva Monteiro Martins

Apliquei neste bimestre o PT1 nas turmas 3001 e 3002, 3º ano do Ensino Médio no C E Gustavo Barroso, Belford Roxo – RJ.

Quando planejei o PT procurei escolher atividades condizentes com a realidade da turma e com o tempo disponível. Às vezes escolhemos um RA que achamos interessante, mas que não atrai o aluno, por ser muito complicado ou muito longo. Prefiro os RA mais objetivos, aqueles que despertam o interesse do aluno e levam de fato a uma aprendizagem. Escolhi para esse PT um vídeo, disponível na Midiateca, que revela de maneira divertida a história do surgimento dos Números Complexos e o RA_2 que usa o Geogebra para representação dos complexos no plano de Argand-Gauss.

Não fiz mudanças no PT1 e o tempo sugerido também foi suficiente para realização das tarefas.

Os pontos positivos foram aulas mais dinâmicas, alunos mais participativos, integração dos alunos nas atividades em grupo, apoio da escola na liberação de material como Xerox, papel quadriculado e régua.

Ponto negativo observado: dificuldade dos alunos em efetuar as operações com números negativos.

Quanto à impressão dos alunos sobre a implementação do PT1 pude observar que foram boas. Assistiram ao vídeo com interesse e apesar de observarem que Números Complexos não são usuais na maioria das profissões, acharam o assunto fácil e interessante.

Os alunos não conheciam o Geogebra e acharam interessante a atividade proposta no Roteiro de Ação 2.

. Pude observar também a boa assimilação no resultado da prova bimestral, onde constaram, entre outras, atividades como as do Saerj: localizar números complexos no plano de Argand-Gauss e as quatro operações dentro do conjunto C. 80% da turma acertaram acima de 60% (erraram nos sinais). Agora estou ansiosa para ver como vão se sair no SAERJINHO.

FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ
COLÉGIO: Colégio Estadual Gustavo Barroso
PROFESSOR: Sueli da Silva Monteiro Martins
MATRÍCULA: 0290233-6
SÉRIE: 3º ano do Ensino Médio.
TUTOR : Leandro Mendonça do Nascimento

PLANO DE TRABALHO 1

Números Complexos

Por

Sueli da Silva Monteiro Martins

suelismmartins@hotmail.com

Rio de Janeiro, 24 de outubro de 2012

INTRODUÇÃO

Este Plano de Trabalho refere-se ao estudo dos Números Complexos.
Os Números Complexos surgiram no século XVI, ao longo das descobertas para resolução de equações algébricas de terceiro e quarto graus, No entanto, sua aceitação, compreensão e utilização ocorreram de maneira lenta e gradual, pois, somente no século XIX aparece sua representação, motivada pelas necessidades da Geometria, da Topografia e da Física.

Esses números não são usados com muita frequência em situações matemáticas do cotidiano, aparecendo mais em problemas relacionados à geração de energia elétrica. Então, pode haver o questionamento do aluno do Ensino Médio Regular sobre a importância de estudar o tema já que é especifico para os cursos de Eletrotécnica ou Engenharia Elétrica. Nesse momento é preciso estimular o aluno a ampliar seus conhecimentos e aprender um pouco mais sobre esse novo conjunto numérico. Pode-se fazer esse estímulo usando alguns programas encontrados na internet.

Será usado nesse PT um vídeo, que revela de maneira divertida a história do surgimento dos Números Complexos, para iniciar o assunto e despertar no aluno o interesse pelo estudo desse tema. O vídeo encontra-se disponível na Midiateca do curso com o titulo de Álgebra, Números e Funções (vídeo 3). Será usado também o Geogebra para representação dos complexos no plano de Argand-Gauss.

DESENVOLVIMENTO

Tempo previsto: 12 aulas de 50 minutos – 600 minutos

Área de conhecimento: Matemática

Assunto: Números Complexos

Objetivos: Apresentar os números complexos como mais uma ferramenta matemática.

Pré-requisitos: Operações elementares com números reais; determinação das raízes de uma função a partir da sua representação algébrica; produtos notáveis.

Material necessário: Folha com informações e atividades, computador e um Data show, livro do aluno (PAIVA, Manoel; *Matemática*. São Paulo, Moderna,2009), GeoGebra

Organização da classe: Turma organizada em duplas

Descritor associado: H36 – Efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica.

Aula 1: Álgebra, Números e Funções (vídeo 3 – 2ª parte) **(**Vídeo disponível na Midiateca), conceitos e definições

Duração prevista: 200 minutos

Desenvolvimento da atividade

- Antes de apresentar o vídeo, será apresentado o problema abaixo:

Em 1545, O matemático Gerônimo Cardano publicou um trabalho que propunha o seguinte problema: "Dividir o número 10 em duas partes de modo que o produto seja 40". Vocês são capazes de resolvê-lo?

Solução: Montando o sistema

$\begin{cases} x + y = 10 \\ x.y = 40 \end{cases}$ Da 1ª equação temos: y = 10 – x

Substituindo na 2ª equação temos:

x.(10 – x) = 40 $\Leftrightarrow$ x² - 10x + 40 = 0

Δ = 100 – 160 = – 60 Provavelmente, nesse momento os alunos vão dizer que não existem raízes reais. Mas como ficariam montadas as raízes?

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{-60}}{2} \begin{cases} x_1 = 5 + \sqrt{-15} \\ x_2 = 5 - \sqrt{-15} \end{cases}$$

Então proporei a apresentação do vídeo para depois retornarmos ao problema.

- Apresentação do vídeo (10 min.) e comentários.
- Resolução segundo Cardano:

Substituindo x na soma: $(5+\sqrt{-15})+(5-\sqrt{-15})=10$

Substituindo x no produto:

$(5+\sqrt{-15}).(5-\sqrt{-15})$ = $25-5\sqrt{-15}+5\sqrt{-15}-\sqrt{-15}^2$ = 25 – (-15) = 40

Nos séculos seguintes continuaram aparecendo problemas que levavam os matemáticos a resultados corretos que, às vezes, só podiam ser resolvidos por meio do cálculo de raízes quadradas de números negativos. Esses números eram considerados “fictícios”, “imaginários” (denominação usada até hoje). Eles podem ser escritos da forma $a+b\sqrt{-1}$, em que **a** e **b** são números reais.

Exemplos: 2 + $\sqrt{-25}$ = 2 + 5 $\sqrt{-1}$

$\sqrt{-9}=3\sqrt{-1}$

Foi o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1785) quem utilizou pela primeira vez o símbolo **i** para $\sqrt{-1}$. No entanto esse símbolo só foi amplamente aceito após ser empregado pelo matemático alemão Carl Gauss (1777-1855) dando uma interpretação geométrica a esses números, aos quais determinou **Números Complexos (C).**

Definição: Numero complexo é todo número da forma **a + bi,** em que **a** e **b** são nº reais e **i** é a unidade imaginária, isto é, **i =** $\sqrt{-1}$ **.** Indica-se **z = a + bi**

Pela definição. Temos

$$\boxed{\mathbf{i} = \sqrt{-1} \quad \mathbf{i}^2 = \sqrt{-1}^{\,2} \Rightarrow \mathbf{i}^2 = -1}$$

Exercícios

1- Resolva as equações em C:

a) $x^2 - 4x + 5 = 0$ c) $x^2 + 24 = 0$

b) $x^2 + 2x + 5 = 0$ d) $x^2 + 36 = 0$

Aula 2- Forma algébrica de um número complexo e Operações com números complexos

Duração: 100 minutos

Forma algébrica de um número complexo

(usaremos o livro do aluno para estudo dirigido)

Z = a + bi { **a** é a parte real e **b** a parte imaginária }

$Z_1 = a$ ($a \neq 0$ e $b = 0$, z_1 é real)

$Z_2 = bi$ ($a = 0$ e $b \neq 0$. z_2 é imaginário puro)

$Z_3 = a + bi$ ($a \neq 0$ e $b \neq 0$, z_3 é imaginário)

Igualdade entre complexos:

a + bi = c + di $\Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$

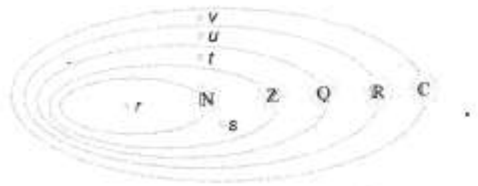
Números complexos conjugados:

a + bi é conjugado de c + di $\Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = -d \end{cases}$

Exercícios: (do livro do aluno)

Exercícios propostos

1 No diagrama a seguir, cada uma das letras r, s, t, u e v representa um dos números: 3,14; $\sqrt{2}$; -3; $4 - 2i$ e 0. Determine o valor associado a cada uma dessas letras.



$r = 0$, $s = -3$, $t = 3{,}14$, $u = \sqrt{2}$, $v = 4 - 2i$

2 Classifique, no caderno, como verdadeira ou cada uma das afirmações.

verdad

a) Todo número real é também número compl

b) Todo número complexo é também número r

c) $\mathbb{C} \cap \mathbb{R} = \varnothing$ falsa

verdad

d) $\mathbb{C} - \mathbb{R} = \{z \mid z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e b ≠

e) O conjugado do número $3 + 4i$ é $-3 - 4i$.

f) O conjugado do número $3 + 4i$ é $3 - 4i$. v

g) Se $a + 3i = 6 + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, então, $a + b = 9$. verdadeira

3 Sendo os números complexos $z_1 = (x - 5) + (x^2 - 25)i$ e $z_2 = (x + 5) + (x - 5)i$, classifique cada um deles como real, imaginário ou imaginário puro para:

a) $x = 5$ z_1 e z_2 são números reais.

b) $x = -5$ z_1 é um número real e z_2 é um número imaginário puro.

c) $x = 7$ z_1 e z_2 são números imaginários.

4 Determine os valores reais de x para que o número complexo $(x^2 - 9) + (x - 3)i$ seja:

a) real $x = 3$

b) imaginário $x \neq 3$

c) imaginário puro $x = -3$

5 Dada a igualdade $2a + (a + 2)i = (b - a) + bi$, determine os números reais a e b.

$a = 1$ e $b = 3$

6 Encontre os números reais x e y de modo que $x^2 + 4x + (x - y)i = 9 - y^2 + 3i$.

($x = 0$ e $y = -3$) ou ($x = 1$ e $y = -2$)

Operações elementares com números complexos

(Adição, subtração e multiplicação)

Os alunos acompanharam as definições no livro e faremos apenas as demonstrações no quadro, usando exemplos numéricos. Para tornar a aula mais dinâmica será solicitada a ida de alunos ao quadro para resolverem os exemplos que podem ser sugeridos por eles mesmos.

Exercícios: (valor 1 ponto)

1- Dados z_1 = 2 +3i , z_2 = – 5 – 4 i, z_3 = 5i ,calcule:

a) $z_1 + z_2 - z_3$

b) $z_1 - \overline{z_2}$

c) $z_1 * z_2$

d) $z_1 * z_3$

e) $z_2 * z_3$

f) $(z_1 + z_3) * z_1$

2- (por ROSEMARY PITANGA DE OLIVEIRA ARAUJO-BELFORD ROXO) João levou para a sua professora uma questão que havia recebido no pré-vestibular social, solicitando que a resolvesse. Em resposta, a professora devolveu a pergunta e solicitou que o aluno a resolvesse. Eis a questão:

Qual é o resultado da operação Z1 . Z2, sabendo que Z1 = 4 + 3 i e Z2 = 4 i?

a) $16 + 12\, i^2$

b) $4 + 12\, i^2$

c) 28i

d) -12 + 16 i

Aula 3 - Divisão e Forma algébrica de números complexos inversos

Duração prevista: 100 minutos

(Usando o livro como apoio, serão resolvidos alguns exemplos no quadro)

Exemplos:

1- Escreva o quociente na forma a + bi

$$z = \frac{2+3i}{1+2i} * \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{8}{5} - \frac{i}{5}$$

2- Reduza a expressão $z = \frac{1+i}{i} + \frac{i}{1+i}$ à forma a + bi

Devem-se multiplicar os termos de cada fração pelos conjugados dos denominadores. Daí:

$$\frac{(1+i)(-i)}{i(-i)} + \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-i-i^2}{-i^2} + \frac{i-i^2}{1-i^2} = \frac{-i+1}{1} + \frac{i+1}{1+1} = 1 - i + \frac{i+1}{2} =$$
$$\frac{2-2i+i+1}{2} = \frac{3-i}{2} \qquad \text{Portanto, } z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i.$$

3- Determine $k \in R$ de modo que o número complexo $z = \dfrac{2+i}{4+4i}$ seja um número real e verifique que valor z assumirá.

Multiplicando os termos pelo conjugado do denominador:

$$z = \frac{2+i}{4+ki} \cdot \frac{4-ki}{4-ki} = \frac{8-2ki+4i-ki^2}{16-k^2i^2} = \frac{8-2ki+4i-ki^2}{16+k^2} = \frac{8+k+(4-2k)i}{16+k^2} \Leftrightarrow$$
$$z = \frac{8+k}{16+k^2} + \frac{4-2k}{16+k^2}i$$

Para que um número seja real, sua parte imaginária deve ser nula, ou seja

$$\frac{4-2k}{16+k^2} = 0 \quad \text{ou} \quad 4-2k = 0 \Leftrightarrow k = 2$$

Substituindo **k** em $z = \dfrac{2+i}{4+ki}$, teremos:

$$z = \frac{2+i}{4+2i} = \frac{2+i}{2(2+i)} = \frac{1}{2}$$

Portanto, para k = 2, o número **z** é igual a $\frac{1}{2}$.

4- O inverso de z = 3 + 4i é $z^{-1} = \dfrac{1}{3+4i}$

Para obter a forma algébrica desse numero basta multiplicar numerador e denominador pelo conjugado do denominador.

$z^{-1} = \dfrac{3}{25} - \dfrac{4i}{25}$

Exercícios (1 ponto)

1- Escreva os seguintes quocientes na forma a + bi:

a) $\dfrac{2}{1+i}$ b) $\dfrac{7+2i}{i}$ c) $\dfrac{-3+2i}{1-5i}$ d) $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$

2- Escreva na forma a + bi

Z = $\dfrac{(2+3i)(3+2i)}{4-3i}$

3- Determine $k \in R$ de modo que o número complexo $z = \dfrac{2+i}{1+ki}$ seja

a) real; b) imaginário puro.

Aula 4 - Potências de i

Duração prevista: 100 minutos

Resolver as potências i^0, i^1, i^2, $i^{3,}$ i^4, i^5, $i^{6,}$ i^7, i^8, i^9, ..., de modo que os alunos concluam que existem somente quatro valores para potência de i com expoentes inteiros.

Dada a demonstração do livro temos a conseqüência:

Para o cálculo da potência i^n com n inteiro e $n \geq 4$, dividimos n por 4 obtendo um resto inteiro r. Temos então $\mathbf{i^n = i^r}$.

$$\mathbf{i^{14} = i^2 = -1} \qquad \textbf{(14 : 4 = 3 e resto 2)}$$

$$i^{-25} = \frac{1}{i^{25}} = \frac{1}{i^1} = \frac{1}{i} * \frac{(-i)}{(-i)} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{1} = -i$$

Exercícios propostos

14 Copie a tabela a seguir no caderno e complete-a.

linha 1	$i^0 = 1$	$i^4 = 1$	$i^8 =$ [redacted]
linha 2	$i^1 = i$	$i^5 =$ [redacted]	$i^9 =$ [redacted]
linha 3	$i^2 = -1$	$i^6 =$ [redacted]	$i^{10} =$ [redacted]
linha 4	$i^3 = -i$	$i^7 =$ [redacted]	$i^{11} =$ [redacted]

Nessa tabela, observamos um padrão nas potências de i. De acordo com esse padrão, responda.

a) Se acrescentássemos mais colunas a essa tabela, em que linha estaria a potência i^{246}? E a potência i^{123}? 3; 4

b) Qual é o valor de cada uma das potências calculadas no item **a**? −1; −i

c) Qual é o valor da expressão $i^0 + i^6 + i^9 + i^{40}$? 1 + i

d) Determine o menor número natural *n* tal que $i^{n+31} = 1$. $n = 1$

15 Calcule o valor de cada uma das potências:

a) i^{65} i

b) i^{36} 1

c) i^{22} −1

d) i^{51} −i

e) $(2i)^7$ −128i

f) $(3i)^3$ −27i

g) $(1 + i)^{16}$ 256

16 (UFRGS-RS) $(1 + i)^{15}$ é igual a: alternativa b

a) $64(1 + i)$

b) $128(1 - i)$

c) $128(-1 - i)$

d) $256(-1 + i)$

e) $256(1 + i)$

17 Um número complexo *w* é uma raiz quadrada de um número complexo *z* se, e somente se, $w^2 = z$. Em duplas:

a) Mostrem que os números $w_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ e $w_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ são raízes quadradas do número complexo $z = 4i$.
Ver Suplemento com orientações para o professor.

b) Determinem as raízes quadradas do número complexo $z = 2i$. 1 + i; −1 − i

(*Sugestão*: No item **b**, representem uma raiz quadrada de *z* por $a + bi$, com *a* e *b* reais, e imponham que $(a + bi)^2 = z$.)

(Livro do aluno)

Aula 5 – Representação geométrica de um número complexo (Roteiro de ação 2)

Duração prevista: 100 minutos

Área de conhecimento: Matemática

Assunto: Números Complexos

Objetivos: Apresentar o plano de Argand-Gauss e a representação dos números complexos.

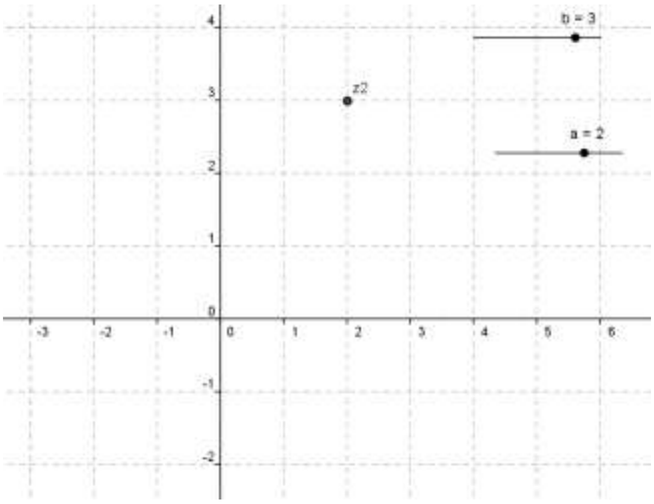
Pré-requisitos: Representação algébrica dos números complexos; plano cartesiano.

Material necessário: Folha de atividades; computador com o software GeoGebra instalado e papel milimetrado.

Organização da classe: Turma disposta em duplas ou trios no laboratório de informática.

Descritores associados: H36 – Efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica.

Atividade 1
Você deve estar vendo uma tela como esta



Nela você vê dois controles deslizantes e um ponto indicado por z juntamente com as suas coordenadas, certo?

1. Para começar, você deve mover os parâmetros a e b e observar o que acontece com o ponto z.

2. Você consegue marcar qualquer ponto do plano alterando os parâmetros? Troque ideias com seus colegas.

Você já deve saber que os números complexos podem ser representados na forma z = a+bi, chamada forma algébrica. Naturalmente, podemos associar a cada número complexo o par ordenado (a; b).

3. Você acha que o ponto z indicado no plano, pode representar um número complexo? Por quê? Veja o que seus colegas pensam a respeito e tentem chegar a uma conclusão.

Quando o plano é visto como um plano no qual podemos representar os números complexos, ele é chamado Plano de Argand-Gauss, em homenagem a dois matemáticos importantes não apenas no estudo dos números complexos, mas, sobretudo por terem se dedicado à representação desses números de maneira geométrica.

4. Diga o que cada um dos eixos do Plano de Argand-Gauss representa.
5. É possível que mais de um número complexo esteja representado por um mesmo ponto? Por quê?
6. É possível que mais de um ponto represente o mesmo número complexo? Troque ideias com seus colegas e justifique sua resposta.
Agora, encontre os pontos no plano cujos números complexos obedecem às seguintes propriedades:
(a) Tem parte real igual a zero;
(b) Tem parte imaginária igual a zero;
(c) Tem parte real igual à parte imaginária;
(d) A parte imaginária é igual ao dobro da parte real mais três unidades.

Atividade 2 (1 ponto)

1- Construa o Plano de Gauss no papel milimetrado e represente os números complexos abaixo.

a) $z_1 = 6 + 3i$ e) $z_2 = -4 + 6i$
b) $z_4 = 2 - 5i$ f) $z_3 = -6 - 4i$
c) $z_5 = 4$ g) $z_8 = -2$
d) $z_6 = 5i$ h) $z_7 = -3i$

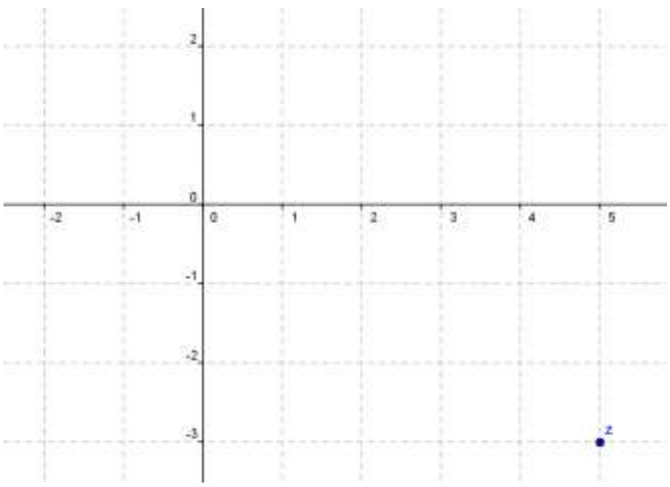
2- Após o estudo de números complexos um grupo de alunos criou alguns desafios para os colegas resolverem. O desafio criado por Bruno foi: A soma do número complexo $Z_1 = 3 + 2i$ com Z_2 resulta um número complexo representado no plano de Gauss. O número Z_2 é igual a:

A) $-6 + 3i$

B) $5 - 3i$

C) $2 - 5i$

D) $2 - i$



Avaliação

A avaliação será feita em quatro etapas:

- Prova bimestral contando de quatro questões sobre Números Complexos (PT 1), duas questões sobre Sistema Linear e 2 questões sobre Geometria Analítica – Valor: 5 pontos
- Participação ativa nos projetos interdisciplinares – 1 pontos
- Avaliação diária da participação do aluno na resolução de exercícios que constam no livro do aluno ou folha de atividades – 4 pontos (parte dessa pontuação funciona como recuperação paralela).
- Saerjinho (Avaliação diagnóstica) – Valor: 2,6 pontos

Obs.: Na prova bimestral deve constar questões como análise de gráficos, questões do Saerjinho, resolução de problemas.

Avaliação (4 questões de Nº Complexos)

COLÉGIO ESTADUAL GUSTAVO BARROSO
Prof ª Sueli Martins Disciplina: Matemática Data:___/___/ 2012.
Aluno (a):____________________________Nº____Turma:______ -3ª série

(x) Use caneta azul ou preta (x) Não use corretor
(x) Não rasure (x) Pode usar calculadora

Avaliação do 1º bimestre

1- Joana tem dois filhos. O filho mais velho tem o dobro da idade do filho mais novo. Sabendo que a idade do filho mais novo é o valor de n, na expressão $i^{n+21}=1$, e que n deve ser o menor número natural; qual é a idade do filho mais velho?

(A) 3 anos

(B) 6 anos

(C) 12 anos

(D) 20 anos

2- Maria é uma das alunas mais dedicadas do 3°ano do Ensino Médio. Ela está acostumada a resolver equações algébricas. Certo dia, se deparou com a equação $x^2 - 4x + 5=0$. Diante de tal fato, e com o conhecimento que Maria obtinha sobre o assunto, qual foi a resposta de Maria?

(A) Como o Delta é negativo, não podemos concluir os cálculos. Logo, a solução é vazia.

(B) A solução não é real, mas é complexa.

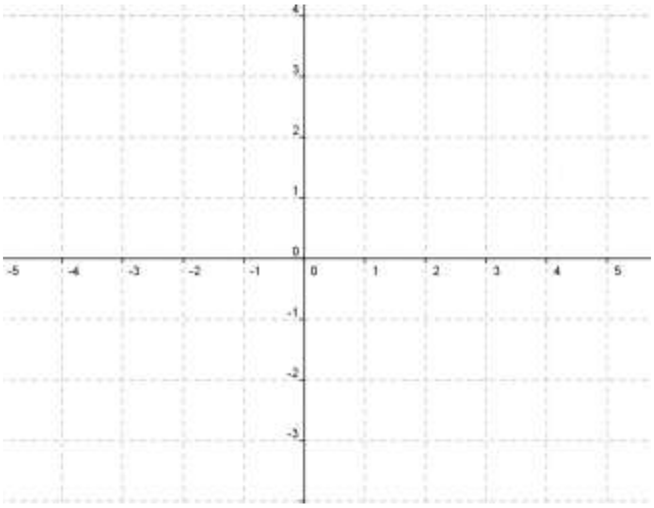
(C) A solução é {2+2i; 2-2i}

(D) A solução é {0; 2}

3- Localize no Plano de Gauss os números complexos:

a) $z_1 = -3 + i$

b) $z_2 = 2 - 3i$



4- Dados $z_1 = -3 + 5i$, $z_2 = 8 - 4i$ e $z_3 = 10i$ determine:

a) $z_1 + z_2 - z_3$

b) $z_1 * z_3$

Descritor associado a todas as questões:

H36 – Efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

PAIVA, Manoel; *Matemática*. São Paulo, Moderna, 2009.

NETO, Scipione Di Pierro; ORSI, Sergio; *Quanta - Matemática em Fascículos para o EM.* São Paulo, Saraiva, 2000.

YOUSSEF, Antonio Nicolau; SOARES, Elisabete; FERNANDES, Vicente; *Matemática*. São Paulo, Scipione, 2008.