FORMAÇÃO CONTINUADA - CEDERJ

SISTEMAS LINEARES

---

por Maria Bernadete Dias Manhães Pessanha

03/12/2012

TUTORA: Edileizer da Silva Pereira
GRUPO: 2

PLANO DE TRABALHO

Duração prevista: três semanas.

Área de conhecimento: Sistemas Lineares.

INTRODUÇÃO

O sistema linear está ligado de certo modo à álgebra linear e o entendimento mais profundo dos sistemas é dependente do domínio desta matéria. Um sistema linear, partindo da premissa de que tem resultado existente e determinado e não há dependência entre as equações, deve ter o mesmo número de equações e de incógnitas.

A resolução gráfica também será explorada com o apoio de softwares. No caso de sistemas de 2 equações e 2 incógnitas é possível trabalhar com materiais mais simples como o papel quadriculado. Para o caso de sistemas de 3 equações, o uso dos softwares gráficos é imprescindível para um estudo mais amplo do assunto, já que o desenho a mão livre se torna bem mais complicado.

Na matemática aplicada, podemos encontrar vários usos dos sistemas lineares. Exemplos são a física, a economia, a engenharia, a biologia, a geografia, a navegação, a aviação, a cartografia, a demografia, a astronomia.

Com o intuito de conscientizá-los e praticar cidadania o conteúdo será iniciado com o texto abaixo.

Cuidado com a reação química!

Uma das explicações para o uso da expressão “meio-fio” vem da evolução no descarte de lixo durante a Idade Média. Antes, o lixo era atirado ao meio da rua, onde existia uma vala para que a água da chuva o levasse para as partes mais baixas da cidade. Com a introdução da coleta manual do lixo, o “fio” central das ruas acabou desmembrado em dois “meios-fios” junto às residências. Ao falarmos de LIXO devemos entender qualquer resíduo decorrente da atividade humana, cujo descarte pode ter tratamento ou não. Os resíduos podem ser gasosos, líquidos ou sólidos.

O lixo não tratado que é depositado nos “lixões” tem um enorme potencial de contaminação do solo, da água e do ar, principalmente o de origem hospitalar ou industrial, e, por isso, estas instalações têm sofrido crescentes restrições e condicionantes para o licenciamento ambiental.

Legenda: Lixões

O lixo orgânico (lixo que tem origem animal ou vegetal) passa por várias transformações químicas e, quando submetido à ação de bactérias, em alta temperatura, se transforma em dois subprodutos: um é o adubo natural e o outro é o gás metano (CH4), que pode ser usado como combustível em usinas termoelétricas.

A reação de combustão do gás metano (CH4) ocorre quando ele interage com oxigênio (O2), resultando na formação de gás carbônico (CO2) e água (H2O). As reações químicas estão presentes em muitos fenômenos naturais e para compreender melhor como elas funcionam costuma-se representar o efeito delas por “equações químicas”. No caso do lixo a combustão do gás metano pode ser representada pela seguinte equação química:

CH4 + O2 → CO2 + H2O

Na Química, o termo “equação” é usado para representar o que ocorre antes e depois de uma reação química. Os reagentes são postos à esquerda e os produtos à direita, separados por uma flecha.

Quando ocorre uma reação química, o *Princípio de Lavoisier* ou *Lei de conservação das massas* garante que o número de átomos envolvido nos reagentes deve ser o mesmo presente nos produtos formados.

Texto escrito utilizando trechos de “Tratamento do lixo é um problema de todos” disponível em http://wwo.uai.com.br/UAI/html/sessao_11/2008/02/13/em_

Material usado na introdução.

Texto 1

Reflita e discuta com os colegas sobre o texto.

____

____

____

____

Descritores

- Identificar os sistemas lineares como modelos matemáticos que traduzem situações-problemas para a linguagem matemática.
- Resolver problemas utilizando sistemas lineares.

Pré-requisitos:

- Equação do 1º grau, representação gráfica de uma equação do 1º grau com duas incógnitas.

DESENVOLVIMENTO

Objetivos gerais

- Identificar os sistemas lineares como modelos matemáticos que traduzem situações-problemas para a linguagem matemática.

- Resolver problemas utilizando sistemas lineares.

Recursos utilizados:

- Data show;

- Sala de informática usando software winplot;

- Quadro branco, folha de atividades.

ATIVIDADE 1

Duração: 100 minutos

Habilidade Reconhecer situação que envolva sistemas lineares e, resolução de sistemas do tipo 2X2 como o método da adição e substituição.

Pré - Requisitos: Operações elementares com números reais

Assunto: Introdução a Sistemas Lineares

Recursos: Quadro e pincel

Objetivo: Introduzir o assunto sistemas lineares e fazer uma revisão dos métodos da adição e subtração.

Organização da Turma : Individual

Metodologia Adotada

Apresentar uma situação que se transforma em um sistema do tipo 2X2 e logo após revisar dois métodos conhecidos pelos alunos para resolução desse tipo de sistema.

PROBLEMA

Dois automóveis partem simultaneamente de duas cidades, viajando por uma mesma estrada, em sentidos opostos. Um sai de Palmas-TO com destino a Porto Seguro - BA e desenvolve a velocidade média de 75 Km/h. O outro sai de Porto Seguro com destino a Palmas e desenvolve uma velocidade média de 65 Km/h. Sendo a distância rodoviária entre Palmas e Porto Seguro de aproximadamente de 1400 Km, após quanto tempo eles se encontrarão? A que distancia de Porto Seguro?

Solução

A equação que descreve o movimento dos automóveis é $S = S_{\mathbf{0}} + Vt$, onde S é o espaço final do automóvel, S_0 o espaço inicial do automóvel, V velocidade média do automóvel e t o tempo em horas.

Automóvel 1

O automóvel 1 parte de Palmas no marco zero, com a velocidade média de 75 Km/h. Então a equação que descreve o movimento do automóvel 1 é:

$$S = S_0 + Vt$$
$$S = 0 + 75\mathbf{t}$$
$$S - \mathbf{75t} = \mathbf{0}$$

Automóvel 2

O automóvel 2 parte de Porto Seguro na distância de 1400 km de Palmas, com a velocidade média de 65 Km/h. Como o automóvel 2 está contra a orientação da trajetória então, a equação que descreve o movimento do automóvel 2 é:

$$S = S_0 + Vt$$
$$S = 1400 - 65\mathbf{t}$$
$$S + \mathbf{65t} = \mathbf{1400}$$

A partir de então obtemos o seguinte sistema linear de duas equações e duas incógnitas.

S – 65t = 0

S + 75 = 1400

DEFINIÇÃO

Sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Um conjunto de equações lineares da forma:

é um sistema linear de **m** equações e **n i**ncógnitas.

A solução de um sistema linear é a n-upla de números reais ordenados (r1, r2, r3,..., rn) que é, simultaneamente, solução de todas as equações do sistema.

Solução do Sistema Proposto

O Sistema proposto no início da aula pode ser resolvido por duas maneiras já conhecidas, o método da adição e o método da substituição.

Método da Adição

S – 65t = 0

S + 75t = 1400

O método da adição consiste em multiplicar uma das equações do sistema de equações por um número real, de modo que essa nova equação somada com a que não sofreu alteração, elimina-se uma variável.

No nosso caso, podemos multiplicar a 1ª equação por -1, teremos a seguinte equação:

$-S + 65t = 0$

O no sistema de equações ficará da seguinte forma:

Somando as duas linhas terão: 140 t = 1400→ t=10 horas.

Substituindo t=10 na 2ª equação temos $S + 75.10 = 1400 \rightarrow S = 1400 - 750 = 650$

Ou seja, eles se encontrarão após 10 horas de viajem no Km 650 de Porto Seguro.

Método da Substituição

S – 65t = 0

S + 75t = 1400

O método da substituição consiste em isolar uma variável em uma das equações e substituí-la na outra equação.

No nosso caso, podemos isolar S na 1ª:

$$S = 65t$$

Substituindo S na 2ª equação temos

$$65t + 75t = 1400$$
$$140t = 1400$$
$$t = \frac{1400}{140} = 10$$

Substituindo t=10 na 2ª equação temos $S + 75.10 = 1400 \rightarrow S = 1400 - 750 = 650$

Ou seja, eles se encontrarão após 10 horas de viajem no Km 650 de Porto Seguro.

Lista de Exercícios - 4º Bimestre

1- Um jogador de basquete fez o seguinte acordo com o seu clube: cada vez que ele convertesse um arremesso, receberia R$10,00 do clube e, caso errasse, pagaria R$5,00 ao clube. Ao final de uma partida em que arremessou 20 vezes, recebeu a quantia de R$50,00. Quantos arremessos ele acertou?

2- Resolver os sistemas utilizando a forma de solução indicada.

Resolver os sistemas 2 x 2 pelo método da substituição e adição.

$$\begin{cases} 5x + 3y = 22 \\ 8x + 5y = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 4y = 52 \\ -2x - 5y = -56 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 3y = 50 \\ 8x + 5y = 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x + 4y = 23 \\ -2x - 5y = -22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x + 2y = 11 \\ 4x + 3y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 4y = 28 \\ -2x - 5y = -29 \end{cases}$$

3- Observe os desenhos a seguir e responda o que se pede.

a) Invente um problema para a situação representada abaixo.

 = R$ 14,00

 = R$ 23,00

b) Escreva um sistema para a situação. Lembre-se de indicar a letra que usou para a pizza e para o refrigerante.

 ________________  ________________

ATIVIDADE 2

<u>Duração</u>:100 minutos

<u>Habilidades:</u> Saber classificar sistemas lineares do tipo 2 x 2 após solução com o método da adição e substituição.

<u>Pré - Requisitos:</u> Operações elementares com números reais, conhecer o método da adição e substituição.

Assunto: Classificação de Sistemas Lineares

Recursos: Quadro e pincel

Objetivo: Fazer com que o aluno saiba classificar os sistemas como: Possível e Determinado, Possível e Indeterminado e Impossível.

Organização da Turma : Individual

Metodologia Adotada

Resolva os sistemas lineares abaixo e classifique-os como: SPD, SI e SPI.

Pelo método da adição, temos:

a) y + x = 5 + y – x = - 3 __________________ 2y+ 0x=2 2y=2 y=1 Substituindo y=1 na primeira equação: 1+x=5 x=5-1=4 S{(4,1)} **Sistema Possível e Determinado**	b) y + x = 5 + y + x = - 2 Multiplicando a 2ª equação por -1, temos. + __________________ 0y+0x= 3 (Absurdo) **Sistema Impossível**	c) y + x = 5 2y + 2x = 10 Multiplicando a 1ª equação por -2, temos. + __________________ 0y+0x= 0 **Sistema Possível e Indeterminado**

1-Resolva o sistema linear 2 x 2; classifique-os quanto ao número de soluções:

a)

$$\begin{cases} 5x - 10y = 15 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 4x + 2y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

2- Resolva os sistemas lineares abaixo e classifique-os como: SPD, SI e SPI.

a) $$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$$

ATIVIDADE 3

<u>Duração</u>:100 minutos

<u>Habilidades:</u> Saber interpretar geometricamente os sistemas lineares do tipo 2X2 .

Pré - Requisitos: Noções básica de informática.

Assunto: Interpretação Geométrica dos Sistemas Lineares do tipo 2X2

Recursos: Computador que possua uma planilha eletrônica

Objetivo: Fazer com que o aluno saiba fazer a interpretação geométrica dos sistemas como: Possível e Determinado, Possível e Indeterminado e Impossível.

Organização da Turma: Dupla

Metodologia Adotada

Faça a interpretação geométrica dos sistemas abaixo e classifique-os como: SPD, SI e SPI.

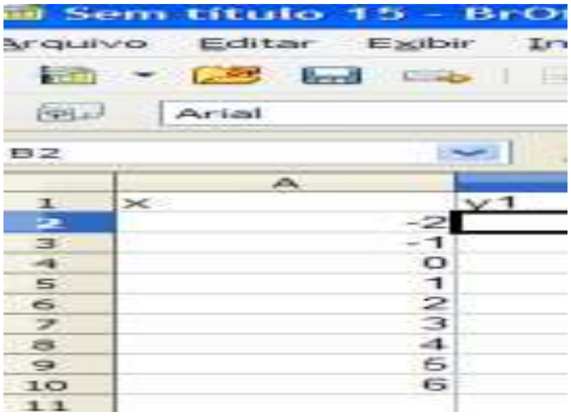
Podemos transformar as equações abaixo de cada sistema, em uma função do tipo y=ax+b.

a) $\{■(y+x=5@y-x=-3)$ 1) y+x=5 y=-x+5 2) y – x=-3 y= x-3	b) $\{■(y+x=5@y+x=2)$ 1) y+x=5 y=-x+5 2) y – x=-3 y= -x+2	c)$\{■(y+x=5@2y+2x=10)$ 1) y+x=5 y= -x+5 2) 2y + 2x=10 2y= -2x-10 $y=\frac{-2x+10}{2}=-x+5$

Os sistemas são os mesmos da aula anterior, agora faremos a interpretação geométrica dos sistemas.

Cada sistema é composto por duas leis de função, que irão gerar dois gráficos. Com a ajuda de uma planilha eletrônica podemos construir esses gráficos em um só plano cartesiano.

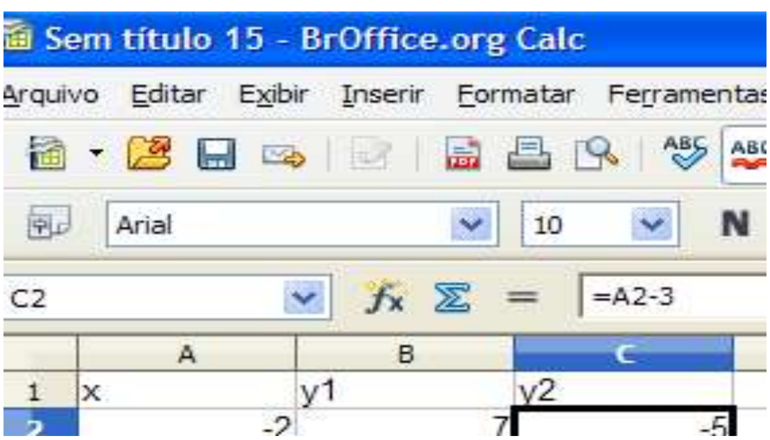
Para construir os gráficos definimos o domínio da função entre -2 e 6.



No caso do Sistema Linear a), representamos a 1ª função no plano será representado conforme abaixo:

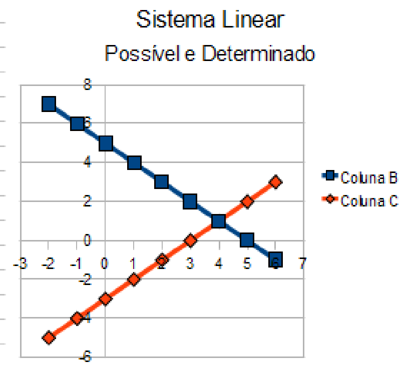
A coluna A contém os números do meu domínio, e na coluna B a imagem da minha primeira função. Se eu posicionar o mouse no canto inferior direito da célula, aparecerá uma cruz. Se pressionar o mouse e arrastar, a planilha fará o cálculo para os outros valos da coluna A.

Já a 2ª equação será da seguinte forma:



O mesmo procedimento será feito para a segunda equação. Logo após, vá a Inserir- Gráfico- XY. Dispersão- Escolha o Gráfico e Voila.

x	y1	y2
-2	7	-5
-1	6	-4
0	5	-3
1	4	-2
2	3	-1
3	2	0
4	1	1
5	0	2
6	-1	3



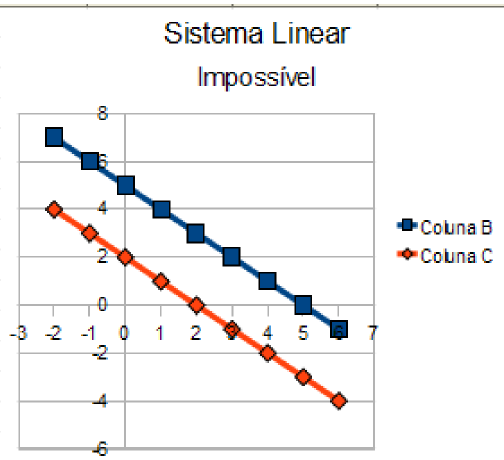
O aluno irá notar que as retas se cruzam no mesmo ponto encontrado pelo método da adição da aula anterior.

Logo o Sistema é Possível e Determinado

Para os sistemas b) e c), procedemos da mesma e chegamos ao seguinte resultado:

Sistema c)

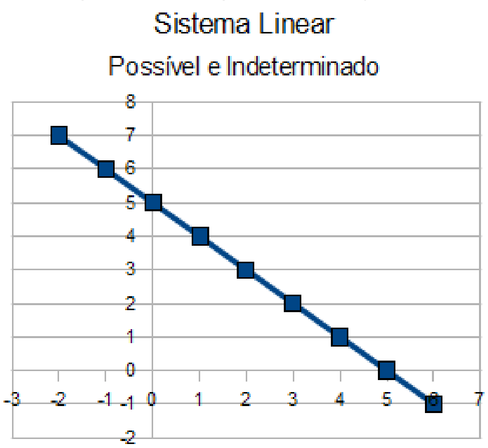
x	y1	y2
-2	7	4
-1	6	3
0	5	2
1	4	1
2	3	0
3	2	-1
4	1	-2
5	0	-3
6	-1	-4



Duas retas paralelas, o sistema é Impossível.

O Sistema c) possui duas equações idênticas, logo serão gráficos sobrepostos. O Sistema será Possível e Indeterminado

x	y1
-2	7
-1	6
0	5
1	4
2	3
3	2
4	1
5	0
6	-1



Exercícios valorizando a geometria

1-Faça a representação gráfica de cada sistema linear 2 x 2; classifique-os quanto ao número de soluções:

a)

$$\begin{cases} 5x - 10y = 15 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$$

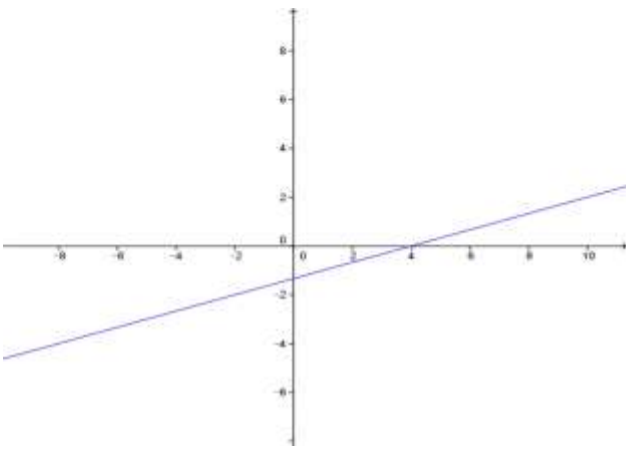
b)

$$\begin{cases} 4x + 2y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

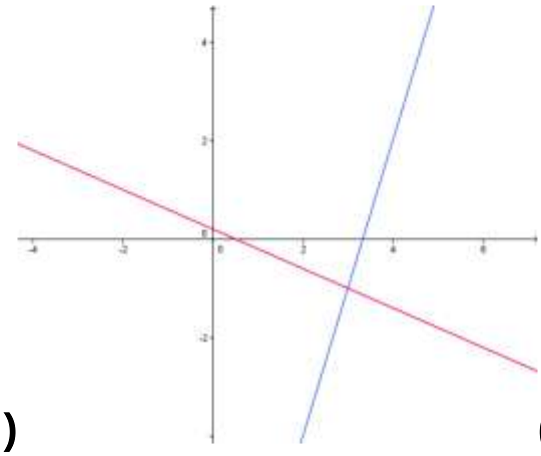
1- Associe cada sistema com seu o gráfico correspondente justificando sua resposta:

(A) $\begin{cases} 3x - y = 10 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} 2x - 6y = 8 \\ 3x - 9y = 12 \end{cases}$

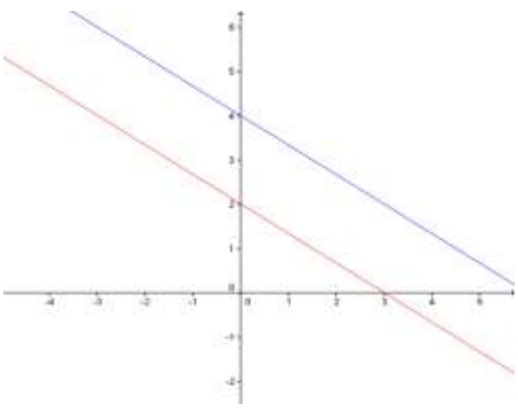
(B) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}$ **(D)** $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$



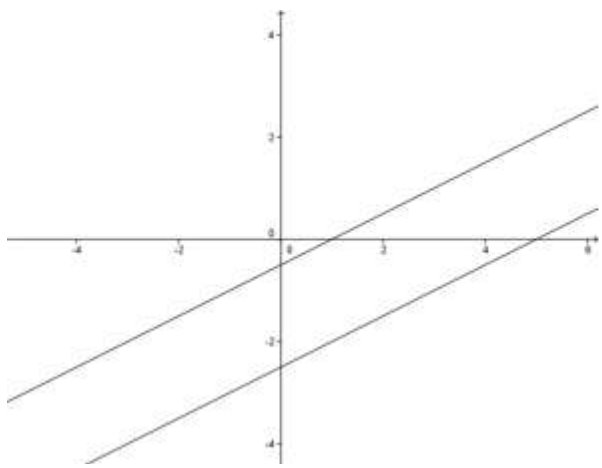
(   )



(   )



(   )



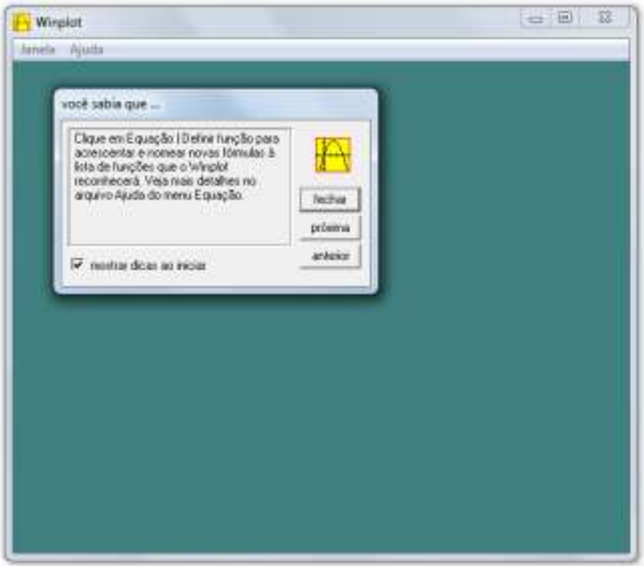
(   )

2- Considere o seguinte sistema de equações lineares $\begin{cases} 2x - 3y - z = -8 & (I) \\ x + y + z = 5 & (II) \\ 3x - 2y - z = -4 & (III) \end{cases}$

Você vai precisar usar o software Winplot. Vamos aprender como se faz.

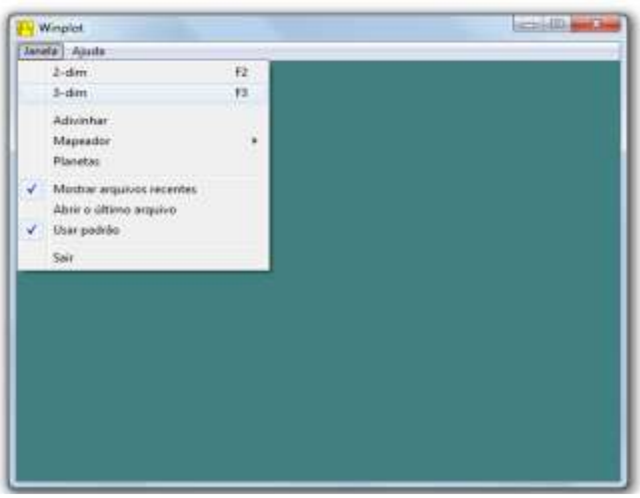
Dê um duplo clique no ícone  para abrir o programa.

Esta é a janela inicial do Winplot.

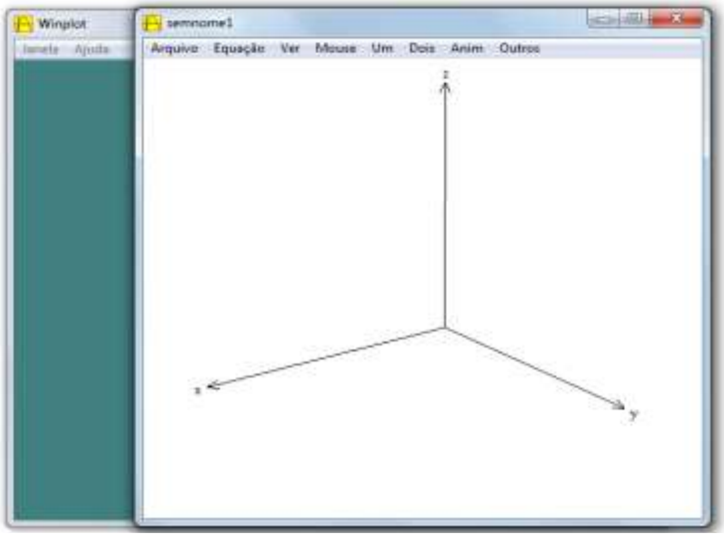


Se a caixa de dicas estiver ativada, clique “fechar” para continuar.

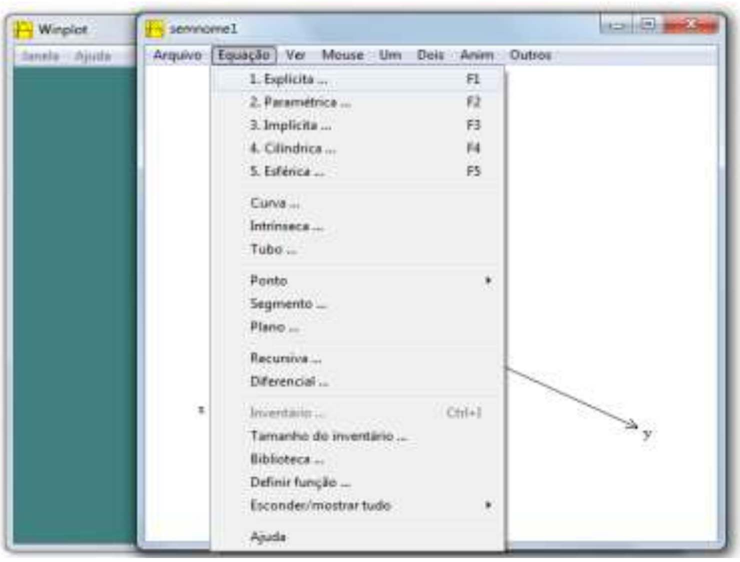
Dê um clique em “Janela” e selecione “3-dim”.



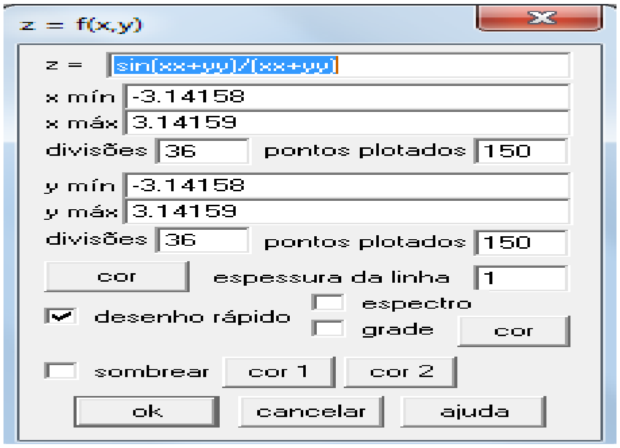
Outra tela com fundo branco se abrirá e nela você verá três eixos perpendiculares entre si nomeados como x,y e z.



Clique em “Equação” e escolha a opção “explícita”.



Surgirá a caixa:



Passos a seguir:

- Isole a incógnita z da primeira equação e digite no espaço "z=........" que aparece em destaque na cor azul. Deixe marcada a opção "desenho rápido". Altere também os valores de "x mín" e "x max" para -10.00000 e 10.00000 respectivamente. Faça o mesmo para "y mín" e "y max".

- Reescrever as equações do sistema sempre isolando a incógnita z. Assim, as equações devem ser inseridas no winplot como: 2x – 3y +8, x+y –5 e 3x+2y+4.

- Escolha a cor e a espessura de sua preferência e clique em "ok".
Aparecerão duas caixas, uma com o desenho do plano e outra com a equação digitada:

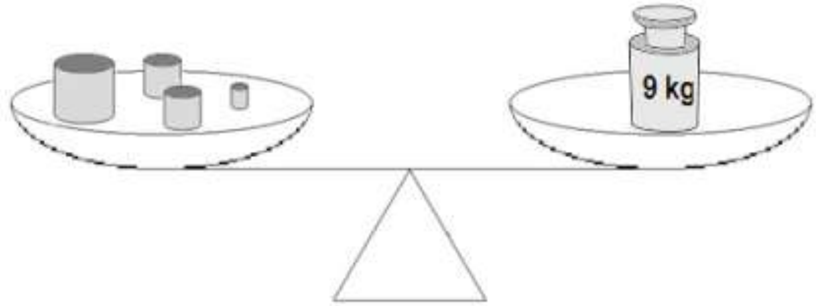
- Visualização do gráfico da equação (I) do sistema no Winplot

- A imagem gerada pelo software representa apenas uma porção do plano e que o mesmo é infinito em todas as direções.

- Agora insira a segunda equação. Isole a incógnita z da equação (2) – seguindo o procedimento anterior.

Atividade Avaliativa

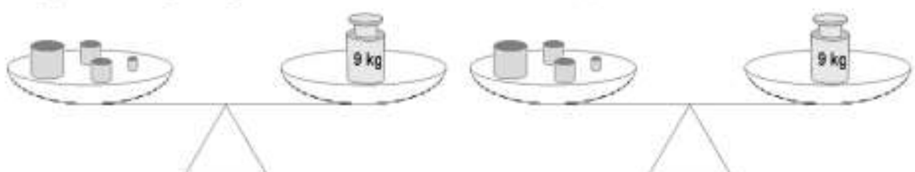
Atividade 1: Observe a balança abaixo:



Uma balança fica em equilíbrio quando o peso nos dois pratos é exatamente o mesmo. Na figura acima, cada tamanho de lata tem um peso diferente. Como a balança está em equilíbrio, sabemos que uma lata grande, duas médias e uma pequena pesam, juntas, 9 quilogramas.

a. Chamando o peso da lata maior de "x", o peso de cada lata média de "y" e o peso da lata menor de "z", monte um equação que represente essa situação.

b. Agora, imagine que temos duas dessas balanças:



Se juntarmos todas as latas no mesmo prato de uma das balanças e pesos no segundo prato dessa mesma balança, de modo que a outra fique completamente vazia, a balança que contém as latas e os pesos continuará em equilíbrio? Por quê?

c. Escreva uma equação que represente essa nova situação.

d. Compare os coeficientes da equação do item c com os coeficientes da equação do item a. Você notou alguma relação?

e. Se tivéssemos três dessas balanças e fizéssemos o mesmo processo anterior, a balança que contém todas as latas e todos os pesos continuaria em equilíbrio? Por quê?

f. Escreva uma equação que represente essa nova situação.

g. Compare os coeficientes da equação do item f com os coeficientes da equação do item a. Você notou alguma relação?

Atividade 2:

a. Considere o sistema linear $\begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ -3x + 2y + z = -10 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$.

Uma solução para este sistema é tomar os valores x=3, y=0 e z=-1.

Multiplique a terceira equação por um número qualquer e a substitua pela que você encontrou. Os valores dados também são solução deste novo sistema, em que as duas primeiras equações são as mesmas e a terceira aparece multiplicada pelo número que você escolheu?

b. Compare sua solução com a de seus colegas. Eles multiplicaram a equação pelo mesmo número? A conclusão a que chegaram foi a mesma que a sua? Se sim, por que você acha que isso aconteceu? Se não, você concorda com a conclusão a que chegaram? Por quê?

c. Considere a afirmação "Multiplicar uma das equações de um sistema linear por um número qualquer não altera sua solução". Ela é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta.

Avaliação

A avaliação deste Plano de Trabalho foi feito através dos exercícios propostos em sala. Procurei verificar quais dificuldades e tentei solucioná-los em sala de aula. Na sala de informática, procurei colocar duas pessoas por computador, e caso alguém tivesse dificuldade e manuseá-lo juntei com o aluno que tem noções básicas de informática.

A interpretação geométrica também foi feita em sala de aula no quadro. Neste caso só usei dois pontos no plano para construir os gráficos.

Referências Bibliográficas

Roteiros de Ação – Função – Curso de Formação Continuada oferecido pelo CEDERJ/CECIERJ, em parceria com a SEEDUC – 4º bimestre.
HTTP:/projeto seeduc.cecierj.edu.br/ acessado de 31/10/2012 a 12/11/2012

SMOLE, Kátia Stocco; Diniz, Maria Ignez. **Matemática Ensino Médio**. 2ª Série. 5ed. São Paulo. Saraiva. 2005

Sides acessados no período de 03/11/2012 a 11/11/2012.

http://www.somatematica.com.br/emedio/sistemas/sistemas.php
http://www. **broffice**.org
http://www.sxc.hu/photo/1217806; http://www.sxc.hu/photo/976954;
http://www.sxc.hu/photo/697993; (texto usado na introdução)