Formação Continuada em Matemática

Fundação CECIERJ / Consórcio CEDERJ

Matemática 3º Ano - 3º Bimestre / 2014

Plano de Trabalho

Números Complexos

Tarefa 1

Cursista: Thiago Thompson Pereira

Tutora: Danúbia de Araújo Machado

Introdução

Este plano de trabalho tem por objetivo permitir que os alunos percebam a importância do surgimento da unidade imaginária e do conjunto dos números complexos, mostrar que um mesmo número complexo pode ter representações diferentes (algébrica, geométrica e polar) e efetuar as operações (soma subtração, multiplicação, potenciação e divisão) de números complexos. Foi elaborado com o propósito de sanar as dificuldades que os alunos geralmente apresentam quando estudam este assunto.

Durante muito tempo encontrar um resultado para raiz quadrada negativa foi objeto de estudo de muitos matemáticos. Em 1748, Leonhard Euler usou “i” para representar $\sqrt{-1}$. Essa representação, na maioria das vezes, cria um “bloqueio” no processo de aprendizagem desse conteúdo. Para reverter essa situação, a estratégia foi utilizar a história da Matemática com o intuito de fazer com que o aluno perceba que o surgimento da unidade imaginária possibilitou solucionar problemas que antes não tinham respostas.

O plano de trabalho está dividido em três etapas. A primeira trata do surgimento da unidade imaginária e da resolução de equações no conjunto dos números complexos. A segunda apresenta as diferentes representações que um mesmo número complexo pode ter. E a terceira, envolve as operações com números complexos. Cada etapa será realizada em dois tempos de aula. E, por fim, a avaliação que também terá dois tempos de aula.

Atividade 1

Duração prevista: 100 minutos

Área de conhecimento: Matemática

Assunto: Números Complexos

Objetivo: Apresentar os números complexos como mais uma ferramenta matemática para solucionar problemas.

Pré-requisitos: Determinação de raízes de uma equação do segundo grau a partir da sua representação algébrica.

Material necessário: Folha de atividades e computador/celular com acesso a Internet.

Organização da classe: Turma disposta em trios

Descritor associado: H46 – Reconhecer números reais em diferentes contextos.

Metodologia Adotada:

Será apresentado um texto com a história de $\sqrt{-1}$ e, a partir da leitura, os alunos responderão perguntas que têm como objetivo chegar a resolução de problemas que envolvam raiz quadrada de números negativos.

A história de $\sqrt{-1}$

A história mostra a necessidade da invenção de novos números no progresso ordenado da civilização e na evolução da Matemática. A história de $\sqrt{-1}$, a unidade imaginária, e de a + bi, o número complexo, origina-se no desenvolvimento lógico da teoria algébrica.

Antigamente considerar a raiz quadrada de um número negativo invariavelmente provocava rejeição. Parecia óbvio que um número negativo não fosse um quadrado, conclui-se daí que tais raízes quadradas não tinham nenhum significado. Esta atitude prevaleceu por muito tempo.

Talvez a mais antiga menção a uma raiz quadrada de um número negativo seja a expressão $\sqrt{81-144}$, que aparece na **Stereometrica,** Heron de Alexandria (50 d.C.); o próximo registro é a tentativa de Diofanto de resolver a equação $336x^2 + 24 = 172x$, em cuja a solução aparece a quantidade $\sqrt{1849-2016}$.

Acredita-se que Girolamo Cardano foi o primeiro a usar a raiz quadrada de um número negativo ao resolver o problema agora famoso: "Dividir 10 em duas partes tais que o produto seja 40". De início Cardano declarou ser manifestamente impossível uma solução. Depois, no entanto, encontrou $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$ e mostrou que estes números de fato têm som 10 e produto 40. René Descartes (1637) contribui com os termos "real" e "imaginário". Leonhard Euler (1748) usava "i" para $\sqrt{-1}$.

De acordo com a leitura do texto, percebemos que a necessidade de ser resolver a raiz quadrada negativa fez com surgisse a unidade imaginária e, com isso, o conjunto dos Números Complexos. Baseado no texto e em pesquisas que você poderá fazer na Internet, responda as perguntas a seguir:

a) Qual é a ideia principal do texto?

____

____

____

b) De acordo com o texto, que matemático utilizava a letra i para representar $\sqrt{-1}$?

____

____

c) Cite algumas contribuições de Girolamo Cardano para a evolução dos números complexos.

____

____

____

____

____

d) Resolva, no conjunto dos números complexos, a equação que Diofanto tentou resolver no passado.

____

____

____

____

____

____

____

____

e) Ao resolver o problema " Dividir 10 em duas partes tais que o produto seja 40", Girolamo Cardano encontrou como solução 5 + $\sqrt{-15}$ e 5 - $\sqrt{-15}$. Qual seria a representação dessa solução se Cardano utilizasse a notação de Leonhard Euler para a raiz quadrada negativa?

____

____

____

f) Por que o plano em que se representam os números complexos recebe o nome Argand-Gauss?

____

____

____

____

Como podemos perceber no texto, durante muito tempo não fazia sentido encontrar solução para a raiz quadrada negativa, pois tais raízes não tinham nenhum significado para os estudiosos. A contribuição dos estudiosos citados e mais alguns outros possibilitou que essa situação se revertesse e, hoje, podemos solucionar problemas que até então não tinham respostas. Diante disso, utilizando i = $\sqrt{-1}$, resolva as equações abaixo.

a) $x^2 + 16 = 0$

b) $x^2 - 6x + 10 = 0$

Atividade 2

Duração prevista: 100 minutos

Área de conhecimento: Matemática

Assunto: Números Complexos

Objetivo: Apresentar o plano Argand-Gauss e as diferentes representações de um número complexo.

Pré-requisitos: Representação algébrica dos números complexos, razões trigonométricas no triângulo retângulo e teorema de Pitágoras

Material necessário: Folha de atividades

Organização da classe: Turma disposta em trios

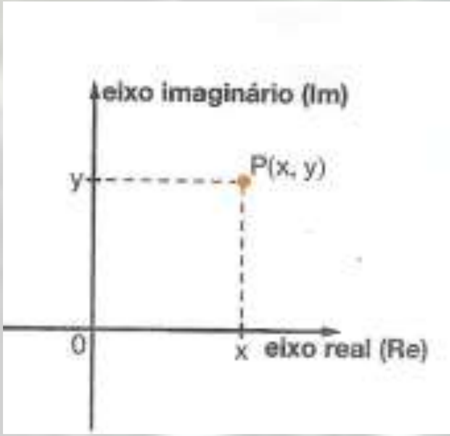
Descritor associado: H36 – Efetuar cálculo envolvendo números complexos na forma algébrica

Metodologia:

Será apresentado o plano Argand-Gauss para que os alunos façam a representação geométrica de um número complexo e depois os alunos serão orientados a analisar uma figura e, a partir dessa figura, fazer generalizações até chegar a representação polar de um número complexo.

Plano Argand-Gauss

Um número complexo z pode ser escrito como um par ordenado $z = (x,y)$ e na forma algébrica $z = x + yi$. Cada par ordenado de números reais (x,y) pode ser representado em um plano cartesiano por um único ponto. O plano cartesiano em que são representados os números complexos é denominado plano Argand-Gauss ou plano complexo.



1) **Represente geometricamente os números complexo complexos abaixo:**

- $z_1 = 2 + 5i$
- $z_2 = 6i$
- $z_3 = -1 + 2i$
- $z_4 = 4$
- $z_5 = 3 - 4i$

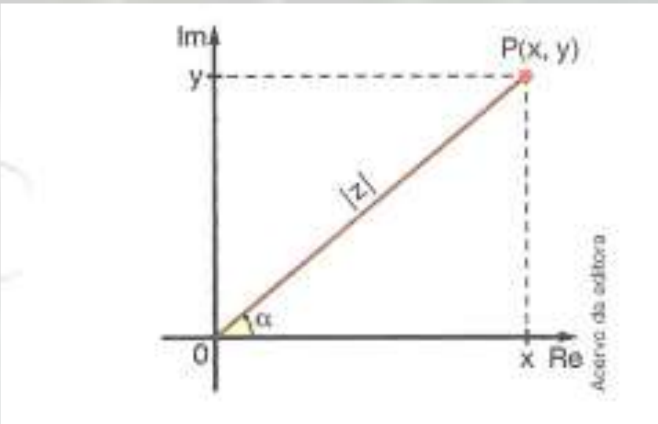
- $z_6 = -3 - 3i$

						6i						
						5i						
						4i						
						3i						
						2i						
						1i						
-6	-5	-4	-3	-2	-1	0i	1	2	3	4	5	6
						-1i						
						-2i						
						-3i						
						-4i						
						-5i						
						-6i						

2) Escreva cada número complexo na forma algébrica.

- $z_1 = (4,5)$
- $z_2 = (-3{,}5; \frac{2}{5})$
- $z_3 = (0, \sqrt{7})$
- $z_4 = (\pi, -\frac{3}{4})$

3) Observe a figura abaixo:



Analisando a figura, percebemos que podemos escrever a parte real de um número complexo em função de | z | e α e, também, a parte imaginária do mesmo número complexo em função de | z | e α. Para isso, podemos utilizar as razões trigonométricas no triângulo retângulo para escrever essas relações.

Faça o que se pede:

a) Escreva a parte real do número complexo em função de | z | e α.

____
____
____

b) Escreva a parte imaginária do número complexo em função | z | e α.

____
____
____

c) Utilizando os valores que obtidos nas respostas anteriores, escreva o número complexo em função de | z | e α.

____
____
____
____

Diante da análise feita, podemos perceber que um mesmo número complexo pode ser representado de formas diferentes. O número complexo z = x + yi (forma algébrica), pode ser representado na forma polar z = | z | . (cos α + i sen α).

Represente geometricamente e escreva a forma trigonométrica do número complexo z = 4 + 4i.

Lembrando que: | z | = $\sqrt{x^2 + y^2}$

θ	30°	45°	60°
sen θ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos θ	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan θ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Atividade 3

Duração prevista: 100 minutos

Área de conhecimento: Matemática

Assunto: Números Complexos

Objetivo: Compreender e efetuar operações com números complexos em sua forma algébrica

Pré-requisitos: Operações elementares com números reais; operações com matrizes

Material necessário: Folha de atividades

Organização da classe: Turma disposta em trios

Descritor associado: H36 – Efetuar cálculos envolvendo operações com números complexos na forma algébrica

Metodologia:

Será apresentado para os alunos um pequeno resumo sobre as operações com números complexos e depois os alunos serão orientados a resolver questões que envolvem tais operações.

Operações com Números Complexos

Considerando os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com a, b, c e d reais temos:

Adição: $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) \rightarrow (a + c) + (b + d)i$

Subtração : $z_1 - z_2 = (a + bi) – (c + di) \rightarrow (a – c) + (b – d)i$

Multiplicação : $z_1 . z_2 = (a + bi) . (c + di) \rightarrow (ac – bd) + (ad + bc)i$

Divisão: $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} . \frac{c-di}{c-di}$

1) **A partir dos números complexos z = 6 – 2i e w = 2 + 4i, calcule:**

a) z + w

b) z – w

c) z . w

d) z^2

e) $\frac{z}{w}$

2) **Sabendo que a matriz A =** $\begin{pmatrix} \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{1+2i} \\ \boldsymbol{-1+i} & \boldsymbol{-5i} \end{pmatrix}$ **e B =** $\begin{pmatrix} \boldsymbol{-1+2i} & \boldsymbol{4} \\ \boldsymbol{-2i} & \boldsymbol{3i} \end{pmatrix}$**, determine a soma A + B.**

3) **Determine a forma algébrica do quociente de** $\boldsymbol{\frac{3-7i}{3+4i}}$**.**

4) **Determine o valor da expressão** $\mathbf{i^{17} + 3i^{288} - 2i^{95} + i^{30}}$**.**

Avaliação da Aprendizagem

Avaliação se dará através de um conjunto de questões que envolvem as operações com números complexos. Todas as questões foram retiradas do banco de questões do CAED – Saerj/Saerjinho.

1) Considere os números complexos $z_1 = -3 + i$ e $z_2 = 5 - 3i$. Qual é o valor de $z_1 - z_2$?
   a) 2 – 4i
   b) 2 – 2i
   c) -8 – 2i
   d) -8 + 2i
   e) -8 + 4i

2) Considere os números complexos z = -2 + 4i e w = 1 + 2i. O valor de $\frac{z}{w}$ é:
   a) $\frac{-2+4i}{5}$
   b) $-2 + 2i$
   c) $1 - 2i$
   d) $\frac{6+8i}{5}$
   e) $\frac{10-8i}{3}$

3) Considere os números complexos z = 3 + 7i e w = 2 – 5i. O valor de z.w é:
   a) 41
   b) 41 – i
   c) -29 + 29i
   d) -29
   e) -29 – i

4) Considere os complexos z = 2 + i e w = 5 – 3i. Qual é o valor de 2.z + w.
   a) 7 – 3i
   b) 7 – 2i
   c) 9 -2i
   d) 9 – i
   e) 14 – 4i

Referências Bibliográficas

ROTEIROS DE AÇÃO – Números Complexos - Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 3º Ano do Ensino Médio – 3º bimestre/2014 - http://projetoseeduc.cecierj.edu.br acessado em 26/08/2014.

NOVO OLHAR, 3º Ano/ Joamir Souza – 2ª Edição – São Paulo: FTD, 2013.

MATEMÁTICA CIÊNCIA E APLICAÇÕES, 3º Ano/ Gelson Iezzi – 7ª Edição – São Paulo: Saraiva, 2013.

CONTEXTO E APLICAÇÕES, Vol. 3/ Luiz Roberto Dante – 2ª Edição – São Paulo: Ática, 2014.