FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO CECIERJ/SEEDUC-RJ

CURSO: MATEMÁTICA 1º ANO do ENSINO MÉDIO
4º BIMESTRE DE 2013

Tarefa 2: Plano de trabalho
Tema: Trigonometria e Funções Trigonométricas

Cursista: Waine Vieira Junior
Tutor: Rodolfo Gregorio de Moraes

Rio de Janeiro
Novembro de 2013

Sumário

Introdução:

O presente plano de ação tem por objetivo apresentar um conteúdo reconhecidamente difícil para os alunos de ensino médio – em especial os alunos do 1º ano – a saber: funções trigonométricas.

Assim, objetiva-se com este plano uma apresentação de tal contaúdo de modo a, ao menos, mitigar o quadro de dificuldades que o aluno enfrenta, normalmente, ao lidar com este tema. Sabemos, no entanto, que as razões para tais dificuldades são muitas, a principal delas talvez sendo a grande defasagem apresentada pela maioria dos alunos quando se trata de trigonometria. Outras dificuldades apresentadas residem na dificuldade de efetuar cálculos envolvendo raízes, frações ou mesmo decimais. Também podemos apontar dificuldades na compreensão conceitual deste tema.

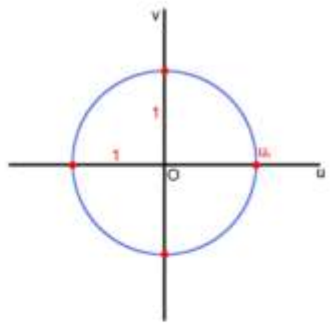
Como modo de diminuir estas dificuldades, este plano propõe uma compreensão prévia das questões centrais do conteúdo em questão, fundadas na intuição, na experiência e na percepção visual do aluno. Assim, queremos que o aluno rompa possíveis bloqueios fazendo uso de instâncias outras que venham em seu auxílio na construção de seu próprio conhecimento: a experiência, a imagética, a percepção imediata por assim dizer.

Em seguida proporemos a formalização conceitual da trigonometria no círculo, dando seguimento ao trabalho apresentado no plano de ação anterior, de modo a reforçar o encadeamento teórico presente neste conteúdo. Retomaremos a trigonometria no círculo como forma de preparar o terreno para a apresentação das funções trigonométricas.

Para este plano, pretende-se basear nas sugestões dispostas nos roteiros de ação (especialmente os roteiros 1 e 3), mantendo o foco na apresentação das funções trigonométricas, partindo da trigonometria no círculo, que seria uma revisão – embora uma revisão cuidadosa. Assim, a atividade um propõe uma atividade de revisão sobre as relações métricas no círculo trigonométrico. A idéia é introduzir, com base nessa atividade, a idéia de função periódica. As atividades 2 e 3 se fundamentam na idéia de periodicidade para apresentar as funções trigonométricas, introduzindo ainda o gráfico dessas funções. Para estas atividades iremos nos utilizar dos aplicativos Java presentes no site **uff/cdme** Por fim, a atividade 4 propõe a análise do comportamento dos gráficos das funções trigonométricas, utilizando o software **graph.tk**. Para a conclusão das atividades serão necessários 7 aulas de 50 minutos cada, conforme descrito em cada atividade.

Vamos Relembrar

Para tratarmos mais profundamente das funções seno, cosseno e tangente, devemos antes definir adequadamente o ***círculo trigonométrico***. Assim, seja um sistema cartesiano ortogonal uOv. Façamos uma circunferência α de centro em O e raio = 1. Associemos agora a cada número real x um único ponto P da circunferência α de modo que:



- Se x = 0, então P coincide com u_1.
- Se x > 0, então realizamos a partir de u_1 um percurso de comprimento x no sentido anti-horário, e marcamos P no ponto final do percurso.
- Se x < 0, então realizamos a partir de u_1 um percurso de comprimento |x|, no sentido horário, e marcamos P no ponto final do percurso.

Desse modo, definimos um ***ciclo*** ou ***círculo trigonométrico***.

Atividade 1

- **Habilidade Relacionada: H09:** Reconhecer o círculo ou a circunferência, seus elementos e algumas de suas relações; **H12:** Resolver problemas envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°); **H21** Transformar grau em radiano ou vice-versa.**H45:** Reconhecer/Identificar diferentes representações de um mesmo número racional; **H46** Reconhecer números reais em diferentes contextos; **H02:** Associar pontos no plano cartesiano às suas coordenadas e vice-versa.
- **Pré-Requisitos:** relações trigonométricas fundamentais, organização do plano cartesiano, composição e elementos de um círculo.
- **Tempo de duração:** 100 min.
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Laboratório de informática com internet, folha de exercícios.
- **Organização da turma:** Duplas ou trios.
- **Objetivos:** Recapitular a ambientação das relações trigonométricas no círculo trigonométrico como modo de preparar terreno para introdução da idéia de função periódica.
- **Metodologia:** Organizados em duplas, os alunos irão seguir as atividades propostas na folha de exercício, respondendo o questionário com base nas observações feitas durante a execução dessas mesmas atividades.

  Acesse o site: http://www.uff.br/cdme/ftr/ftr-html/ftr-def-br.html e seguindo as orientações de sua folha de atividades, responda o que se pede.

1) No 1º aplicativo, você pode visualizar as definições de seno e cosseno no círculo trigonométrico, em radianos: Clique na janelinha onde está escrito "***Exibir a definição da função seno***". Em seguida, clique e arraste o ponto **azul** sobre o eixo **t**. Use os botões "**<**" e "**>**" para transladar a janela de visualização.

   a) Avance com o ponto azul, e observe o círculo trigonométrico. O que está acontecendo com a barrinha verde?
   b) Avance com o ponto azul, e observe a **reta abaixo** do círculo trigonométrico. O que está acontecendo com a barrinha verde?
   c) Qual o valor máximo que ela alcança?
   d) Qual o valor mínimo que ela alcança?

2) Clique agora na janelinha onde está escrito "***Exibir a definição da função cosseno***". Em seguida, clique e arraste o ponto **azul** sobre o eixo **t**. Use os botões "**<**" e "**>"** para transladar a janela de visualização.

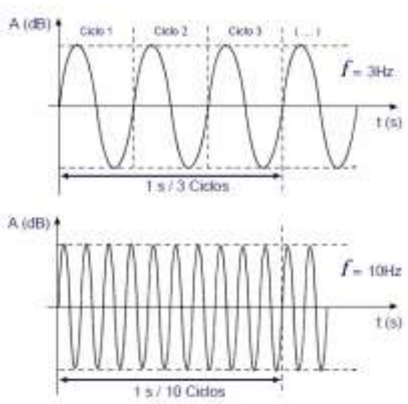
   a) Avance com o ponto azul, e observe o círculo trigonométrico. O que está acontecendo com a barrinha verde?
   b) Avance com o ponto azul, e observe a **reta abaixo** do círculo trigonométrico. O que está acontecendo com a barrinha verde?
   c) Qual o valor máximo que ela alcança?
   d) Qual o valor mínimo que ela alcança?
   e) No círculo trigonométrico, qual o eixo em que aparece o valor do seno? E qual o eixo em que aparece o valor do cosseno?

3) Compare os resultados observados para graus e para radianos e responda:

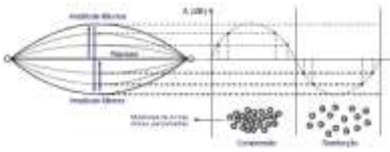
   a) Qual o ângulo (em graus e em radianos) cujo cosseno é **zero**?
   b) Qual o ângulo (em graus e em radianos) cujo seno é **zero**?
   c) Qual o ângulo (em graus e em radianos) cujo seno e o cosseno são iguais?
   d) Qual o ângulo (em graus e em radianos) cujo cosseno é igual a 1?
   e) Qual o ângulo (em graus e em radianos) cujo seno apresenta o menor valor? Que valor é esse?

As funções periódicas:

De acordo com uma definição mais formal, uma função periódica é aquela onde há um dado número p>0, que satisfaz a condição f(x + p) = f(x), para todo x pertencendo ao Domínio. Mas vamos tentar uma idéia mais intuitiva para uma boa compreensão de uma função periódica.



De uma forma geral, o ***som*** que percebemos resulta dum distúrbio na atmosfera causado por um emissor, distúrbio esse que consiste em rápidas variações da pressão atmosférica que se propagam sob a forma de ondas até aos nossos ouvidos. Se a variação de pressão que origina o som se repetir consecutivamente e de acordo com um padrão, então estamos na presença de um fenômeno que se designa por uma forma de onda periódica. Um exemplo que ilustra bem este conceito é imaginar o som produzido por uma corda de guitarra.



Numa forma de onda com um comportamento periódico (que se repete ao longo do tempo segundo um padrão) é possível associar algumas grandezas básicas que estão diretamente relacionadas com características sonoras:

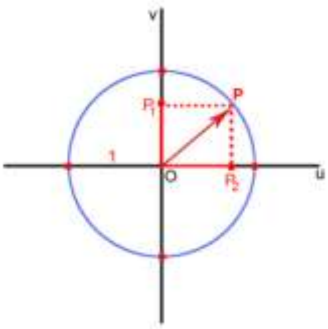
A *amplitude* quantifica a intensidade com que percebemos o som. A variação da amplitude é proporcional à variação da pressão atmosférica causada pela onda sonora, e sua unidade de medida é o *decibel (dB)*. A *0 dB* corresponde o limiar de audição e a *130 dB* corresponde o limiar da dor; A *freqüência* traduz o número de ciclos por unidade de tempo numa forma de onda periódica e sua unidade de medida é o *Hertz(Hz)*, que traduz o número de ciclos por segundo.

Outro exemplo de periodicidade é o uso dos **loops** na música eletrônica.Um **loop** é uma base de *sample* que é repetida dentro da música, em uma dada frequência. É muito comum, por exemplo, o loop de bateria, que repete massivamente "a mesma batida" ao longo da duração da música. Para uma compreensão melhor, experimente brincar com loops acessando o site http://www.incredibox.com/v3/

Se recordarmos a atividade anterior, veremos que os falores possíveis para uma função seno ou cosseno estão sempre circunscritos num intervalo, nunca sendo maior que um valor, nem menor que outro valor. Vamos ver isso mais aprofundadamente. Primeiro vamos compreender melhor as funções seno, cosseno e tangente.

A função seno

Definido o círculo trigonométrico, tratemos de definir a **função seno**. Dado um número real x, seja P sua imagem no círculo. Denominamos de **seno de x** (sen x) a ordenada OP_1 do ponto P no sistema *uOv*. Denominamos então **função seno** a função f: R→R que associa a cada real x o real $\boldsymbol{OP_1 = sen\ x}$. ou



Propriedades:

- Se x é do 1º ou do 2º quadrante, então sen x é positivo;
- Se x é do 3º ou do 4º quadrante, então sen x é negativo;
- Se x percorre o 1º ou o 4º quadrante, então sen x é crescente;
- Se x percorre o 2º ou o 3º quadrante, então sen x é decrescente;
- A imagem da função seno é o intervalo [-1, 1], isto é, $\mathbf{-1 \leq sen\ x \leq 1}$, para todo x pertencendo a R.
- O período da função seno é 2π.

A função cosseno

Dado um número real x, seja P sua imagem no círculo. Denominamos de **cosseno de x** (cos x) a abscissa OP2 do ponto P no sistema uOv. Denominamos então **função cosseno** a função f: R→R que associa a cada real x o real **OP2 = cos x**, ou seja: f(x) = cos x.

Propriedades:

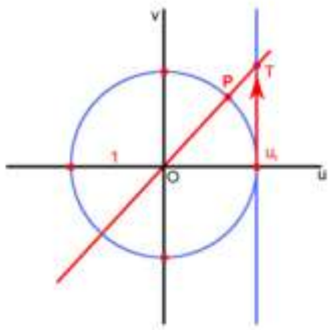
- Se x é do 1º ou do 4º quadrante, então cos x é positivo;
- Se x é do 2º ou do 3º quadrante, então cos x é negativo;
- Se x percorre o 1º ou o 2º quadrante, então cos x é decrescente;
- Se x percorre o 3º ou o 4º quadrante, então cos x é crescente;
- A imagem da função cosseno é o intervalo [-1, 1], isto é, $-1 \leq \cos x \leq 1$, para todo x pertencendo a R.
- O período da função cosseno é 2π.

A função tangente

Passemos agora à função tangente. Seja x pertencente a R, tal que

$$x \neq \pi/2 + k\pi.$$

Seja P sua imagem no círculo. Consideremos a reta OP, sendo T sua interseção com o eixo das tangentes (//v). Diremos que a **tangente de x** (tg x) é a medida algébrica do segmento u_1T. Denominamos **função tangente** a função f: D → R que associa a cada x real, x ≠ π/2 + kπ, o real u_1T = tg x, isto é f(x) = tg x.



Obs: Para x = π/2 + kπ se tornará uma reta paralela ao eixo das tangentes, não havendo interseção T. Assim, não pode existir tg x para este caso.

Propriedades:

- Se x é do 1º ou do 3º quadrante, então tg x é positivo;
- Se x é do 2º ou do 4º quadrante, então tg x é negativo;
- Se x percorre o qualquer um dos quadrantes, então tg x é crescente;
- O Domínio da função tangente é D = {x pertencendo a R ¦ x ≠ π/2 + kπ}
- A imagem da função seno é todo o conjunto R.
- O período da função seno é π.

Atividade 2

- **Habilidade Relacionada: H09:** Reconhecer o círculo ou a circunferência, seus elementos e algumas de suas relações; **H21**

Transformar grau em radiano ou vice-versa; **H02:** Associar pontos no plano cartesiano às suas coordenadas e vice-versa; **H38** Identificar o gráfico de uma função, a partir da correspondência entre duas grandezas representadas em uma tabela; **H41** Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números (padrões); **H66** Reconhecer intervalos de crescimento/ decrescimento e/ou zeros de funções reais representadas em um gráfico.

- **Pré-Requisitos:** trigonometria no círculo trigonométrico, organização do plano cartesiano, composição e elementos de um círculo.
- **Tempo de duração:** 100 min.
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Laboratório de informática com internet, folha de exercícios.
- **Organização da turma:** Duplas ou trios
- **Objetivos:** Construir, partindo da idéia de periodicidade, o gráfico das funções seno, cosseno.
- **Metodologia:** Organizados em duplas, os alunos irão seguir as atividades propostas na folha de exercício, respondendo o questionário com base nas observações feitas durante a execução dessas mesmas atividades.

Acesse o site: http://www.uff.br/cdme/ftr/ftr-html/ftr-seno-deg-br.html e seguindo as orientações de sua folha de atividades, responda o que se pede.

O aplicativo propõe que movamos o ponto **P** ao longo da circunferência, de modo a mudar o ângulo e, com isso, alterar o valor da função f(x) = sen x. Responda:

1) Quando o ponto P está sobre o ponto A, quais são os valores que aparecem para t = a medida do ângulo AOP em graus?
2) Em radianos, quais seriam estes valores?
3) O que ocorre com o gráfico da função ao lado?
4) Para que valores de t a função alcança seu ponto máximo?
5) Para que valores de t a função alcança seu ponto mínimo?
6) Para que valores de t a função é igual a zero?
7) Como você descreveria o comportamento deste gráfico?

Acesse o site: http://www.uff.br/cdme/ftr/ftr-html/ftr-cosseno-deg-br.html e seguindo as orientações de sua folha de atividades, responda o que se pede.

O aplicativo propõe que movamos o ponto **P** ao longo da circunferência, de modo a mudar o ângulo e, com isso, alterar o valor da função f(x) = cos x. Responda:

8) Quando o ponto P está sobre o ponto A, quais são os valores que aparecem para t = a medida do ângulo AOP em graus?
9) Em radianos, quais seriam estes valores?
10) O que ocorre com o gráfico da função ao lado?
11) Para que valores de t a função alcança seu ponto máximo?
12) Para que valores de t a função alcança seu ponto mínimo?

13) Para que valores de t a função é igual a zero?
14) Como você descreveria o comportamento deste gráfico?

Agora, comparando os resultados dos dois casos, responda:

1) Que tipo de função são as funções seno e a função cosseno?
2) Qual seu período?
3) Para quais valores as funções são iguais a zero?

Atividade 3

- **Habilidade Relacionada: H09:** Reconhecer o círculo ou a circunferência, seus elementos e algumas de suas relações; **H21** Transformar grau em radiano ou vice-versa; **H02:** Associar pontos no plano cartesiano às suas coordenadas e vice-versa; **H38** Identificar o gráfico de uma função, a partir da correspondência entre duas grandezas representadas em uma tabela; **H41** Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números (padrões); **H66** Reconhecer intervalos de crescimento/ decrescimento e/ou zeros de funções reais representadas em um gráfico.
- **Pré-Requisitos:** trigonometria no círculo trigonométrico, organização do plano cartesiano, composição e elementos de um círculo.
- **Tempo de duração:** 50 min.
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Laboratório de informática com internet, folha de exercícios.
- **Organização da turma:** Duplas ou trios
- **Objetivos:** Compreender o comportamento do gráfico da função tangente.
- **Metodologia:** Organizados em duplas, os alunos irão seguir as atividades propostas na folha de exercício, respondendo o questionário com base nas observações feitas durante a execução dessas mesmas atividades.

Acesse o site: http://www.uff.br/cdme/ftr/ftr-html/ftr-tangente-rad-br.html e seguindo as orientações de sua folha de atividades, responda o que se pede.

1) Quando o ponto P está sobre o ponto A, quais são os valores que aparecem para t = a medida do ângulo AOP em graus?
2) Em radianos, quais seriam estes valores?
3) O que ocorre com o gráfico da função ao lado?
4) Para que valores de t a função alcança seu ponto máximo?
5) Para que valores de t a função alcança seu ponto mínimo?
6) Para que valores de t a função é igual a zero?
7) Como você descreveria o comportamento deste gráfico?
8) Qual é o valor da função quando $t = \pi/2$?
9) Porque isso ocorre?

Atividade 4

- **Habilidade Relacionada: H09:** Reconhecer o círculo ou a circunferência, seus elementos e algumas de suas relações; **H21** Transformar grau em radiano ou vice-versa; **H02:** Associar pontos no plano cartesiano às suas coordenadas e vice-versa; **H38** Identificar o gráfico de uma função, a partir da correspondência entre duas grandezas representadas em uma tabela; **H41** Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números (padrões); **H66** Reconhecer intervalos de crescimento/ decrescimento e/ou zeros de funções reais representadas em um gráfico.
- **Pré-Requisitos:** trigonometria no círculo trigonométrico, organização do plano cartesiano, composição e elementos de um círculo.
- **Tempo de duração:** 100 min.
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Laboratório de informática com internet, folha de exercícios.
- **Organização da turma:** Duplas ou trios
- **Objetivos:** Compreender o comportamento do gráfico da função tangente.
- **Metodologia:** Organizados em duplas, os alunos irão seguir as atividades propostas na folha de exercício, respondendo o questionário com base nas observações feitas durante a execução dessas mesmas atividades.

  Inicie o aplicativo **graph.tk:** e seguindo as orientações de sua folha de atividades, responda o que se pede.

Vamos investigar o comportamento da função **seno de x.**

1) Digite na quadrícula do canto superior direito a função seno – y = sin x. O gráfico da função sen x irá se formar no plano cartesiano com a cor da quadrícula.
2) Clique no sinal de "+" para que uma nova quadrícula apareça.
3) Digite a função y = a sin x, sendo a um número positivo à sua escolha.
   a) O que ocorreu de diferente, com relação a função **f(x) = sen x**?
   b) Faça o mesmo procedimento de 2 e 3, mas escolha um valor para a entre 0 e 1. Nesse caso, o que ocorreu?
   c) Faça o mesmo procedimento de 2 e 3, mas escolha um valor para a **negativo**? Nesse caso, o que ocorreu?
   d) Pesquise na internet o que significa amplitude, e relacione esse conceito ao valor a que você está escolhendo.

Vejamos agora o comportamento da função **cosseno de x.**

4) Digite na quadrícula do canto superior direito a função cosseno – **y = cos x**. O gráfico da função cos x irá se formar no plano cartesiano com a cor da quadrícula.
5) Clique no sinal de “+” para que uma nova quadrícula apareça.
6) Digite a função y = a cos x, sendo a um número positivo à sua escolha.
   e) O que ocorreu de diferente, com relação a função f(x) = cos x?
   f) Faça o mesmo procedimento de 2 e 3, mas escolha um valor para a entre 0 e 1. Nesse caso, o que ocorreu?
   g) Faça o mesmo procedimento de 2 e 3, mas escolha um valor para a **negativo**? Nesse caso, o que ocorreu?
   h) Relacione o conceito de amplitude ao valor a que você está escolhendo.

Vejamos, por fim, o comportamento da função **tangente de x.**

7) Digite na quadrícula do canto superior direito a função tangente – **y = tan x**. O gráfico da função tg x irá se formar no plano cartesiano com a cor da quadrícula.
8) Clique no sinal de “+” para que uma nova quadrícula apareça.
9) Digite a função y = a tg x, sendo a um número positivo à sua escolha.
   i) O que ocorreu de diferente, com relação a função f(x) = tg x?
   j) Faça o mesmo procedimento de 2 e 3, mas escolha um valor para a entre 0 e 1. Nesse caso, o que ocorreu?
   k) Faça o mesmo procedimento de 2 e 3, mas escolha um valor para a **negativo**? Nesse caso, o que ocorreu?
   l) Relacione o conceito de amplitude ao valor a que você está escolhendo.

Avaliação:

Ao longo da implementação deste plano de trabalho, as atividades propostas devem ser executadas em dupla ou trio, de acordo com as condições de distribuição de alunos por computador. Para tanto, será necessária a organização de etapas e responsabilidades na execução das atividades. Estas propostas possibilitam o debate de idéias e impressões de modo facilitar a interpretação dos dados apresentados pelos gráficos. O intuito dessas discussões é justamente de construir (e posteriormente refinar) as informações e argumentos em questão, e deverão ser levadas em conta na avaliação das atividades.

Além de também utilizar o relatório proposto ao cabo dos exercícios realizados ao longo das atividades como instrumento efetivo de avaliação, cabe ressaltar que as habilidades e competências a serem desenvolvidas ao longo da implementação de todo o plano de trabalho, como dito ainda na introdução, são avaliadas no âmbito da execução das tarefas (individualmente e coletivamente). Assim, as avaliações serão feitas em observação ao desempenho dos alunos tanto na execução das atividades – em sua participação e entrosamento nos grupos propostos – quanto no preenchimento das folhas de exercícios.

Bibliografia:

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática – Volume único*. São Paulo: Ática, 2010.

IEZZI, Gelson e MURAKAMI, Carlos. *Fundamentos de matemática elementar, vol. 3.* São Paulo: Atual, 2004.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO. *Roteiros de ação 1 e 3: Matemática na Escola - 4º bimestre - 1ª série - 2013* . Rio de Janeiro, 2013.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO. *Saerjinho 2012 – Matriz de Referência*. Rio de Janeiro, 2012.