FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ
COLÉGIO: CIEP 403 MARIA DE LOURDES GIOVANETTI
PROFESSOR: MARIA THERESA DA SILVA
SÉRIE: 3º ANO ENSINO MÉDIO
TUTOR: EDESON DOS ANJOS SILVA

PLANO DE TRABALHO SOBRE PROBABILIDADE

[Maria Theresa Silva]
[mtscunha@bol.com.br]

Introdução:

O estudo da probabilidade vem da necessidade de em certas situações, prevermos a possibilidade de ocorrência de determinados fatos, esse estudo oportuniza a discussão de um ramo da matemática dos mais pertinentes da atualidade.
Os primeiros estudos envolvendo probabilidades foram motivados pela análise de jogos de azar. Sabe-se que um dos primeiros matemáticos que se ocupou com o cálculo das probabilidades foi Cardano (1501-1576). Data dessa época uma expressão que utilizamos até hoje para o cálculo da probabilidade de um evento (número de casos favoráveis dividido pelo número de casos possíveis), que é a chamada abordagem clássica. Outra abordagem é o conceito frequentista, que estabelece o cálculo de probabilidades por meio de observações sucessivas de um experimento aleatório. A probabilidade é estimada de maneira empírica experimental, podendo ser encontrada quando o número de experimentações n tende ao infinito. Há também a Probabilidade Geométrica onde trabalhamos com razões entre medidas de mesma natureza, medidas estas de figuras geométricas.
Atualmente, a teoria das probabilidades é muito utilizada em outros ramos da Matemática (como o Cálculo e a Estatística), da Biologia (especialmente nos estudos da Genética), da Física (como na Física Nuclear), da Economia, da Sociologia etc.
Por sua importância é necessário que os alunos compreendam o conceito de probabilidade e saibam interpretar suas diversas representações.

Estratégias adotadas no Plano de Trabalho:

A abordagem será feita a partir do jogo Roda da Fortuna, onde o aluno poderá manipular e perceber algumas características desse jogo.
Após esta parte os alunos irão rever como pode ser feito o cálculo da área de um setor circular.
Na sequência serão propostas atividades, onde através da análise de várias situações envolvendo roletas, serão abordados os conceitos de probabilidade condicional e probabilidade da união de dois eventos, relacionando probabilidade e geometria.
Depois partiremos para atividades com o uso do aplicativo Rodas da Fortuna, onde também será explorada a relação entre geometria e probabilidade.
Ao final, são propostas atividades de resolução de exercícios.

Atividade

Pré-requisitos:
Conceitos inicias sobre o cálculo de probabilidade.
Conceitos de geometria plana, como círculos, setor circular e áreas de figuras planas.

Tempo de Duração:
6 horas/aulas

Material necessário:
Computador, projetor multimídia, software Rodas da Fortuna, folha de atividades.
Roletas construídas com papel cartão.

Organização da turma:
Alunos agrupados em duplas

Objetivos:
Compreender e utilizar corretamente os conceitos de probabilidade.
Estabelecer relação entre probabilidade e geometria.
Abordar o conceito de probabilidade frequentista para estabelecer a relação com a probabilidade geométrica.
Verificar empiricamente que a probabilidade frequentista se aproxima da probabilidade teórica (no caso, a geométrica) depois de um número grande de experimentos.
Resolver problemas por meio da probabilidade da união de eventos e a probabilidade de eventos complementares, bem como, problemas envolvendo probabilidade condicional.
Aplicar os conhecimentos adquiridos na resolução de problemas.

Descritores associados:
H67 - Resolver problemas envolvendo probabilidade.

Aulas 1 e 2

No bimestre anterior demos início ao tema Probabilidade, já vimos o que é um experimento aleatório, espaço amostral, evento e também já aprendemos a calcular probabilidades simples. Agora, o próximo passo é aprender um pouco mais e aprofundar esses conceitos.

Iniciando...

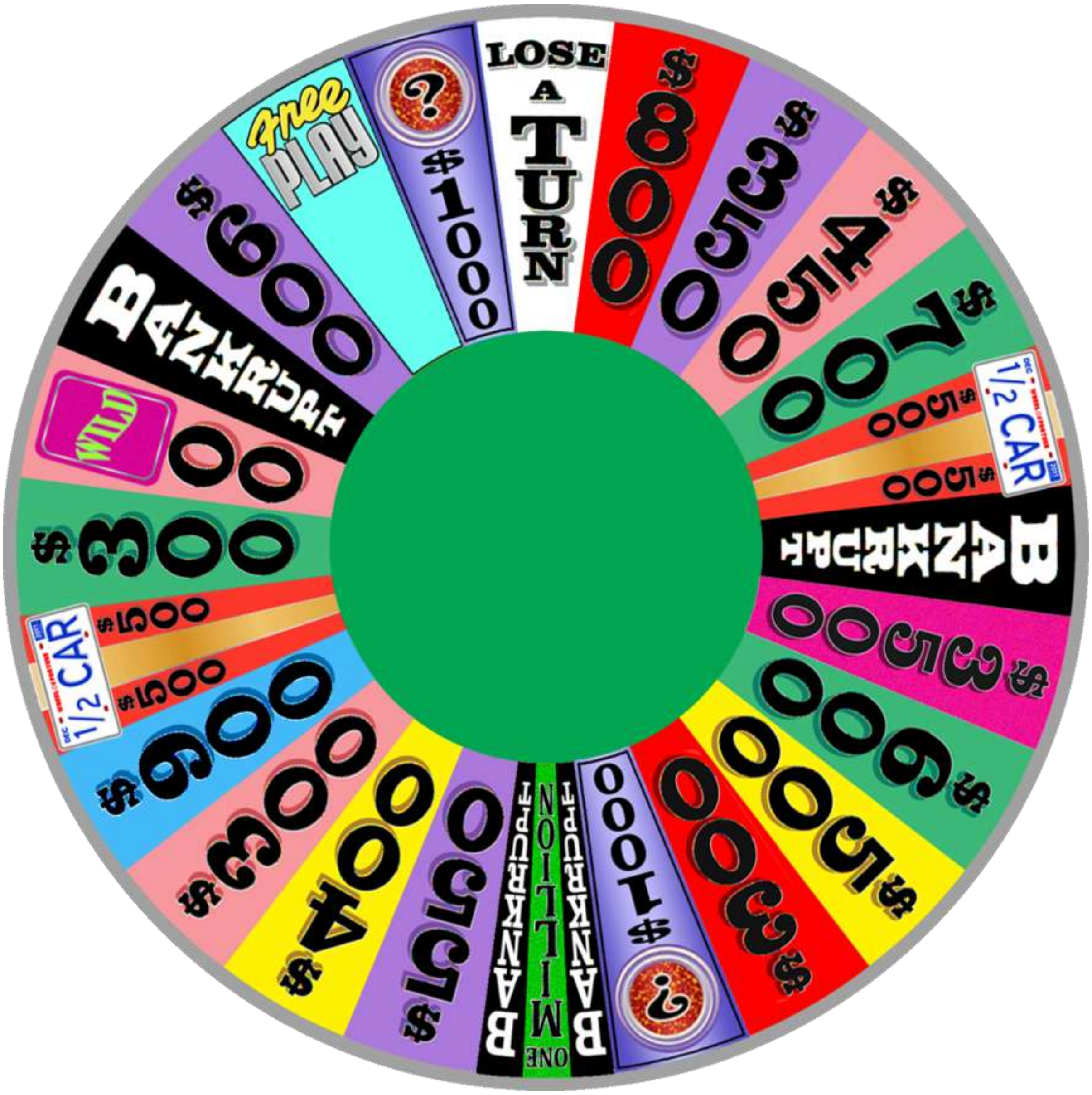
Já conhecemos a definição clássica de Probabilidade, que tem o seguinte enunciado: "Se os acontecimentos elementares forem equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento *A* é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento *A* e o número de casos possíveis."

Além da definição clássica, cabe uma referência à chamada definição frequentista de Probabilidade. A palavra frequentista indica basicamente que há uma sequência de repetições para um determinado evento. De acordo com a interpretação frequentista, suponhamos que n seja o número total de tentativas feitas numa experiência, e n_A seja o número de tentativas em que um determinado evento A ocorreu. A probabilidade $P(A)$ da ocorrência do evento desejado será aproximada pela frequência relativa, como segue: $P(A) \approx \frac{n_A}{n}$

Outra abordagem é a geométrica. Na Probabilidade Geométrica trabalhamos com razões entre medidas de mesma natureza, medidas estas de figuras geométricas.

Então vamos lá!
Esteja atento!

A figura abaixo é uma representação do jogo Roda da Fortuna.



• Você conhece ou já brincou com esse jogo?

Pois é, embora alguns nunca tenham jogado esse jogo, provavelmente já viram alguma versão dele na televisão, no vídeo game ou no computador. Tem uma emissora de televisão brasileira que exibe em sua grade de atrações o programa “Roda a Roda”. Esse programa é uma versão do jogo Roda da fortuna.

As palavras estão escritas em inglês. Você sabe o significado de alguma dessas palavras?

Dicionário:
Lose a turn – Perde a vez
Bankrupt - Falência
One Million – Um milhão
Free play- Jogada livre
Car - Carro

• Notaram que a “fatia” destinada para o maior prêmio na roda é menor que os outros?

• O tamanho da “fatia” na roda afeta ou não que a roda pare nessa fatia?
(Deixar que os alunos troquem idéias e reflitam sobre a pergunta)

(Dar as roletas construídas para que os alunos manipulem)
• E aí, a “fatia” com o prêmio de Um milhão ocorreu alguma vez?

Dando início à sequência:

Atividade 1

Nesta atividade vamos ter a oportunidade de revisar a geometria dos círculos e em particular a razão entre a área de um setor circular e a área total deste círculo.

Então vamos recordar:
Dado um setor circular de ângulo central $\theta°$, de um círculo de área A, podemos determinar a sua área, X , através de uma simples regra de três.

Observe a figura:

http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/area-setor-circular.htm

$360°$ ------------- A
$\theta°$ ---------------- X

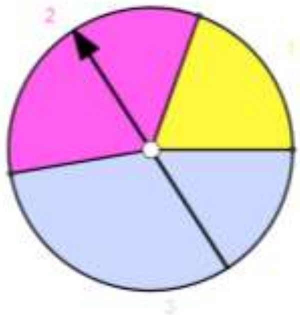
Assim, a razão entre a área deste setor circular e a área total do círculo pode ser calculada da seguinte forma:

$$\frac{X}{A} = \frac{\theta°}{360°} = \frac{\theta}{360}$$

Esteja atento, pois estes conceitos serão importantes nas próximas atividades.

Reflitam sobre as seguintes questões:

• Observe a figura.

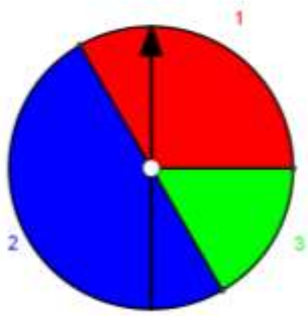


Você acha que cada setor tem a mesma probabilidade de ocorrência na parada do ponteiro? Por quê?

• Então, como construir uma roleta "democrática" de três setores, isto é uma roleta em que cada setor circular tenha a mesma probabilidade de ocorrência na parada do ponteiro?

• Nesse caso, qual é a chance de ocorrência de cada setor? Faça um desenho dessa roleta, indicando os setores e o valor do ângulo central de cada um deles.

• Na roleta da figura abaixo, se o setor verde tem ângulo central de 60° , qual a probabilidade do ponteiro parar no setor vermelho?



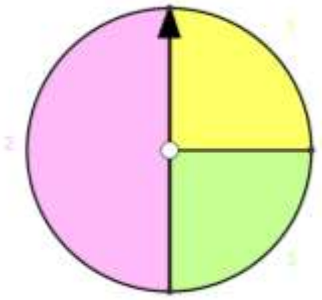
• Ao girar essa roleta, qual dos seus setores possui a maior chance de ser identificado pelo ponteiro? (Deixar que os alunos troquem idéias e reflitam sobre a pergunta. Comentar que o maior setor de um círculo é aquele que possui a maior área e consequentemente o maior ângulo central.)

• Numa roleta com 3 setores circulares, se num dos setores dessa roleta, a probabilidade do ponteiro parar nele é $\frac{1}{8}$, qual é o ângulo central desse setor?

• Dê possíveis probabilidades para os outros dois setores e os respectivos ângulos centrais.

• É possível construir uma roleta cujos setores circulares tenham probabilidades: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{12}$? Explique sua resposta.

Vamos jogar?
Aqui estão as regras do jogo:



O jogador 1 ganha 10 pontos se o ponteiro parar no setor rosa.
O jogador 2 ganha 16 pontos se o ponteiro parar no setor amarelo.
O jogador 3 ganha 24 pontos se o ponteiro parar no setor verde.

• A regra é justa? Justifique.

• Que possibilidades tem cada jogador de ganhar pontos nesse jogo?

• Qual a probabilidade que cada um tem de ganhar pontos nesse jogo?

• Se uma partida tivesse 100 rodadas de roleta, quem poderia ganhar o jogo?

Aula 3

Atividade 2

Esta atividade explora, a probabilidade geométrica e suas propriedades:

Considere a roleta dividida em 8 setores circulares, cujos ângulos centrais correspondentes variam em sequência crescente, de 10 em 10 graus. O menor ângulo é de 10°.

Pense no que você entende por probabilidade geométrica e tente responder as seguintes questões:
• Em qual cor o ponteiro tem maior probabilidade de parar? E em qual tem menor probabilidade? Explique como tirou suas conclusões.

• Qual a probabilidade do ponteiro parar num setor circular de cor marrom?

• Qual a probabilidade do ponteiro parar num setor circular de cor marrom ou verde?
(Deixar que os alunos troquem idéias, reflitam e respondam à pergunta)

Quando queremos determinar a possibilidade de ocorrer um evento A ou um evento B, teremos que calcular a probabilidade da união desses dois eventos. É muito importante lembrar que, na lógica matemática, a palavra “ou” quer dizer união.

Dados dois eventos, A e B, de um espaço amostral S, pela teoria de conjuntos temos que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Onde,

n(A) é o número de elementos do evento A.
n(B) é o número de elementos do evento B.
$n(A \cap B)$ é o número de elementos de A intersecção com B.
n(A U B) é o número de elementos de A união com B.

Dividindo todos os membros da igualdade acima por n(S), que corresponde ao número de elementos do espaço amostral, obtemos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

Mas,

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = P(A \cup B)$$

Assim, teremos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Que é a fórmula para o cálculo da probabilidade da união de dois eventos.

Continuando...

•Numa determinada rodada, o ponteiro não pode parar em um setor de cor verde ou azul. Qual é a probabilidade de que isso aconteça?

• Dado que o ponteiro parou num setor circular de cor rosa, qual a probabilidade de ter parado no setor rosa de menor ângulo central?
(Deixar que os alunos troquem idéias, reflitam e respondam a pergunta)

Observe que a probabilidade do ponteiro parar no setor rosa de menor ângulo central está condicionada ao fato de que o ponteiro parou em um dos setores de cor rosa.

No estudo das probabilidades existem casos de eventos de um espaço amostral que ocorrem independentes dos outros, e eventos que apresentam relações de dependências com os demais que possam ocorrer. A probabilidade condicional é a probabilidade de ocorrência de um evento A, sabendo da ocorrência de outro evento B, ambos sendo eventos de um espaço amostral S finito. A ocorrência de A está condicionada ao fato de B já ter ocorrido, ou seja, a ocorrência do evento B interfere na do evento A.

A probabilidade condicional é dada pela fórmula:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Onde

$P(A \cap B) \rightarrow$ é a probabilidade da intersecção de A com B.
$P(B) \rightarrow$ é a probabilidade de ocorrer o evento B.

Então, podemos perceber que o item anterior trata-se de um caso de probabilidade condicional.

A interpretação do enunciado dos problemas relacionados à probabilidade é fundamental para resolução e identificação do tipo de probabilidade a ser calculada.

Continuando...
• Numa determinada rodada, sabe-se que o ponteiro parou em um setor de cor verde. Qual é a probabilidade dele ter parado no setor de maior ângulo central?

• Dado que o ponteiro não parou num setor circular de cor rosa, qual a probabilidade dele ter parado num setor circular de cor azul?

Aulas 4 e 5

Atividade 3

Nesta atividade serão feitas simulações computacionais com o applet "Rodas da Fortuna".
No aplicativo podemos escolher: número de setores circulares; ângulos centrais, dentro das possibilidades que as regras da probabilidade permitem; cores para os setores circulares; número de experimentos.
Nesta atividade vamos ponderar sobre o conceito de aleatoriedade, explorar as tecnologias usadas pelos computadores para simular aleatoriedade e explorar a relação entre geometria e probabilidade.

Simulação 1:

Escolha em "número de possibilidades" o valor 5 e clique em atualizar. A roda terá 5 setores circulares.
Responda:
Qual é o ângulo central de cada setor circular?

A probabilidade do ponteiro da roleta parar em cada setor é a mesma? Justifique sua resposta.

Agora faça 50 experimentos. Para isso vá clicando no botão "Sortear", até completar 50 cliques e responda :

- Qual a probabilidade frequentista do ponteiro parar em cada um dos setores circulares?

- Qual a probabilidade geométrica do ponteiro parar em cada um dos setores circulares? Responda na forma percentual.

- Para cada setor circular, compare os valores obtidos nos dois itens anteriores. O que você pode dizer sobre isso?

- O que acontecerá se aumentar o número de experimentos? Teste! Aumente o número de experimentos, e observe os resultados das probabilidades frequentista e geométrica. A que conclusão você chegou?

Simulação 2:

Escolha em “número de possibilidades ” o valor 5 e clique em atualizar.
A roda terá 5 setores circulares. Agora, faça escolhas no jogo de forma a obter setores circulares com ângulos centrais de 45°, 60°, 90°, 45°,120° e com as seguintes cores: amarelo, azul, vermelho, verde, rosa, respectivamente.

Responda:
• Esses setores têm a mesma probabilidade de ocorrência na parada do ponteiro? Justifique sua resposta.

• Se sua resposta para a pergunta anterior foi não, diga qual setor tem maior probabilidade de ocorrência na parada do ponteiro e qual tem menor probabilidade. Explique como tirou suas conclusões.

Agora, faça 50 experimentos. Para isso vá clicando no botão “Sortear”, até completar 50 cliques.
Responda:
• Qual a probabilidade frequentista do ponteiro parar no setor circular amarelo? E no setor circular rosa?

• Qual a probabilidade geométrica do ponteiro parar no setor circular amarelo? E no setor circular rosa? Responda na forma percentual.

• Compare os valores obtidos para o setor amarelo e para o setor rosa nos dois itens anteriores. O que você pode dizer sobre isso?

• O que acontecerá se aumentar o número de experimentos? Teste! Aumente o número de experimentos, e observe os resultados das probabilidades frequentista e geométrica. A que conclusão você chegou?

Simulação 3:

Escolha em número de possibilidades o valor 8 e clique em atualizar.
A roda terá 8 setores circulares. Agora, faça escolhas no jogo de forma a obter setores circulares, cujos ângulos centrais variam em sequência crescente, de 10 em 10 graus. O menor ângulo é de 10°. Use as seguintes cores, começando do setor de ângulo central de 10°: vermelho, marrom, verde, roxo, azul, amarelo, cinza, rosa.
Responda:
• Em qual dos setores a chance do ponteiro parar é maior?

•Em qual dos setores a chance do ponteiro parar é menor? Explique como tirou suas conclusões.

Agora, faça 50 experimentos. Para isso vá clicando no botão “Sortear”, até completar 50 cliques.
Responda:
• Qual a probabilidade, em percentuais, do ponteiro parar no setor rosa? E no setor marrom?

• Compare essas probabilidades? O que você pode concluir? Você pode explicar essa conclusão geometricamente?

• As probabilidades frequentista dos setores rosa e marrom permitiriam você tirar as mesmas conclusões?

“Um passo de aprendizagem pode significar cem passos de desenvolvimento”.
Vygotsky (2001)

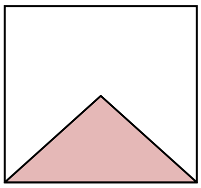
Aula 6

Exercícios Complementares

- Um atirador, com os olhos vendados, procura atingir um alvo circular com 50 cm de raio, tendo no centro um disco de vermelho de 10 cm de raio. Se em certo momento temos a informação de que o atirador acertou o alvo, então qual deve ser a probabilidade de que tenha atingido o disco vermelho central?

http://www.uff.br/cdme/rdf/rdf-html/info-br.html

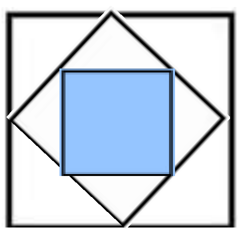
- Pedro e João estão jogando bola de gude e resolvem inventar um desafio. Eles fazem um buraco em formato de um quadrado e desenham um triângulo, cujo vértice E é o centro do quadrado, conforme mostra a figura a seguir.



O objetivo é conseguir jogar a bola de gude de tal forma que ela fique no interior do triângulo. Desprezando o tamanho da bola de gude, qual é a probabilidade de se conseguir atingir o objetivo do jogo?

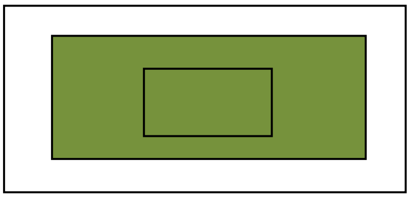
- Suponha que um atirador sempre acerte na tábua quadrada ABCD da figura ao lado. A chance de que ele acerte um determinado ponto da tábua é sempre a mesma, qualquer que seja esse ponto.
A partir dos pontos médios de ABCD foi construído um segundo quadrado EFGH e a partir dos pontos médios desse segundo, foi construído um terceiro quadrado IJKL, que é o alvo. A probabilidade de que tal atirador acerte nesse alvo é de:
a) 50% b) 75% c) 20% d) 30% e) 25%

A B



C D

- Considere um paraquedista descendo de forma aleatória em um campo como o representado na figura.



Medidas:
Campo: 10m x 5m
Região verde: 8m x 4m
Retângulo central: 3m x 2m

Qual a probabilidade do paraquedista pousar na região verde?

Sabendo que o paraquedista pousou na região verde, qual a probabilidade de ele ter pousado no retângulo central?

- A Roda dos Alimentos é um instrumento de educação alimentar destinado à população em geral. Esta representação gráfica foi concebida para orientar as escolhas e combinações alimentares que devem fazer parte de um dia alimentar saudável.

Na roda dos alimentos representada na figura, podemos observar as quantidades dos diversos alimentos que devem ser consumidos diariamente. Alguns valores da figura estão apresentados em porcentagem e outros em graus.

http://solegelo.blogspot.com.br/2008/08/explorar-as-pase-de-matemtica-2008_31.html

Uma nutricionista está ensinando a uma criança os benefícios de uma alimentação saudável. Ao girar a Roda dos alimentos qual a probabilidade de parar no grupo dos laticínos?

Avaliação
Realizada ao longo das aulas. Critérios- desenvolvimento e realização das atividades, participação, raciocínio adequado, compreender e utilizar corretamente os conceitos de probabilidade condicional e probabilidade da união de dois eventos, resolver exercícios envolvendo aplicações do assunto.

Descritor:
H67 - Resolver problemas envolvendo probabilidade

Bibliografia Consultada:

SOUZA, Joamir Roberto de. Novo Olhar Matemática. 1.ed. São Paulo: FTD, 2010. (Coleção Novo Olhar; v.2)

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações- v.2. 1.ed. São Paulo: Ática, 2010.

Projeto Seeduc/Cecierj
< http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=72> Acessado em: 13 mai. 2013

Contagem, Probabilidade e Estatística
<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_3_4e5.pdf> Acessado em: 13 mai. 2013

Uma sequência de ensino em probabilidade geométrica: o jogo da roleta
<http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_c iaem/paper/viewFile/1296/964> Acessado em: 13 mai. 2013

Rodas da Fortuna-
<http://www.uff.br/cdme/rdf/rdf-html/rdf-c-br.html> Acessado em: 13 mai. 2013