FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA

FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ

COLÉGIO: C.E. João Guimarães/ Italva - RJ

PROFESSOR: Jany Mara Nogueira Marinho Dutra

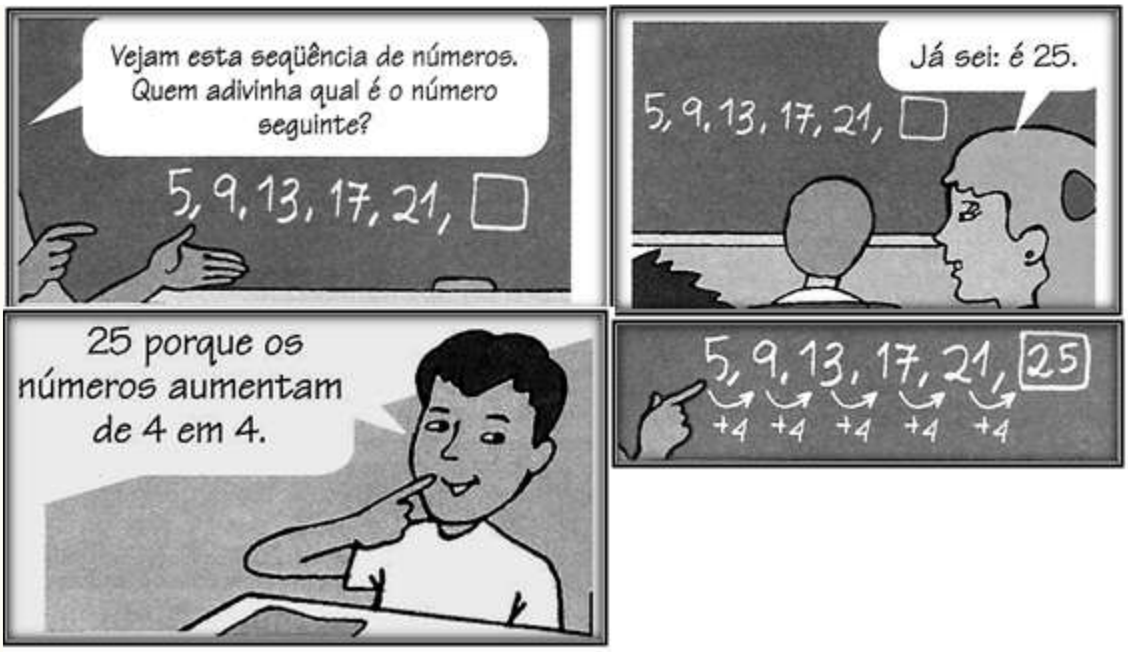
MATRÍCULAS: 08047870/08912909

SÉRIE: 2° ano do Ensino Médio

TUTOR (A): Susi Cristine Britto Ferreira

PLANO DE TRABALHO SOBRE: Sequências numéricas

E-mail: janydutr@yahoo.com.br



SUMÁRIO

➢ INTRODUÇÃO

Sequência numérica

Conjunto é a união de elementos que possuem alguma característica em comum, por exemplo: conjunto de frutas vermelhas, conjunto dos alunos do sexo feminino de uma escola, conjunto dos melhores alunos de uma sala.

Em alguns conjuntos, além de possuírem características em comum, os elementos são dispostos em uma determinada ordem, por exemplo: conjunto dos países que foram apresentados na abertura das Olimpíadas de 2008 (seguiram a ordem do alfabeto chinês), o conjunto dos nomes dispostos em um diário escolar (os nomes são dispostos em ordem alfabética).

Na matemática estudamos conjuntos numéricos (conjunto cujos elementos são números), quando os elementos desses conjuntos são dispostos obedecendo a uma determinada regra chamamos de sequência numérica.

As sequências numéricas são representadas por letras maiúsculas do nosso alfabeto e seus elementos são colocados entre parênteses. Por exemplo:

• Os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais, reais, são todos exemplos de sequência numérica.
• Conjunto dos números pares: A = (0,2,4,6,8,10,12,...)
• Conjunto dos números ímpares entre 8 e 20: C = (9,11,13,15,17,19)

Toda sequência numérica possui uma ordem para organização dos seus elementos, assim podemos dizer que em qualquer sequência os elementos são dispostos da seguinte forma: (a1,a2,a3,a4,....,an, ...) ou (a1,a2,a3,....,an), onde a1 é o 1º elemento, a2 o segundo elemento e assim por diante, e an o enésimo elemento.

Essas sequências numéricas podem ter infinitos elementos, assim chamadas de infinitas, caso contrário, são chamadas de finitas.

- **Recursos necessários:**
  - Papel, lápis, borracha.
  - Lista de atividades
  - Sala de aula
  - Quadro branco e caneta
  - Calculadora

- **Número de aulas previstas:** 8 aulas (50 minutos cada uma)

- **Objetivos específicos:**

- Instigar o cálculo mental.
- Conhecer e usar a linguagem matemática.
- Reconhecer, conceituar e realizar operações com Sequências e Progressões.

- **Pré – requisitos:**
  - Os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental

- **Habilidades relacionadas:**

- Identificar sequências numéricas e obter, quando possível, a expressão algébrica do seu termo geral.
- Utilizar o conceito de sequência numérica para resolver problemas significativos.
- Diferenciar Progressão Aritmética de Progressão Geométrica.
- Utilizar as fórmulas do termo geral e da soma dos termos da P.A. e da P.G. na resolução de problemas significativos.

- **Organização da classe:** A turma poderá ser organizada individualmente, em duplas ou grupos, de acordo com cada momento, propiciando um trabalho organizado e colaborativo.

➢ ESTRATÉGIAS/DESENVOLVIMENTO:

Metodologia 1: Progressão Aritmética

Será aplicado aos alunos um jogo chamado Corrida ao 100. O jogo faz com que os alunos criem uma estratégia para ganhar e, fazendo isso, eles criam na verdade progressões aritméticas e descubram de forma lúdica suas propriedades.

Desenvolvimento:

Os alunos receberão duas folhas com quatro cartelas impressas:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

A seguir, serão explicadas as regras do jogo:

- Decidir de forma justa (par ou ímpar, por exemplo) quem começa o jogo.
- A cada jogada, os alunos escolhem um número de casas de 1 a P para jogar(P natural). O jogador 1 deverá anotar um círculo(O) em todas as casas P que ele escolheu jogar e o jogador número 2 marcará um X da mesma forma.

~~1~~	2	3	4	5	6	7	8	9	~~10~~	11	12	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	~~17~~	~~18~~	~~19~~	20
21	22	23	24	25	26	27	~~28~~	29	30	31	32	33	34	~~35~~	~~36~~	~~37~~	38	39	40
41	42	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	48	49	50	51	52	~~53~~	~~54~~	~~55~~	56	57	58	59	60
~~61~~	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	66	67	68	69	70	71	~~72~~	~~73~~	74	75	76	77	78	79	80
81	~~82~~	83	84	85	86	~~87~~	~~88~~	~~89~~	~~90~~	~~91~~	92	93	94	95	96	97	98	99	~~100~~

· Vence o jogo quem marcar a casa de número 100.

Os alunos serão divididos em grupos de 6 alunos, de forma que joguem três em cada equipe. A equipe deve construir uma estratégia vencedora. Cada rodada do jogo tem 2 cartelas.

Para a primeira rodada vamos propor para o jogo P=8. Portanto, os alunos só podem escolher de 1 a 8 casas para jogar, cada um na sua vez. Enquanto eles jogam, vamos pedir para que anotem em uma folha as conclusões que chegaram sobre suas estratégias e as casas que marcaram durante o jogo. Será proposta a seguinte questão: “Será que existe uma estratégia em que é possível vencer sempre? Se sim, descreva-a”.

Para alcançar a estratégia vencedora, eles devem pensar da seguinte maneira: “se posso marcar até 8 casas, para ter a certeza que vou ganhar a última casa que devo marcar é a de número 91, pois meu adversário poderá marcar, no máximo, a casa de número 99 e então eu ganho. Mas para marcar a casa 91, devo marcar a casa 82”.

Seguindo esse raciocínio, o aluno deverá formar a sequência 1 – 10 – 19 – 28 – 37 – 46 – 55 – 64 – 73 – 82 – 91 – 100. Dessa forma, sua equipe deve ter marcado uma dessas casas para garantir a vitória no jogo. E, se tratar-se do primeiro jogador, tem-se a vantagem de que a primeira casa marcada será menor que P e maior que zero.

Para a segunda rodada, vamos propor que P seja diferente de 8. Os alunos devem escolher um P tal que $5 \leq P \leq 15$. Assim, pretendemos que os alunos confirmem o raciocínio da primeira rodada e percebam que a estratégia vale para qualquer P escolhido.

Então temos as seguintes sequencias possíveis:

Nº de passos	**Sequências vencedoras**
P = 5	4–10–16–22–28–34–40–46–52–58–64–70–76–82–88 –94–100
P = 6	2–9–16–23–30–37–44–51–58–65–72–79–86–93–100
P = 7	4–12–20–28–36–44–52–60–68–76–84–92–100
P = 9	0–10–20–30–40–50–60–70–80–90–100
P = 10	1–12–23–34–45–56–67–78–89–100
P = 11	4–16–28–40–52–64–76–88–100
P = 12	9–22–35–48–61–74–87–100
P = 13	2–16–30–44–58–72–86–100
P = 14	10–25–40–55–70–85–100
P = 15	4–20–36–52–68–84–100

Após o jogo vamos concluir a atividade da seguinte maneira:

Os raciocínios anteriores nos levam a obter os elementos da sequência tomando como penúltimo número 100 – n(P + 1), onde n é o maior número natural menor ou igual a 100/(p+1).

Vamos analisar a sequência para P = 9. Vamos induzir os alunos a pensar com a seguinte pergunta: “Faz diferença ser o jogador 1 ou o jogador 2 nesse caso?”

Os alunos que não escolheram P =9 dirão que não, que o jogador 1 sempre terá vantagem. Os alunos que jogaram com P = 9vão observar que os dois primeiros números serão 0 e 10, mas 0 não pertence à cartela e 10 não pode ser marcado pelo jogador 1 porque P=9, então nesse caso, o jogador 2 leva vantagem.

Então vamos analisar as sequências que fizeram os alunos ganhar o jogo observando suas características. Qual a regularidade nas sequencias?

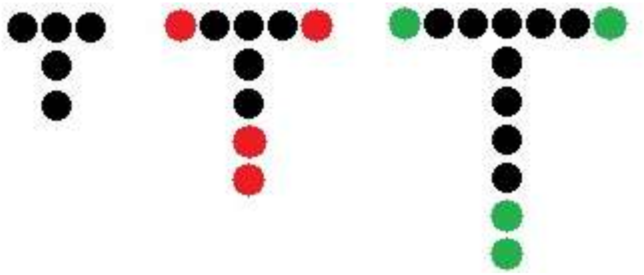
E então vamos apresentar uma Progressão Aritmética, uma sequência de números reais em que a diferença entre um termo qualquer e seu procedente é constante. Para essa diferença, damos o nome de Razão R. Ligando essa definição ao jogo, explicamos que a estratégia para o jogo vencedor é uma P.A de razão (P + 1). A partir disso, introduzimos a notação a1. Observamos com eles que é possível obter o restante dos termos da P.A sabendo apenas a razão e o primeiro termo.

Finalizamos a aula mostrando que para uma sequencia de 7 números, por exemplo, o termo central (a4) é o termo (a1 + a7)/2 {média *aritmética* dos termos}, "justificando" o nome dado à sequência Progressão "*Aritmética*".

Será apresentado para eles dois exercícios com resolução para que eles saibam como aparece P.A em exercícios.

Os exercícios são:

Tisiu ficou sem parceiro para jogar bolita (bola de gude); então pegou sua coleção de bolitas e formou uma sequência de "T" (a inicial de seu nome), conforme a figura.
Supondo que o guri conseguiu formar 10 "T" completos, pode-se, seguindo o padrão, afirmar que ele possuía:



(A) mais de 300 bolitas
(B) pelo menos 230 bolitas.
(C) menos de 220 bolitas.
(D) exatamente 300 bolitas.
(E) exatamente 41 bolitas.

Resolução:
Primeiro T: 5 bolinhas a1
Segundo T: 9 bolinhas a2
Terceiro T: 13 bolinhas a3
a3 – a2 = a2 = a1 = 13 – 9 = 9 – 5 = 4 (R)
Então temos uma P.A de Razão R = 4.
Precisamos descobrir o a10:
a10 = a1 + n.R
a10 = a1 + 9R
a10 = 5 + 9. 4
a10 = 5 + 36

a10 = 41

Sabemos que a_1 = 5 e a_{10} = 41. Fazendo a Soma dos 10 termos, temos a quantidade de bolinhas:
S = (a1 + a10) 10/2
S = (5 + 41) . 5
S = 46 . 5 = 230
Portanto, tínhamos 230 bolinhas.
Resposta: alternativa B)

Duas pequenas fábricas de calçados, A e B, têm fabricado, respectivamente, 3000 e 1100 pares de sapatos por mês. Se, a partir de janeiro, a fábrica A aumentar sucessivamente a produção em 70 pares por mês e a fábrica B aumentar sucessivamente a produção em 290 pares por mês, quantos pares as fábricas A e B produziram de janeiro até julho?
Resolução:
A
A1 = 3070 e r(A) = 70 a6 = a1 + 5.r
a6 = 3070 + 5.70 = 3420

S(A)= (3070 + 3420) . 6/2 = 6490. 3 = 19 470

B
a1 = 1390 e r(B) = 290 a6 = a1 + 5.r
a6 = 1390 + 5. 290 = 2840

S(B) = (1390 + 2840). 6/2 = 4230 . 3= 12 690
A fábrica A produziu 19 470 pares de calçados em 6 meses e a fábrica B produziu 12 690 pares.

Lista de exercícios 1:

Questão 1: Escreva a sucessão: an = 1/n e n Є N*.

Questão 2: Escreva a sequência definida por an= n2+4.

Questão 3: Numa P.A., o primeiro termo é igual a razão e a14 = 84. Calcule a1 e a razão.

Questão 4: Obter uma P.A. de três termos cuja soma seja igual a 12 e cujo produto seja igual a 60.

Questão 5: Inscrevendo nove meios aritméticos entre 15 e 45, qual é o sexto termo da P.A..

Questão 6: Numa P.A. a2+ a= 20 e a4+ a9= 35. Escreva a P.A..

Questão 7: Calcule a soma dos 50 primeiros termos da P.A. (2,6,...).

Questão 8: Numa P.A. de dez termos, o último termo é igual a 22 e a razão é igual a 2. Determine o primeiro termo e a soma.

Questão 9: Calcule o trigésimo termo da P.A. (-50,-46,...).

Questão 10: (Desafio) Calcule o número de termos da P.A.(7,9,11,13,...), sabendo que a soma deles é 160.

Metodologia 2: Progressão Geométrica

Será aplicado aos alunos uma extensão do Quadrado mágico aditivo (um quadrado formado pelos números 1, 2 3, 4 5, 6, 7, 8 ,9 cuja soma das diagonais, linhas e colunas é uma constante). Porém o Quadrado será adaptado e passará a chamar “Quadrado mágico multiplicativo”, que preserva suas propriedades, porém é formado por números diferentes(termos de uma P.G.) e a operação é a multiplicação, portanto o produto das linhas, colunas e diagonais é uma constante chamado “constante mágica”.

Desenvolvimento:

A aula será iniciada da seguinte maneira: explica-se o que é o quadrado mágico aditivo e então fala-se do quadrado multiplicativo. O quadrado mágico aditivo é formado pelos números 1, 2 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e seus números são dispostos como mostrados na figura 1, cuja soma das diagonais, linhas e colunas é uma constante k. O quadrado mágico multiplicativo é composto por números diferentes, porém preserva as propriedades iniciais pelo produto, ou seja, o produto das linhas, colunas e diagonais é uma constante m.

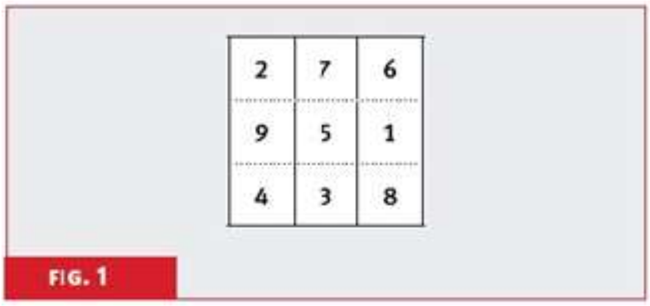


FIG. 1

Em seguida, será entregue aos alunos uma folha com alguns quadrados mágicos em branco, para que eles completem.

Para o início da atividade, será proposto que eles criem um quadrado mágico multiplicativo com os números 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 cuja constante é 4096. A solução está na figura abaixo:

2	64	32
256	16	1
8	4	128

As respostas podem ser diferentes, pois se rotacionarmos ou refletirmos o quadrado e mantermos o termo central, o produto se mantém.

A seguir, será proposto um novo desafio aos alunos: Montar 2 quadrados mágicos multiplicativos com as sequencias {3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768} e {100, 50, 25, 25/2, 25/4, 25/8, 25/16, 25/32, 25/64}. Porém dessa vez as constantes mágicas multiplicativas não serão reveladas.

As constantes mágicas são ($3^3.2$ elevado a 12) e ($100^3.1/2$ elevado a 12), respectivamente. Caso os alunos sintam muita dificuldade para montar, podemos revelar o termo central e se a dificuldade persistir, revelamos também o as constantes multiplicativas.

Então faremos a pergunta: O que as três sequencias de números propostos tem em comum?

A = {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256}, B = {3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768}, C = {100, 50, 25, 25/2, 25/4, 25/8, 25/16, 25/32, 25/64}.

Os alunos devem responder que as três sequencias são Progressões Geométricas com razões diferentes. As razões de A e B são iguais a 2 e a razão de C é ½.

Será explicado que se considerarmos os números em ordem crescente como termos de uma p.g, podemos perceber que todos os quadrados mágicos podem ser montados como o primeiro: dados 9 termos de uma p.g, montamos o quadrado da seguinte maneira:

$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9)$

a_2	a_7	a_6
a_9	a_5	a_1
a_4	a_3	a_8

Observamos que o termo central da P.G é também o termo central do quadrado mágico. Portanto, temos as soluções dos quadrados mágicos propostos:

6	192	96
768	48	3
24	12	384

50	25/16	25/8
25/64	25/4	100
25/2	25	25/32

Prosseguindo, podemos escrever a progressão geométrica com termos genéricos

$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9)$;

e como esses números formam uma p.g, podemos escrevê-las da seguinte maneira:

$(a_1, ra_1, r^2a_1, r^3a_1, r^4a_1, r^5a_1, r^6a_1, r^7a_1, r^8a_1)$,

onde r é a razão da p.g.

Dessa maneira, podemos recolocar os números no quadrado:

ra_1	r^6a_1	r^5a_1
r^8a_1	r^4a_1	a_1
r^3a_1	r^2a_1	r^7a_1

Algumas observações:

- Todas as linhas, colunas e diagonais tem o produto $a_1^3r^{12}$.
- Além disso, observamos que as potências de r formam um quadrado mágico aditivo: se somarmos as potencias de r nas linhas, colunas e diagonais, todas resultam em (r elevado a 12).

Portanto, se colocarmos apenas as potencias de r em um outro quadrado, esse quadrado será um quadrado mágico aditivo:

ra_1	r^6a_1	r^5a_1
r^8a_1	r^4a_1	a_1
r^3a_1	r^2a_1	r^7a_1

Quadrado mágico multiplicativo

1	6	5
8	4	0
3	2	7

Quadrado mágico aditivo

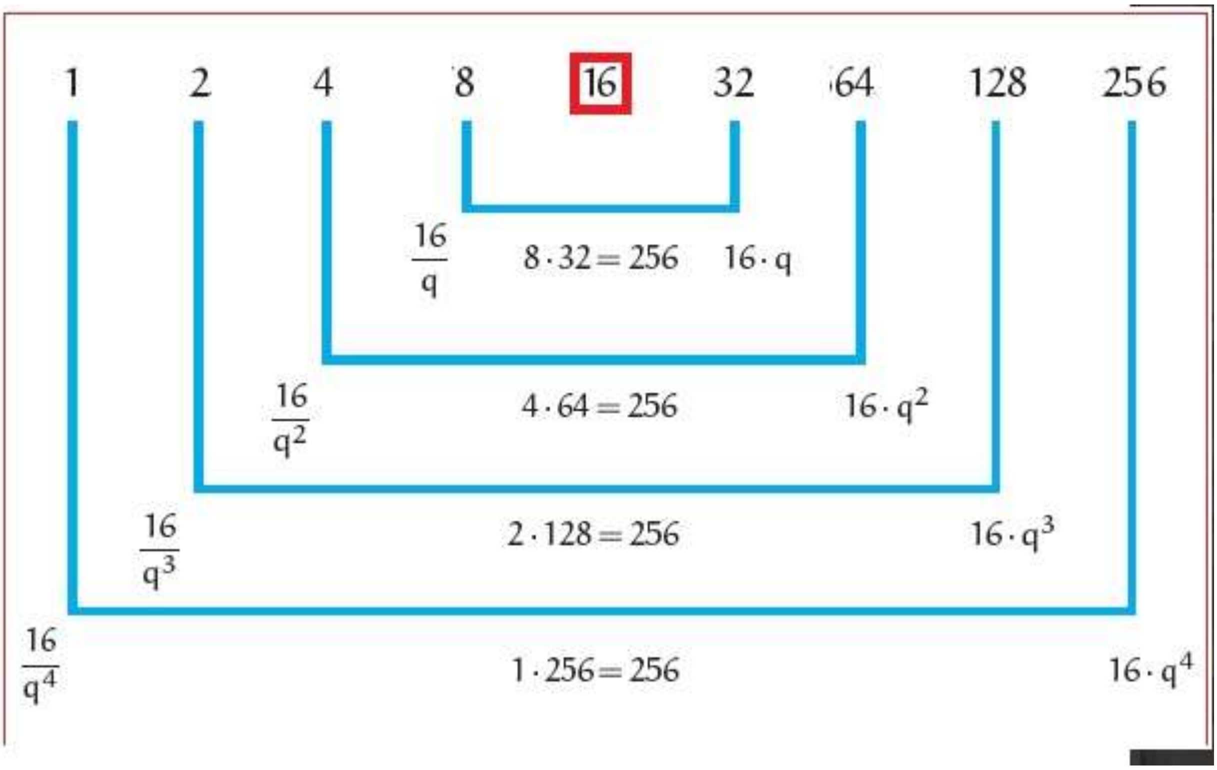
Dessa maneira, podemos designar a posição dos outros termos da p.g dentro do quadrado, pois já sabemos que o termo central do quadrado deve ser o termo central da p.g.

Vamos dividir todos os termos da sequencia {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256} por 16. Teremos uma nova sequência:{1/16, 1/8, ¼, ½, 1, 2, 4, 8, 16, 32} e vamos colocar essa sequência no quadrado de forma que a constante mágica seja 1.

Teremos o seguinte quadrado:

1/8	4	2
16	1	1/16
1/2	1/4	8

Agora perceba: os valores simétricos são opostos no quadrado.



E como podemos obter a constante mágica do quadrado?

Podemos obter a constante mágica fazendo a raiz quadrada do produto de todos os termos da P.G:

$$(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256) \rightarrow \sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32 \cdot 64 \cdot 128 \cdot 256} = 4096$$

Para obter o produto dos n termos de uma P.G, temos a fórmula

$$P_n = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Assim, extraímos a raiz cúbica desse produto e encontramos a constante mágica do quadrado formado por essa P.G.

E então abordamos com os alunos de maneira lúdica o conceito de razão, mostramos uma maneira de escrever uma P.G usando apenas o primeiro termo (a1) e a razão e mostramos o produto dos n termos de uma P.G.

Lista de exercícios 2:

Questão 1: Determine a razão de cada uma das sequências:

a) (3,12,48,...)

b) (10,5,...)

c) (5,-15,...)

d) (10,50,...)

Questão 2: Escreva uma P.G. de quatro termos em que $a1= 5$ e $q = 3$.

Questão 3: Escreva uma P.G. de seis termos em que $a1=-2$ e $q = 2$.

Questão 4: Escreva uma P.G. de cinco termos em que $a1= 540$ e $q = 1/3$.

Questão 5: (Desafio) Determine o valor de x, de modo que os números $x+1$, $x+4$, $x+10$ formem, nesta ordem, uma P.G.

- **AVALIAÇÃO:** Será observado o interesse, a participação, a assiduidade e a integração do aluno no decorrer das aulas e a resolução dos exercícios propostos, seguido das avaliações escritas (trabalho e avaliação bimestral).
  - Atividades de exploração (individuais e/ou em grupos);
  - Atividades de entendimento dos temas abordados;
  - Listas de exercícios;
  - Provas

- **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:**

- Autor: José Roberto Julianelli (UERJ). Matemática – Currículo Mínimo. Disponível em www.educacao.rj.gov.br. Acesso em 01 de maio de 2014.
- Barreto filho, Benigno , Cláudio Xavier da Silva, Matemática aula por aula, Ensino Médio,1ª edição volume 2, Ed. FTD, 2003.
- Dante, Luis Barreto, Matemática volume único, Ensino Médio – Ed. Ática, 2005
- Gelson Iezzi-Matemática vol único-Ensino médio.
- Manoel Paiva-Matemática vol único-Ensino médio

- **Endereços eletrônicos acessado de 01/05/2014 a 05/05/2014**
  - www.alunosonline.com.br › Matemática › Progressões
  - www.pibid.ufpr.br/pibid_new/uploads/.../arquivo/.../Progress_es.PDF
  - www.educacao.rj.gov.br.
  - www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1672-6.pdf

- **Recursos Complementares:**

- Vídeos interessantes sobre P.A , PG E MATEMÁTICA FINANCEIRA:
- http://www.youtube.com/watch?v=CFhdoJjsm6w
- http://www.youtube.com/watch?v=U9JuY6_0oTc
- http://www.youtube.com/watch?v=S5uXL4-nRoY
- http://www.youtube.com/watch?v=xFuAlveItVI

- **Dicas e sugestões:**

O professor pode pedir a seus alunos que façam uma pesquisa sobre a sequência de Fibonacci, pedindo que pesquisem sobre seu criador e mostrando aplicações da sequência. A abordagem do conteúdo de sequências numéricas prepara o aluno para o aprendizado das Progressões Aritmética e Geométrica.
Uma proposta de aula sobre a sequência de Fibonacci pode ser encontrada no endereço eletrônico: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=948.