Reforço escolar · Matemática ·

Números irracionais

Dinâmica 7

3ª Série | 3º Bimestre

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	3ª Série do Ensino Médio	Numérico Aritmético	Números Irracionais

Professor

DINÂMICA	Números irracionais
HABILIDADE PRINCIPAL	H37 – Identificar a localização de números racionais na forma decimal na reta numérica.
HABILIDADES ASSOCIADAS	H36 – Identificar a localização de números reais na reta numérica.
CURRÍCULO MÍNIMO	Identificar a localização de números reais na reta numérica..

GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fundação CECIERJ Consórcio cederj

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos:

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhando ideias	Localizando números racio-nais numa reta numérica	20 min	Grupos de 3 ou 4 alunos.	Individual
2	Estudando em Grupo	Irracionais na reta numérica	30 min	Grupos de 3 ou 4 alunos.	Individual
3	Sistematizando	Cercando raízes	25 min	Grupos de 3 ou 4 alunos.	Individual
4	Quiz	Quiz	10 min	Individual	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise coletiva das respostas	15 min	Coletiva	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizá-la, quando desejar.			

Apresentação

Esta dinâmica contribui para que os alunos localizem alguns números irracionais na reta numérica e obtenham aproximações decimais desses números a partir dessa localização. Além disso, eles terão oportunidade de explorar as relações no triângulo retângulo para entender a relação entre a espiral pitagórica e esses números irracionais.

Primeira Etapa
Compartilhando Ideias

Atividade · Localizando números racionais numa reta numérica

Objetivo

Localizar números inteiros e decimais na reta numérica por meio da resolução de problemas.

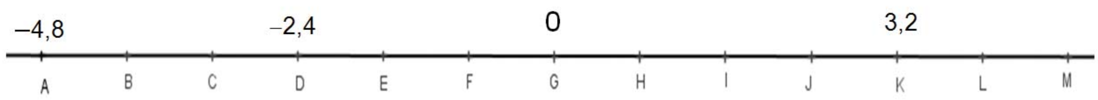
Descrição da atividade:

Para dar início à atividade, distribua os alunos em grupos de 3 ou 4. Depois de agrupados, é importante que discutam e resolvam uma situação problema proposta no seu material. Essa discussão irá motivá-los a localizar números racionais na reta numérica pela investigação de pistas que os levem às respostas corretas.

Professor, veja a seguir a proposta de situação-problema:

Situação problema

Deseja-se construir uma nova linha de metrô para ligar as cidades A e M, passando pela cidade G, onde será construída a estação central desta linha. Sabe-se que o projeto prevê a construção de mais 12 estações igualmente espaçadas e estas receberão os nomes das respectivas cidades. A reta abaixo representa o trecho da construção.



Os números na reta representam marcos da distância relativa à estação central G. Dessa forma, o marco 0 fica na estação G e, por convenção, os marcos das estações à esquerda de G recebem sinais negativos e, à direita, sinais positivos.

Isto significa que a estação D, por exemplo, está a uma distância de 2,4 km para a esquerda da estação central G. Da mesma forma, a estação K está a 3,2 km para a direita da mesma estação.

Agora, complete corretamente a tabela, a partir de pistas que orientam a localização de todas as estações na reta numérica acima.

Resposta

DICAS	DISTÂNCIA ATÉ A ESTAÇÃO CENTRAL	MARCO NUMÉRICO DA ESTAÇÃO	EM QUAL ESTAÇÃO ESTOU?
Primeira estação à direita de G	*0,8 km*	*0,8*	*H*
Marco inteiro entre – 4,8 e – 2,4	*4 km*	*– 4*	*B*
Fração irredutível 24/5	*4,8 km*	*4,8*	*M*
Simétrico de 4/5	*0,8 km*	*– 0,8*	*F*
Metade de 48/10	*2,4 km*	*2,4*	*J*
Marco inteiro entre 3,2 e 4,8	*4 km*	*4*	*L*
Menor que –2,4 e maior que – 4	*3,2 km*	*–3,2*	*C*
Fração irredutível – 8/5	*1,6 km*	*– 1,6*	*E*
O marco é o dobro de 0,8	*1,6 km*	*1,6*	*I*
Marco negativo	2,4 km	*–2,4*	*D*
Marco negativo	*4,8 km*	*– 4,8*	*A*
Marco positivo	3,2 km	*3,2*	*K*

Recursos necessários

- Material no encarte do aluno

Procedimentos Operacionais

- *Leve o aluno a descobrir que a distância entre duas estações consecutivas é de 0,8 km. Para isso, é possível utilizar qualquer dado numérico do esquema. Por exemplo, dado que a estação K está a uma distância de 3,2 km da estação central, a operação 3,2 ÷ 4 = 0,8 dá o espaçamento entre duas estações consecutivas.*
- *Oriente o aluno a preencher a tabela disponível no material dele;*
- *Ressalte que a discussão deve ser em grupo, mas que todos devem preencher os dados na tabela do seu material.*

• • • • •

Intervenção Pedagógica

Professor, é importante que acompanhe o preenchimento da tabela pelos alunos para que possa identificar se eles conseguem localizar facilmente todas as estações representadas na reta e seus respectivos marcos, em quilômetros. Caso perceba que ainda tenham dúvidas, uma boa estratégia é fazer no quadro uma representação da reta do problema e marcar os pontos destacados, associando cada letra ao número racional correspondente.

• • • • •

Segunda Etapa
Estudando em Grupo

30 MINUTOS

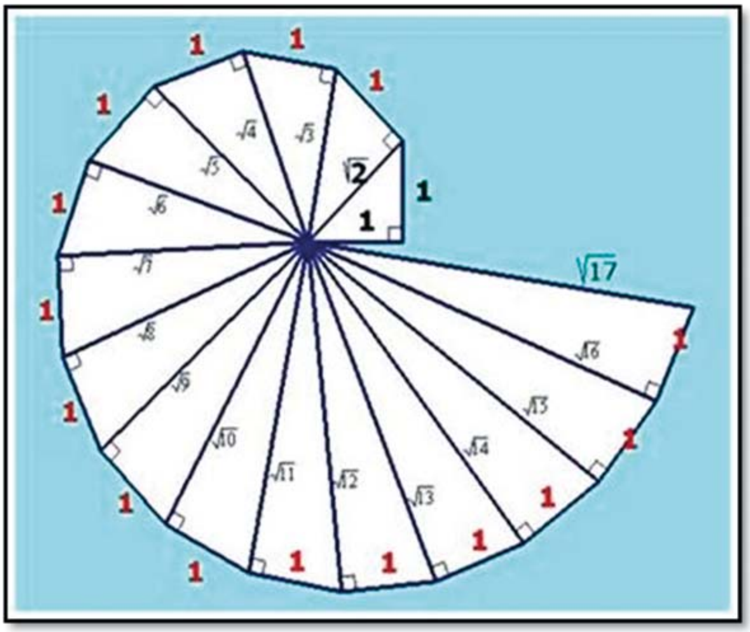
Atividade • Irracionais na reta numérica

Objetivo

Localizar raízes quadradas de números naturais na reta numérica por transferência de medidas.

Descrição da atividade

A espiral pitagórica é uma representação geométrica que se aproxima do formato de um caracol e é conhecida pelos gregos há mais de 2300 anos.

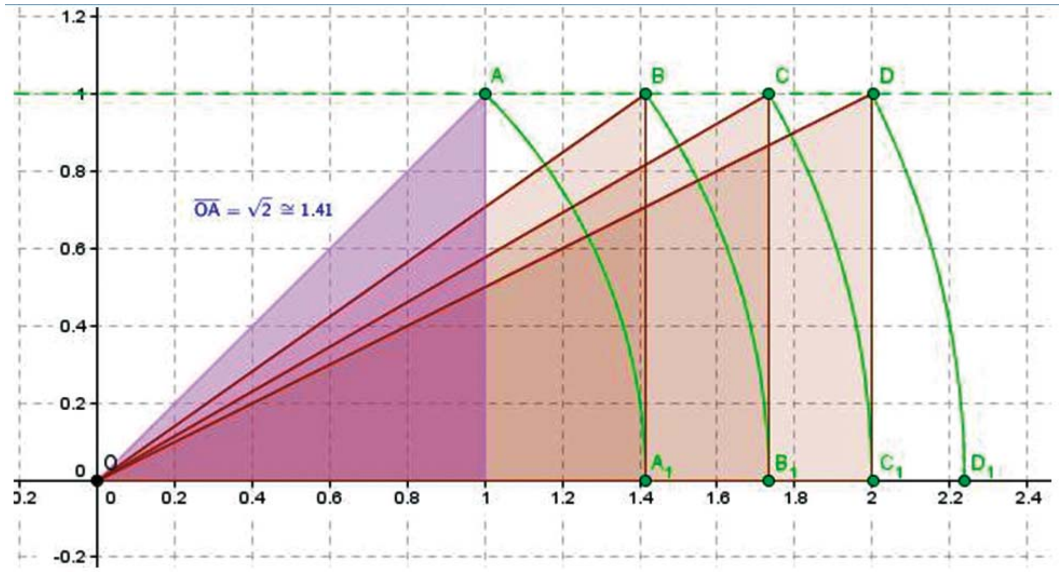


Ela é construída como uma sequência de triângulos retângulos que têm como um dos catetos a hipotenusa do triângulo retângulo anterior e o outro medindo 1 unidade de comprimento. Suas hipotenusas terão, portanto, o comprimento igual à raiz quadrada de números naturais, em sequência, a partir de 2.

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:NautilusCutawayLogarithmicSpiral.jpg

Partindo da observação da espiral pitagórica, os alunos deverão comparar e relacionar os triângulos representados na espiral, com os triângulos retângulos traçados no plano a seguir. Ajude os grupos a responderem às seguintes questões:

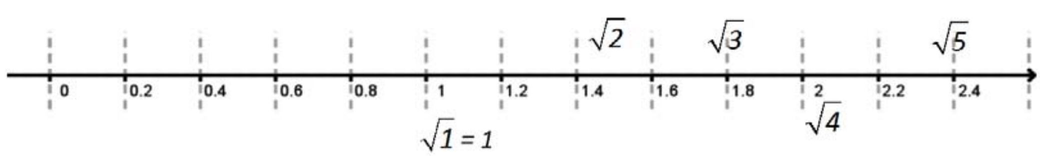
1. Observe os triângulos retângulos traçados no plano a seguir. Qual a relação entre eles e a espiral pitagórica?



2. Na imagem anterior, confira que, utilizando o Teorema de Pitágoras, você pode garantir que as medidas destas hipotenusas são $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{5}$, anotando esses valores na figura.
3. Usando um compasso ou a régua (disponível em anexo), marque, na <u>reta numérica</u> a seguir, os pontos $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{4} = 2$ e $\sqrt{5}$.

Professor

Resposta



As aproximações esperadas são: $\sqrt{2} \cong 1{,}4$; $\sqrt{3} \cong 1{,}7$ $\sqrt{5} \cong 2{,}2$

• • • • •

Recursos necessários

- Encarte do aluno;
- Compasso;
- Tesoura;
- Régua disponível no anexo.

Procedimentos Operacionais

- *Estimule os alunos a observarem a aplicação do Teorema de Pitágoras na espiral pitagórica na disposição dos triângulos sobre o eixo, o que permite a localização de alguns números irracionais na reta numérica.*
- *Chame a atenção dos alunos quanto à representação de raízes de números quadrados perfeitos como números inteiros e quanto às aproximações decimais para as raízes não exatas.*

• • • • •

Intervenção Pedagógica

- *Professor, no item 2 os alunos deverão transferir as medidas das hipotenusas para o eixo das abscissas, obtendo a localização dos números:* $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ *e* $\sqrt{5}$ *na reta numérica. Para isso, basta identificar o triângulo desejado e posicionar a ponta seca do compasso na origem e a ponta de grafite na outra extremidade da hipotenusa correspondente, traçando um arco de circunferência em direção ao eixo horizontal do plano. Dessa forma, fazendo a rotação do compasso no sentido horário, os alunos obterão a localização de irracionais positivos. As representações negativas, com o mesmo valor absoluto, são obtidas com o movimento no sentido anti-horário.*
    - *Enfatize que há muitos outros números irracionais.*
    - *Informe aos alunos que é possível mostrar que a raiz quadrada de um número natural ou é um número natural, como aconteceu com as raízes de 1 e de 4, ou não é racional.*
    - *Professor, oriente aos alunos na transferência da medida do segmento do item 1 para a reta numérica do item 2. Lembre-se que esta transferência da medida de segmento deve ser realizada a partir da origem (zero). É neste momento que o aluno poderá transpor a ideia de medidas irracionais dos segmentos e percebê-lo como um número real localizado na reta.*
    - *Finalize a atividade, generalizando o conceito de números irracionais como números que não podem ser escritos como quociente (razão) de dois inteiros e, por isso, sua expansão decimal é infinita e não periódica.*

• • • • •

Professor

Terceira Etapa
Sistematizando

Atividade • Cercando raízes

Objetivo

Discutir questões sobre a irracionalidade de raízes quadradas não exatas e suas aproximações decimais.

Descrição da atividade

Professor, nesta etapa, o estudante será desafiado a estimar a 1ª casa decimal de cada uma das raízes não inteiras que ele marcou na reta numérica, baseando-se na ideia da espiral pitagórica. Depois disso, ele será orientado a avaliar sua estimativa.

Veja a proposta para os alunos:

Com os mesmos grupos, vocês devem encontrar aproximações numéricas das raízes não inteiras que trabalhamos na segunda etapa. A utilização destas aproximações obedece ao chamado critério de suficiência, ou ainda, da necessidade de aproximação da raiz de acordo com a situação real.

Vamos ao trabalho?

1. A partir da localização geométrica, obtenha uma aproximação decimal com uma casa decimal para as raízes quadradas não inteiras que você localizou na reta numérica.

Resposta

$\sqrt{2} \cong$ | $\sqrt{3} \cong$ | $\sqrt{5} \cong$

Os valores com uma casa decimal dessas raízes são: $\sqrt{2} \cong 1{,}4$; $\sqrt{3} \cong 1{,}7$ e $\sqrt{5} \cong 2{,}2$.

• • • • •

2. Confira os seus resultados, calculando o quadrado de cada aproximação que você encontrou.

O quadrado da aproximação de $\sqrt{2}$ é: ______________________________

O quadrado da aproximação de $\sqrt{3}$ é: ______________________________

O quadrado da aproximação de $\sqrt{5}$ é: ______________________________

3. Em cada caso, compare esse quadrado com o radicando (2 ou 3 ou 5). Nos casos em que esse quadrado seja menor do que o radicando, calcule o quadrado dessa mesma aproximação somada com 1 décimo e veja se já ultrapassou o radicando. Se não ultrapassou, some ainda mais 1 décimo e calcule o quadrado desse novo número, quando ultrapassar o valor do radicando, a penúltima aproximação será uma boa aproximação até os décimos. Por outro lado, se o quadrado da sua aproximação ultrapassou o radicando, calcule o quadrado dessa mesma aproximação menos 1 décimo e vá repetindo o processo até conseguir "cercar" o radicando.

Resposta

Espera-se que o estudante perceba se fez uma boa avaliação. Por exemplo, se ele achou $\sqrt{2} \cong 1{,}4$*, ao calcular* $1{,}4^2$ *encontra 1,96 que é menor do que 2, e ao calcular* $1{,}5^2$ *encontra 2,25 que já é maior do que 2, desta forma ele terá a certeza de que a primeira casa decimal do número* $\sqrt{2}$ *é mesmo 4 e uma aproximação até os décimos dessa raiz é 1,4.*

No entanto, se ele partiu de 1,3, ao calcular $1{,}3^2$ *ele encontra 1,69 e, ao calcular* $1{,}4^2$ *e encontrar 1,96, ele deve perceber que 1,3 foi insuficiente, assim deve continuar para* $1{,}5^2$*, quando terá "cercado" a raiz.*

Por outro lado, se ele começou de 1,5, ao calcular $1{,}5^2$ *que já ultrapassa 2, ele precisa calcular* $1{,}4^2$ *e saberá que o algarismo dos décimos da* $\sqrt{2}$ *é 4 e não 5.*

A aproximação 1,4 diz-se uma <u>aproximação por falta</u> e 1,5 diz-se uma <u>aproximação por excesso</u> de $\sqrt{2}$*.*

• • • • •

4. Justifique a igualdade $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Resposta

Espera-se que o estudante se lembre de que $8 = 2^3 = 2 \times 2^2$ *e que; portanto,* $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

• • • • •

Matemática

5. A partir da relação anterior dê uma aproximação para $\sqrt{8}$.

Resposta

Espera-se que os estudantes considerem $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \cong 2 \times 1{,}4 = 2{,}8$ *ou, melhor ainda, se perceberem que, do fato de* $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$*, então* $2{,}8 < \sqrt{8} < 3{,}0$*.*

• • • • •

6. Agora, compare as aproximações de $\sqrt{8}$ e de $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ e entenda porque estes números são diferentes.

Resposta

Aqui, espera-se que os estudantes façam o cálculo pelas aproximações: $\sqrt{8} \cong 2{,}8$ *e* $\sqrt{3} + \sqrt{5} \cong 1{,}7 + 2{,}2 = 3{,}9$ *bem longe da aproximação de* $\sqrt{8}$*, o que dá para garantir que são mesmo diferentes, mesmo levando em conta os erros de aproximação. Melhor será, para que não pairem dúvidas sobre a margem de erro (em tempos de eleição, estamos acostumados a ouvir falar em empates técnicos... mesmo para resultados distintos) será cercar esses números e perceber que estão mesmo distantes um do outro. Têm-se, então: de* $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$ *e* $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$*, que:*

$$3{,}9 < \sqrt{3} + \sqrt{5} < 4{,}1 \text{ e como } 2{,}8 < \sqrt{8} < 3{,}0$$

são números distantes um do outro:

$$\sqrt{8} < 3 < 3{,}9 < \sqrt{3} + \sqrt{5}.$$

• • • • •

Recursos necessários:

- Encarte do aluno;
- Calculadora.

Procedimentos Operacionais

- *Se os alunos dispuserem de calculadora, você pode modificar a primeira questão desta etapa, solicitando que os alunos busquem aproximações com 2 decimais e façam modificações nos centésimos para avaliar suas estimativas.*

- *Dê alguns minutos para a solução e faça coletivamente a comparação dos processos de resolução e dos resultados encontrados.*
- *Acompanhe os registros dos alunos, auxiliando-os nas possíveis dificuldades.*

Intervenção Pedagógica

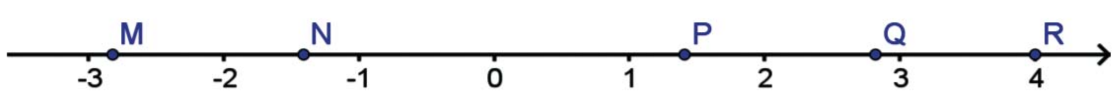
- *É possível que os grupos encontrem aproximações distintas para as raízes quadradas não exatas. Nesse momento, é preciso alertá-los que se trata de uma estimativa.*
- *É importante também levá-los a calcular o quadrado desses valores aproximados, de forma que compreendam que o resultado nunca será exatamente o radicando da raiz em questão.*
- *Se achar necessário, oriente os alunos a estimarem as raízes quadradas pelo método de tentativa e erro. A aproximação decimal de $\sqrt{2}$, por exemplo, está entre 1 e 2. Pode-se tentar o quadrado do ponto médio: $(1,5)^2 = 2,25$ que é maior que 2. Vale tentar $(1,4)^2 = 1,96$. Já se conclui que a aproximação da raiz de 2 até os décimos é 1,4. Como $(1,4)^2$ está bem mais perto de 2 do que $(1,5)^2$, para uma nova aproximação em centésimos, pode-se tentar o quadrado de 1,41. Observe que: $(1,41)^2 = 1,41 \times 1,41 = 1,9881$, e $(1,42)^2 = 2,0164$. Conclui-se, então, que 1,41 é o valor de raiz de 2 até os centésimos. Esse processo pode ser repetido com tantas casas decimais quanto necessário.*

Quarta Etapa

Quiz

Questão

Veja a reta numérica abaixo.



O número $-2\sqrt{2}$ está melhor representado pelo ponto

a. M

b. N

c. P

d. Q

e. R

(*Questão 41 – Saerjinho – 2ª série do Ensino Médio, no 3º bimestre de 2011*)

Quinta Etapa

Análise das Respostas ao Quiz

15 MINUTOS

Procedimentos Operacionais

- *Nesta etapa, você, professor, pode orientar cada aluno para que se posicione e escolha uma resposta. Como em um quiz show, deve perguntar: quais alunos optam pela letra A, e anotar; quais optam pela letra B, e anotar, e assim sucessivamente. Quando todos já tiverem escolhido uma opção, apresente a resposta correta, para passar à próxima etapa.*

Professor

Resposta

A resposta correta é a letra (a)*, pois $\sqrt{2} \cong 1{,}41$ então $-2\sqrt{2} \cong -2 \times 1{,}41 \cong -2{,}82$ que é um número que está entre –3 e –2, que fica mais perto de –3 do que de –2. O único ponto entre –3 e –2 é* ***M****.*

Distratores

O aluno que escolheu a alternativa (b), possivelmente, esqueceu-se de multiplicar a aproximação de $\sqrt{2}$ por 2. Aquele que escolheu a alternativa (c) deve ter se esquecido de multiplicar a aproximação de $\sqrt{2}$ por – 2. Já o aluno que escolheu a alternativa (d) deve ter feito a multiplicação por 2, mas esqueceu-se do sinal negativo. Afinal, o aluno que escolheu a alternativa (e) pode ter escolhido ao acaso ou não reparou nem no sinal de – nem com o símbolo da raiz e multiplicou 2 por 2.

Etapa Flex

Para saber +

Uma observação importante é que não é possível descobrir se uma representação decimal é de um número racional ou irracional quando se conhece somente um número finito de algarismos de sua representação decimal. Claro, por maior que seja o número de algarismos conhecidos, sempre poderá terminar adiante ou um trecho desses algarismos pode se tornar o período de uma dízima periódica, casos em que o número é racional. Sendo assim, nem a calculadora nem o computador podem nos contar que um número seja, ou não, irracional. O professor precisa ficar atento, pois esse erro é encontrado em vários livros didáticos.

Por exemplo, numa calculadora comum, com 8 dígitos no visor e sem arredondamento, calculados o quociente 970 ÷ 99 e a raiz quadrada de 96,000 407 , obtém-se o resultado: 9,7979797. No entanto, o quociente 970 ÷ 99 é um número racional, que pode ser escrito como a dízima periódica 9,797979 ... de período 79, enquanto a raiz quadrada de 96,000 407 é um número irracional, cuja representação decimal é infinita que começa por: 9,7979797407424 ... .Como se sabe que um é racional e outro não? O primeiro é racional pela própria definição de número racional como quociente de dois inteiros dos quais o segundo seja diferente de zero. Os argumentos que garantem que as raízes de números naturais são também naturais (raízes exatas) ou irracionais, (que não há meio termo, ou são inteiros ou sua representação decimal é infinita, sem ser periódica) são raciocínios de outra ordem. A decomposição em números primos é que permite mostrar que essas raízes não exatas também não podem ser escritas como o quociente de dois números inteiros. No exemplo acima, esse argumento seria aplicado ao número 96.000.407 que é igual ao número dado multiplicado pelo quadrado de 1000.

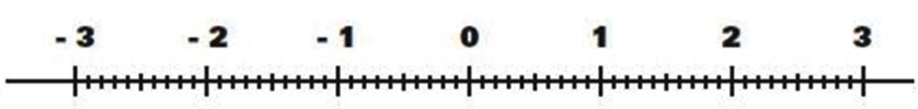
O argumento que prova que o número π é irracional é ainda mais elaborado.

Exercite o que você aprendeu com o Jogo interativo disponível em

- http://www.uff.br/cdme/edn/edn-html/edn-mba-br.html

Agora, é com você!

Na reta dada abaixo, indique a localização dos números dados e de seus simétricos:



a. 2/5

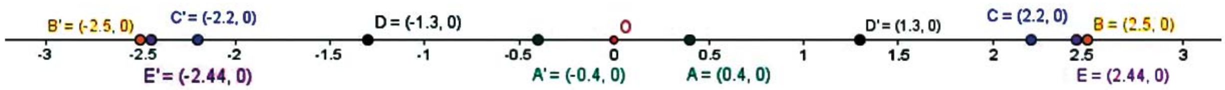
b. 5/2

c. 2,2

d. -1,3

e. $\sqrt{6}$

As respostas foram construídas da seguinte forma



Anexo: segunda Etapa

Régua: