FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA

Fundação CECIERJ – Consórcio CEDERJ

Matemática do 3º Ano – 3º Bimestre – 2014

Plano de Trabalho 1

Conjunto dos Números Complexos

Tarefa: 001 – PLANO DE TRABALHO 1

Cursista: CLÁUDIO MAGNO PAULANTI

Tutora: DANUBIA DE ARAUJO MACHADO

Curso: MATEMÁTICA_3B_3S_2014

Tarefa 001

S U M Á R I O

INTRODUÇÃO

O fato de um número negativo não ter raiz quadrada parece ter sido sempre claro para os matemáticos que se depararam com esta questão, até a concepção do modelo dos números complexos.

Um número complexo é um número $\boxed{z}$ que pode ser escrito na forma $\boxed{z = a + bi}$, em que a e b são números reais e i denota a unidade imaginária. Esta tem a propriedade $\boxed{i^2 = -1}$, sendo que $\boxed{a}$ e $\boxed{b}$ são chamados respectivamente parte real e parte imaginária de z.

O conjunto dos números complexos, denotado por $\mathbb{C}$, contém o conjunto dos números reais.

Munido de operações de adição e multiplicação obtidas por extensão das operações de mesma denominação nos números reais, adquire uma estrutura algébrica denominada corpo algebricamente fechado, sendo que esse fechamento consiste na propriedade que tem o conjunto de possuir todas as soluções de qualquer equação polinomial com coeficientes naquele mesmo conjunto (no caso, o conjunto dos complexos).

DESENVOLVIMENTO

Habilidade relacionada:

- Efetuar a adição de dois ou mais números complexos na forma algébrica;
- Efetuar a subtração de dois ou mais números complexos na forma algébrica;
- Efetuar a multiplicação de dois ou mais números complexos na forma algébrica;
- Efetuar a divisão de dois ou mais números complexos na forma algébrica.
- Calcular a potência da unidade imaginária elevado a um expoente inteiro.
- Associar um número complexo na forma z = a + bi no Plano de Gauss.

Pré-requisitos:

- Operações básicas com equações;
- Plano Cartesiano

Tempo de duração:

- 6 aulas de 50 minutos

Recursos educacionais utilizados:

- Livro didático, quadro branco.

Organização da turma:

- Individual

Objetivos:

- Identificar e conceituar a unidade imaginária.
- Identificar o conjunto dos números complexos e representar um número complexo na forma algébrica.
- Calcular expressões envolvendo as operações com números complexos na forma algébrica.
- Calcular potências de expoente inteiro da unidade imaginária.

Metodologia adotada:

INTRODUÇÃO

O conceito de número está associado com a capacidade de contar e comparar qual de dois conjuntos de entidades semelhantes é o maior. As primeiras sociedades humanas encontraram dificuldades em determinar qual de dois conjuntos era "maior" do que outro, ou para saber com precisão quantos itens formavam uma coleção de coisas. Esses problemas podem ser resolvidos com uma simples contagem. A maioria das culturas tem sistemas de contagem que atingem pelo menos centenas, algumas outras mais simples têm condições apenas de enumerar os números 1, 2 e 3 e usam o termo "muitos" para quantidades maiores.

Revisando os conjuntos numéricos:

- **Conjunto dos Números Naturais (ℕ)**: conjuntos formados pelos números inteiros positivos (acrescido do zero).
- **Conjunto dos Números Inteiros (ℤ)**: conjunto formado por todos os números inteiros.
- **Conjunto dos Números Racionais (ℚ)**: conjunto formado por todos os números que podem ser escritos na forma a/b.
- **Conjunto dos Números Reais (ℝ)**: conjunto formado pela união dos números racionais e dos números irracionais.

Buscando desafios:

Resolver as seguintes equações do 2º grau:

a) $x^2 - 2x + 2 = 0$	b) $x^2 - 6x + 13 = 0$	c) $2^2 + 4x + 10 = 0$
$\Delta = b^2 - 4.a.c$ $\Delta = (-2)^2 - 4.1.2$ $\Delta = 4 - 8$ $\Delta = -4$ A equação não possui solução dentro do conjunto dos números Reais.	$\Delta = b^2 - 4.a.c$ $\Delta = (-6)^2 - 4.1.13$ $\Delta = 36 - 52$ $\Delta = -16$ A equação não possui solução dentro do conjunto dos números Reais.	$\Delta = b^2 - 4.a.c$ $\Delta = (4)^2 - 4.2.10$ $\Delta = 16 - 80$ $\Delta = -64$ A equação não possui solução dentro do conjunto dos números Reais.

Questões que surgirão.

Ao substituir o valor de delta (negativo) na fórmula de Bhaskara, vem os pensamentos:

- Que número elevado ao quadrado resulta em -4
- Que número elevado ao quadrado resulta em -16
- Que número elevado ao quadrado resulta em -64

Dentro do Conjunto dos Números Reais não temos uma solução para essa questão.

Surge então a necessidade de termos um conjunto numérico ainda maior que os reais.

CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Um pouco de história:

O conceito de número complexo teve um desenvolvimento gradual. Começaram a ser utilizados formalmente no século XVI em fórmulas de resolução de equações de terceiro e quarto graus.

Os primeiros que conseguiram dar soluções a equações cúbicas foram Scipione del Ferro e Tartaglia. Este último, depois de ter sido alvo de muita insistência, passou os resultados que tinha obtido a Girolamo Cardano, que prometeu não divulgá-los. Cardano, depois de conferir a exatidão das resoluções de Tartaglia, não honrou sua promessa e publicou os resultados, mencionando o autor, em sua obra Ars Magna de 1545, iniciando uma enorme inimizade.

Os números complexos são utilizados em várias áreas do conhecimento, tais como engenharia, eletromagnetismo, física quântica, teoria do caos, além da própria matemática, em que são estudadas análise complexa, álgebra linear complexa, álgebra de Lie complexa, com aplicações em resolução de equações algébricas e equações diferenciais.

Apresentação:

Um número complexo se apresenta da seguinte forma

$$\mathbf{z = a + bi}$$

Onde:

z → é o número completo

a → é a parte real

b → é a parte imaginária

i → é a unidade imaginária

Relação importante:

$$i^2 = -1$$

1) Um par ordenado de números reais (x, y) é chamado de número complexo.

2) Os n^os^ complexos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

3) A adição e a multiplicação de números complexos são definidas por:

- Adição: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2\,,\ y_1 + y_2)$
- Multiplicação: $(x_1, y_1)*(x_2, y_2) = (x_1*x_2 - y_1*y_2\,,\ x_1*y_2 + y_1*x_2)$

Exemplo 1. Considere $z_1 = (3, 4)$ e $z_2 = (2, 5)$, calcule $z_1 + z_2$ e z_1*z_2.
Solução: $z_1 + z_2 = (3, 4) + (2, 5) = (3+2, 4+5) = (5, 9)$
$z_1*z_2 = (3, 4)*(2, 5) = (3*2 - 4*5, 3*5 + 4*2) = (-14, 23)$

Utilizando a terceira definição fica fácil mostrar que:
$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$ e $(x_1\,, 0)*(x_2, 0) = (x_1*x_2, 0)$

Essas igualdades mostram que no que diz respeito às operações de adição e multiplicação, os números complexos (x, y) se comportam como números reais. Nesse contexto, podemos estabelecer a seguinte relação: (x, 0) = x.

Usando essa relação e o símbolo i para representar o número complexo (0, 1), podemos escrever qualquer número complexo (x, y) da seguinte forma:

$(a, b) = (a, 0) + (0, 1)*(b, 0) = a + bi \rightarrow$ que é a chamada de forma normal de um número complexo.

Assim, o número complexo (3, 4) na forma normal fica 3 + 4i.

Exemplo 2. Escreva os seguintes números complexos na forma normal.

$(5, -3) = 5 - 3i$	$(-7, 11) = -7 + 11i$	$(2, 0) = 2 + 0i = 2$	$(0, 2) = 0 + 2i = 2i$

Observe que chamamos de i o nº complexo (0, 1). Veja agora se fizermos i^2.

Sabemos que $i = (0, 1)$ e que $i^2 = i*i$. Segue que: $i^2 = i*i = (0, 1)*(0, 1)$

Utilizando a definição 3, teremos:

$i^2 = i*i = (0, 1)*(0, 1) = (0*0 - 1*1, 0*1 + 1*0) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0)$
Como vimos anteriormente, todo número complexo da forma (x, 0) = x. Assim, $i^2 = i*i = (0, 1)*(0, 1) = (0*0 - 1*1, 0*1 + 1*0) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) = -1$.

Chegamos à famosa igualdade $\mathbf{i^2 = -1}$.

Potências da unidade imaginária “i”:

Potências de i	Justificativa	Resultado
i^1	Todo número elevado a 1 vale a base	i
i^2	Demonstrado anteriormente.	-1
i^3	$i^3 = i^1 * i^2 = i * (-1)$	-i
i^4	$i^4 = i^2 * i^2 = (-1)* (-1)$	1
i^5	$i^5 = i^2 * i^3 = (-1)* (-i)$	i
i^6	$i^6 = i^4 * i^2 = (1)* (-1)$	-1
i^7	$i^7 = i^4 * i^3 = (1)* (-i)$	-i
i^8	$i^8 = i^4 * i^4 = (1)* (1)$	1
...	...	...

Percebe-se que os resultados são cíclicos, ou seja, se repetem em grupos de quatro.

Portanto, podemos generalizar, fazendo o seguinte cálculo.

$$i^n = i^r$$

Onde:

i → é a unidade imaginária.

n → é um expoente inteiro de i.

r → é o resto da divisão de n por 4.

Como todo número no formato ...xxxxx00 (um nº qualquer terminado em 00) é divisível por quatro, para encontrar o resta da divisão de n/4, basta dividir o número formado pelos dois últimos algarismos do expoente original.

Portanto, como exemplo: $i^{1345678\underline{23}} = i^{23} = i^3 = -i$

Uma aplicação importante "$i^2 = -1$":

Como $i^2 = -1$, a raiz quadrada de -1 é a mesma raiz quadrada de i^2, que terá como resultado a unidade imaginária "i".

Lembre-se que: $\sqrt{-1} = i$

a) $\sqrt{-25} = \sqrt{-1 * 25} = \sqrt{-1} * \sqrt{25} = 5i$

b) $\sqrt{-16} = \sqrt{-1 * 16} = \sqrt{-1} * \sqrt{16} = 4i$

c) $\sqrt{-144} = \sqrt{-1 * 144} = \sqrt{-1} * \sqrt{144} = 12i$

d) $\sqrt{-81} = \sqrt{-1 * 81} = \sqrt{-1} * \sqrt{81} = 9i$

e) $\sqrt{-625} = \sqrt{-1 * 625} = \sqrt{-1} * \sqrt{625} = 25i$

Voltar nas equações do 2º grau, propostas anteriormente e resolve-las, utilizando essa relação importante.

Destacar que a solução para aquele tipo de equação existe dentro do Conjunto dos Números Complexos.

Operações elementares com números complexos:

O conjunto dos números complexos é um corpo. Portanto, é fechado sobre as operações de adição e multiplicação, além de possuir a propriedade de que todo elemento não-nulo do conjunto possui um inverso multiplicativo. Todas as operações do corpo podem ser performadas através das propriedades associativa, comutativa e distributiva, levando em consideração a identidade $i^2 = -1$.

Sejam z e w dois números complexos dados por $z = a + bi$ e $w = c + di$, então definem-se as relações e operações elementares tal como segue:

Identidade:

$z = w$ se e somente se $a = c$ e $b = d$.

Soma e subtração de números complexos

$$z + w = w + z = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Multiplicação de números complexos

$$zw = wz = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

Conjugado de um número complexo

$$\overline{z} = a - bi,$$

Soma de um complexo com seu conjugado

$$z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a.$$

Módulo de um número complexo

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

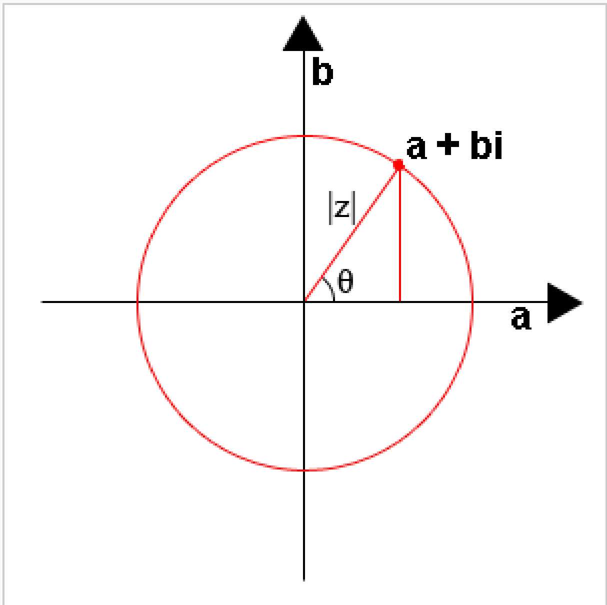
Divisão de números complexos

$$\frac{z}{w} = \frac{(a + bi).(c - di)}{(c + di).(c - di)}$$

Plano de um número complexo

O plano complexo, também chamado de Plano de Argand-Gauss ou Diagrama de Argand, é um plano cartesiano usado para representar números complexos geometricamente. Nele, a parte imaginária de um número complexo é representada pela ordenada e a parte real pela abcissa.

Desta forma um número complexo z = 3 - 5i pode ser representado através do ponto (afixo ou imagem, quando z está na forma trigonométrica) (3, -5) no plano de Argand-Gauss.



Plano de **Argand-Gauss**

A parte real, representada pela abcissa do ponto;

A parte imaginária, representada pela ordenada do ponto;

O módulo, representado pelo raio da circunferência de centro no ponto (0; 0);

O argumento, representado pelo ângulo direcionado em sentido anti-horário entre o ponto z = a + bi, o ponto (0; 0) e o eixo das abcissas

O plano de Argand-Gauss é um acessório útil, pois através dele podemos algebrizar vetores bidimensionais. Devido à semelhança entre as operações com ambos os elementos, esta algebrização é de grande utilidade em diversos campos da Matemática, Engenharia e Física.

.

EXERCÍCIOS

COLÉGIO ESTADUAL DR. MIGUEL COUTO FILHO

Exercícios de Aprendizagem – Matemática – Conjunto dos Números Complexos

ALUNO(A) ________________________ Nº ______ TURMA: _______

01) O produto (5 + 7i).(3 - 2i) vale:

02) Sendo i a unidade imaginária, o valor de $i^{10} + i^{-100}$ vale:

03) Sendo i a unidade imaginária, $(1 - i)^{-2}$ é igual a:

04) A potência $(1 - i)^{16}$ equivale a:

05) Calcule as seguintes somas:
a) (2 + 5i) + (3 + 4i) b) i + (2 - 5i)

06) Calcule as diferenças:
a) (2 + 5i) - (3 + 4i) b) (1 + i) - (1 - i)

07) Calcule os seguintes produtos:
a) (2 + 3i).(3 - 2i) b) (1 + 3i).(1 + i)

08) Escreva os simétricos dos seguintes números complexos:
a) Z = 3 + 4i b) Z = -3 + i c) Z = 1 - i d) Z = -2 – 5i

09) Escreva os conjugados dos seguintes números complexos:
a) Z = 3 + 4i b) Z = 1 - i c) Z = –3 + i d) Z = –2 –5i

10) Efetue as seguintes divisões de números complexos:
a) (-10 + 15i) / (2 – i) b) (1 + 3i) / (1 + i)

11) Calcule:
a) $(1 + i)^2$ b) $(-2 + i)^2$

12) Determine a parte real do número complexo $z = (1 + i)^{12}$.

13) Determine a parte imaginária do número complexo $z = (1 - i)^{200}$.

14) Qual o número complexo 2z, de modo que 5z + z = 12 + 6i?

15) Para que o produto (a + i).(3 - 2i) seja real, qual o valor que a deve tomar?

16) Sendo a = -4 + 3i , b = 5 - 6i e c = 4 - 3i , qual o valor de (a.c + b) ?

AVALIAÇÃO

COLÉGIO ESTADUAL DR. MIGUEL COUTO FILHO
CURSO FORMAÇÃO GERAL – MATEMÁTICA – 3ª SÉRIE
***Professor*: Cláudio Paulanti – Avaliação – 3º bimestre de 2014**
Assunto: Conjunto dos Números Complexos

Turma: _____ Aluno(a) ______________________ nº ___ Nota/Valor: ____/___

01) Considerando que $\underline{Z_1 = 2 + 8i}$, $\underline{Z_2 = -3 + 7i}$ e $\underline{Z_3 = 4 - 6i}$, calcule:

Rascunho

a) $Z_1 + Z_2 =$ _______________

b) $Z_3 + Z_2 =$ _______________

c) $Z_3 - Z_2 =$ _______________

d) $Z_1 \,.\, Z_2 =$ _______________

e) $Z_1 \,.\, Z_3 =$ _______________

f) $Z_1 / Z_2 =$ _______________

g) $|\, z_1 \,| =$ _______________

02) Calcule as potências da unidade imaginária dos números complexos:

Rascunho	$i^2 \rightarrow$
	$i^{25} \rightarrow$
	$i^{6187} \rightarrow$
	$i^{1812} \rightarrow$

03) Calcule as raízes considerando o conjunto dos números complexos:

a) $\sqrt{-100} \rightarrow$	b) $\sqrt{-256} \rightarrow$

04) Calcule ou escreva o CONJUGADO dos seguintes números complexos

a) $z = -2 + 3i \rightarrow$	b) $z = 4 - 5i \rightarrow$

05) Calcule a solução da equação do 2º grau dentro conjunto dos números complexos:

Rascunho	$x^2 - 6x + 13 = 0$
	S $\rightarrow$ { _______ ; ________}

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Endereços eletrônicos acessados de 15/08/2014 a 21/08/2014:

- http://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_complexo
- http://www.mundoeducacao.com/matematica/raiz-quadrada-um-numero-negativo.htm
- http://www.brasilescola.com/matematica/adicao-subtracao-multiplicacao-numero-complexo.htm
- http://www.somatematica.com.br/
- http://www.vestibulandia.com.br/

Livro didático utilizado pelos alunos:

- MATEMÁTICA CIÊNCIA E APLICAÇÕES, 3º Ano/Gelson IEZZI – 6ª Edição – São Paulo: Saraiva, 2010.