Reforço escolar · Matemática ·

Log Soluções

Dinâmica 4

2ª Série | 1º Bimestre

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	2ª do Ensino Médio	Algébrico simbólico	Função Logarítmica

Professor

DINÂMICA	Log Soluções
HABILIDADE PRINCIPAL	H56 – Resolver problemas que envolvam função polinomial do 1º grau.
HABILIDADES ASSOCIADAS	H59 – Resolver problemas, envolvendo a função logarítmica.
CURRÍCULO MÍNIMO	Resolver problemas significativos, utilizando a função logarítmica.

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fundação CECIERJ Consórcio cederj

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos:

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar Ideias	E como vai a confecção da Dona Giovana?	20 a 25 min	Em duplas com discussão coletiva	Individual
2	Um novo olhar...	Eu vivo sempre no mundo da lua!	15 a 20 min	Em duplas com discussão coletiva	Individual
3	Fique por dentro!	Atitude sustentável	20 a 30 min	Em duplas com discussão coletiva	Individual
4	Quiz	Quiz	10 min	Individual	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quiz	15 min	Coletiva	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou em outra ocasião e consultar o professor, se tiver dúvidas.			

Professor

Apresentação

Muitos alunos acreditam que todos os problemas que se relacionam com Matemática de alguma maneira podem ser resolvidos a partir de uma regra de três, isto é, são problemas lineares. Com o objetivo de explicitar que isso não é verdade, na primeira etapa, apresentamos uma situação-problema que pode ser modelada a partir de uma função polinomial do 1º, explorando não só a sua representação algébrica como também a sua representação gráfica. Na segunda etapa, apresentamos uma situação modelada a partir da definição de logaritmo, visando reforçar a compreensão do logaritmo como expoente. Finalmente, na etapa 3, confrontamos a função logarítmica com a função afim, onde os alunos ainda têm a oportunidade de explorar características da função logarítmica por meio de valores em uma tabela. Neste momento, pretendemos que os alunos percebam o fator constante multiplicativo na variação das abcissas e a parcela constante aditiva na variação das ordenadas.

Na etapa **Para Saber +**, apresentamos um problema de Matemática Financeira em que precisa do logaritmo para determinar a solução. Por fim, no **Agora, é com você!**, os alunos podem fixar o estudo das funções logarítmicas, bem como resolver uma situação problema como as apresentadas nesta dinâmica.

Como sempre, você terá possibilidade de fazer algumas escolhas entre usar mais ou menos tempo nas atividades aqui propostas ou enfatizar algum ponto que considere mais crucial para os seus alunos.

Bom trabalho!

Primeira Etapa
Compartilhar Ideias

25 MINUTOS

Matemática

Atividade • E como vai a confecção da Dona Giovanna?

Objetivo

Relacionar uma situação cotidiana com a função polinomial do 1º grau.

Descrição da Atividade

Professor, nesta etapa, vamos retomar o estudo da função polinomial do primeiro grau, através de uma situação-problema. Nossa ideia é que na etapa 3 dessa dinâmica, o aluno confronte que a função logarítmica possui características diferentes das abordadas nessa primeira etapa. Os alunos devem trabalhar com um problema dividido nos três questionamentos descritos a seguir:

Situação-problema

Giovanna vende roupas produzidas em uma pequena confecção em sua casa. No primeiro mês, foram produzidas 35 peças. No segundo e terceiro meses, foram produzidas, respectivamente, 42 e 49 peças.

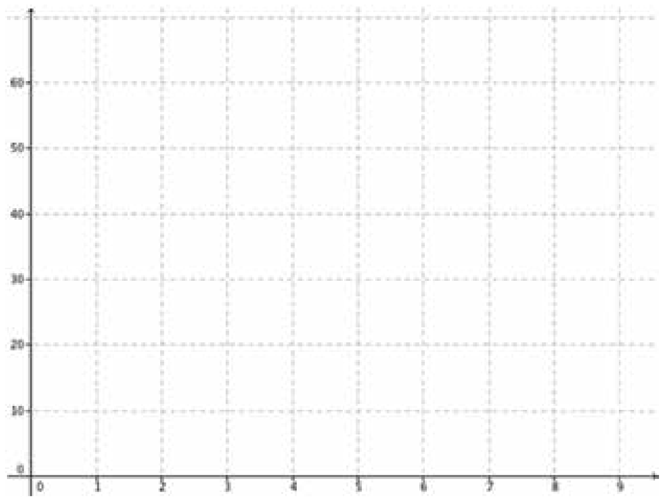
1. Sabendo que esse padrão mantém-se, preencha a tabela abaixo.

Note que a primeira coluna apresenta o mês e a segunda a quantidade de peças vendidas.

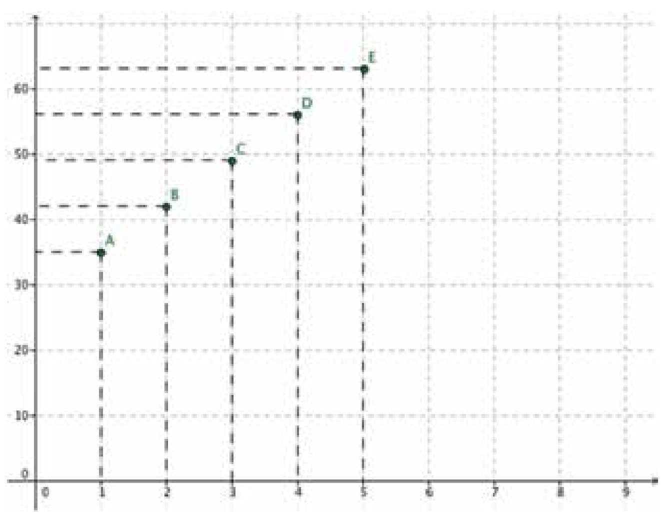
Resposta

MÊS	QUANTIDADE
1	*35*
2	*42*
3	49
4	*56*
5	*63*

2. Represente no plano cartesiano a produção de Dona Giovanna.



Resposta



3. Observando o esboço feito anteriormente, responda às perguntas a seguir.

a. Qual o comportamento dos pontos marcados no plano?

Resposta

Os pontos são colineares.

b. Você já estudou funções cujo comportamento dos pontos é como no item anterior. Como se chamam essas funções? Qual a sua representação algébrica?

Professor

Resposta

Função Polinomial do 1º grau ou Função Afim. A representação algébrica é $f(x) = ax + b$.

- **c.** Chamando de x a quantidade de meses e y a quantidade de peças produzidas, indique a lei de formação que representa a produção de Dona Giovanna.

Resposta

Há vários métodos para encontrar este tipo de função. Apresentaremos aqui o que consiste em substituir dois valores de x e y. Por exemplo, utilizando os pontos A e B, chegamos ao sistema

$$\begin{cases} a + b = 35 \\ 2a + b = 42 \end{cases}$$

cuja solução é

$$\begin{cases} a = 7 \\ b = 28 \end{cases}$$

Daí, $f(x) = 7x + 28$, *ou seja,* $y = 7x + 28$.

Recursos necessários:

- Encarte do aluno

Procedimentos Operacionais:

- *Professor, esta atividade foi planejada para que a turma esteja separada em duplas.*

- *Professor, para o item 1 é provável que os alunos não encontrem dificuldade no preenchimento da tabela. Entretanto, fique atento às duplas e oriente as que tiverem dúvidas para observar como os três primeiros meses se relacionam.*
- *Em seguida, trabalhamos com a ideia de função, nesse caso, é importante ter em mente que o domínio é muito importante no conceito de função e nesse sentido, você deve estar atento a essa sutileza quando passamos do caso discreto, item 1, para o caso contínuo, demais itens.*
- *Também é importante que os alunos percebam que este é um problema de modelagem por função e não por equação. Portanto, x é uma variável e não uma incógnita. Esta diferença vem da interpretação do problema, onde a quantidade de peças produzidas na confecção (variável dependente) depende do tempo (variável independente). Esta atividade pode ser uma oportunidade para gerar uma discussão sobre este assunto e fixar ideias.*
- *No caso do item 2, observe que a visualização fica mais simples quando se utilizam escalas diferentes nos dois eixos coordenados, dado que os valores das quantidades são muito maiores do que os dos meses. No gráfico da solução utilizamos uma escala em que as unidades no eixo das ordenadas (y) são dez vezes maiores do que no eixo das abscissas (x). Chame a atenção dos alunos com relação à escala adotada.*
- *Ainda sobre o item 2, esteja atento, pois alguns alunos costumam confundir as coordenadas ao marcar no plano cartesiano. Se necessário, faça uma pequena revisão sobre isso.*
- *No item 3, o aluno pode obter a fórmula a partir de diversas maneiras. É interessante que você explore os diferentes processos de raciocínio e valide-os, quando corretos. Alguns alunos têm habilidade para observar a variação dos pontos e determinar a fórmula, contudo, esses alunos também devem conhecer outros métodos, como, por exemplo, a determinação dos coeficientes a partir da resolução de sistemas, para os casos em que a observação seja menos intuitiva. Por isso, é interessante que ao discutir com a turma você apresente pelo menos um método diferente da resolução de sistemas, nesse caso, sugerimos que você explore a maneira pela qual os alunos da sua turma apresentam a solução.*

Segunda Etapa
Um novo olhar...

20 MINUTOS

Atividade • Eu vivo sempre no mundo da lua!

Objetivo

Interpretar uma situação-problema a partir da definição de logaritmo.

Descrição da atividade

Através da situação-problema descrita abaixo, os alunos devem utilizar a definição de logaritmo para transcrevê-la à linguagem matemática. Observe a descrição da atividade a seguir.

A seguir, você encontra um problema do vestibular da Universidade Federal do Mato Grosso (UFMT) adaptado.

Imagine um satélite que, depois de lançado através de um foguete, atinge 10 metros em 1 segundo, 100 metros de altura em 2 segundos e assim por diante. Nesse caso, o tempo (t) em segundos é sempre o logaritmo decimal da altura (h) em metros.

1. Observe a última frase da passagem acima e escreva uma fórmula que expresse o tempo em função da altura.

Resposta

A fórmula é $t = \log h$.

2. Agora, escreva uma expressão da altura em função do tempo.

Resposta

Dica: Utilize a definição de logaritmo.

$h = 10^t$.

3. Complete a tabela a seguir.

Resposta

ALTURA (*H*) EM METROS			TEMPO (*T*) EM SEGUNDOS
Potência			***Logaritmo***
10	→	10^1	1
100	→	10^2	2
1 000	→	10^3	3
10 000	→	10^4	4
100 000	→	10^5	5
1 000 000	→	10^6	6

Matemática

Recursos necessários:

- Encarte do aluno

Procedimentos Operacionais:

- *Professor, continue com a turma organizada em duplas.*

• • • • •

Intervenção Pedagógica:

Professor,

- *Oriente os alunos para que escrevam cada uma das alturas dadas como uma potência de base 10 para que possam utilizar a propriedade* $\log_a a^n = n$ *, trabalhada em dinâmicas anteriores. Tal ação favorece a compreensão do logaritmo como um expoente.*
- *Após o item 2, você pode levantar a questão de que a altura é a potência, enquanto o tempo é o logaritmo (expoente). Esse fato é importante para desenvolver o item 3.*

• • • • •

Terceira Etapa

Fique por dentro!

Atividade • Atitude Sustentável

Objetivo

Construir o gráfico de uma função logarítmica, observar suas características e encontrar a lei de formação.

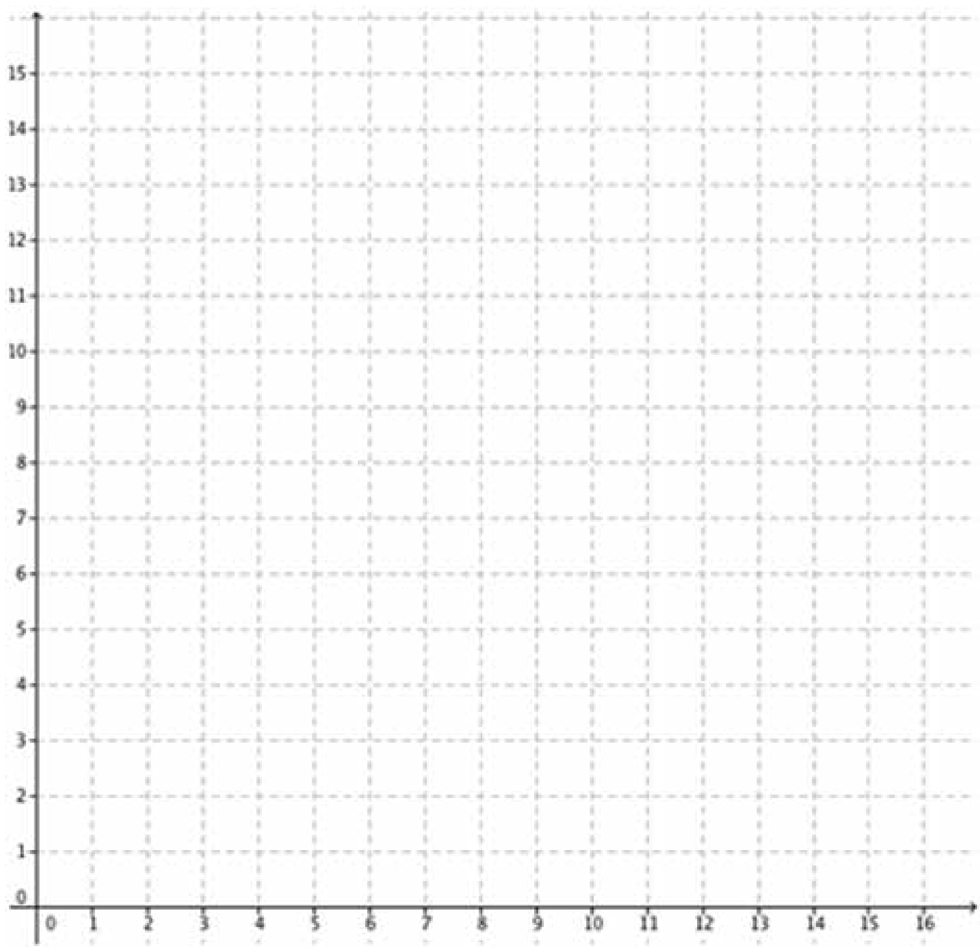
Descrição da Atividade

A proposta dessa etapa é a de explorar um problema de logaritmo que envolve a produção de papel e seu gráfico. Os alunos devem construir o gráfico através da observação de uma tabela e devem também fazer observações e extrapolações para encontrar a lei de formação. A proposta encontra-se descrita a seguir.

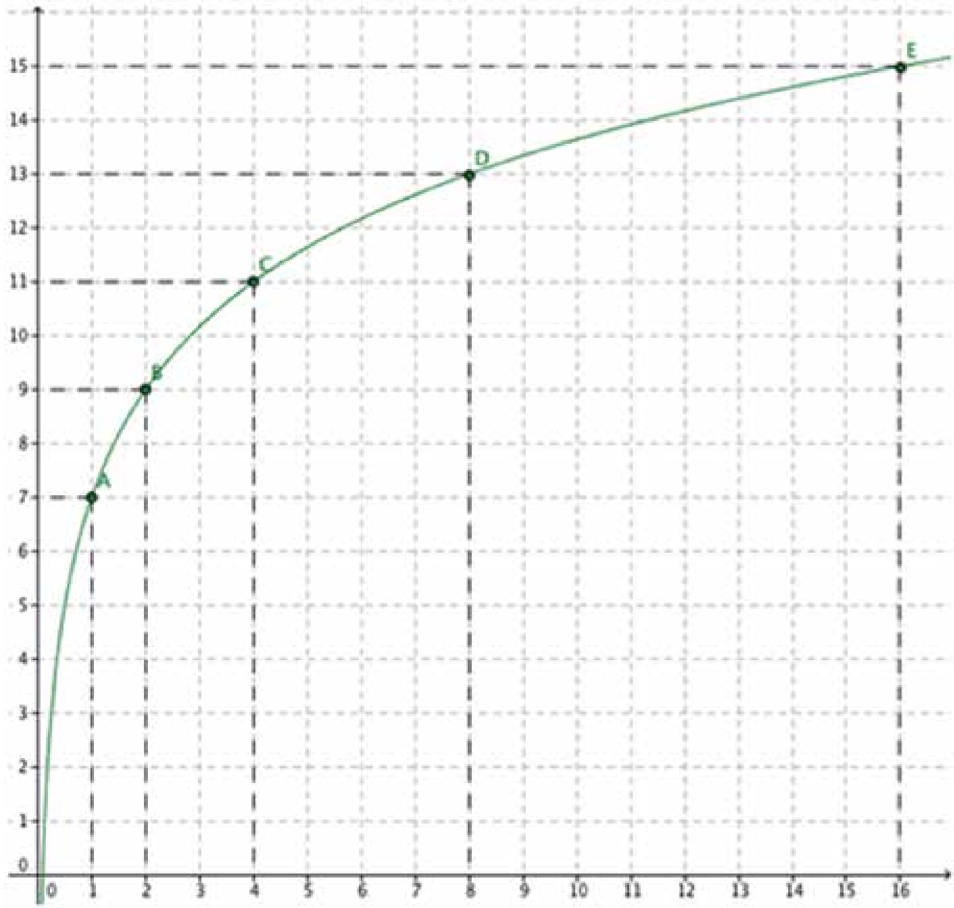
Uma empresa está investindo na plantação de árvores para a produção de papel. Um técnico agrônomo mediu o diâmetro dos troncos em diferentes intervalos de tempo, obtendo os dados da tabela a seguir:

TEMPO DE PLANTIO (MESES)	DIÂMETRO DO TRONCO (CM)
1	7
2	9
4	11
8	13
16	15

1. Utilize o plano cartesiano para marcar os pontos indicados na tabela, utilizando o eixo das abscissas para representar o tempo e o eixo das ordenadas, os diâmetros. Depois esboce uma curva que contenha todos esses pontos.



Resposta



2. Discuta as questões abaixo com seu colega.

a. Os cinco pontos indicados na tabela e representados no plano no item anterior podem pertencer a uma função da forma $f(x) = ax + b$? Por quê?

Resposta

Não. Se fosse modelado por uma função afim, os pontos seriam colineares, o que não é o caso.

b. Observando a tabela, veja o que acontece com a medida do diâmetro quando o número de meses dobra.

Resposta

Professor

Espera-se que os alunos percebam que, ao dobrar o número de meses, o diâmetro cresce 2 cm

• • • • •

c. Se esse comportamento permanecer, quantos meses serão necessários para que o tronco meça 21 cm de diâmetro?

Resposta

Prosseguindo desta maneira, com 32 meses de plantio o caule terá 17 cm, com 64 terá 19 cm e com 128 meses alcançará a marca de 21 cm.

• • • • •

d. São muitas as possibilidades de traçar a curva solicitada na questão a), mas, tendo em vista a observação feita na questão b), uma curva que passa por esses 5 pontos é o gráfico de uma função logarítmica. Considerando que a função que modela o problema proposto seja da forma $f(x) = a \times \log_2(x) + b$, utilize os dados da tabela para encontrar os valores de a e b.

Resposta

O aluno deve substituir o valor de dois pontos e encontrar a = 2 e b =7. Com isso, concluir que $f(x) = 2 \times \log_2(x) + 7$.

• • • • •

e. Utilize o resultado acima para calcular o tempo necessário para que o tronco tenha 21cm.

Resposta

Fazendo $f(x) = 21$*, encontra-se que* $\log_2(x) = 7$*. Através da definição de logaritmo podemos concluir que o tempo necessário é x = 128 meses.*

• • • • •

Recursos Necessários:

Matemática

- Encarte do aluno

Procedimentos Operacionais:

- *Professor, mantenha a organização da atividade anterior.*

Intervenção Pedagógica:

Professor:

Muitos alunos acreditam, erroneamente, que qualquer gráfico que não seja linear é uma parábola. Observe que esta atividade é uma oportunidade de mostrar que isto nem sempre é verdade. A partir de uma situação-problema específica, pode-se chegar a pontos que não pertencem nem ao modelo linear, nem ao quadrático.

Quando você concluir a atividade, você pode fazer um fechamento dos modelos estudados nas etapas 1 e 3. Através dos dados das tabelas os alunos podem perceber, por exemplo, que as duas funções são crescentes, mas que se comportam de maneira bastante diferente. As funções lineares crescem/decrescem igualmente em intervalos iguais de tempo, ao passo que as funções logarítmicas crescem/decrescem cada vez mais devagar com o avanço do tempo. Isto também pode ser utilizado para reforçar que o modelo linear não se aplica ao problema tratado nesta atividade.

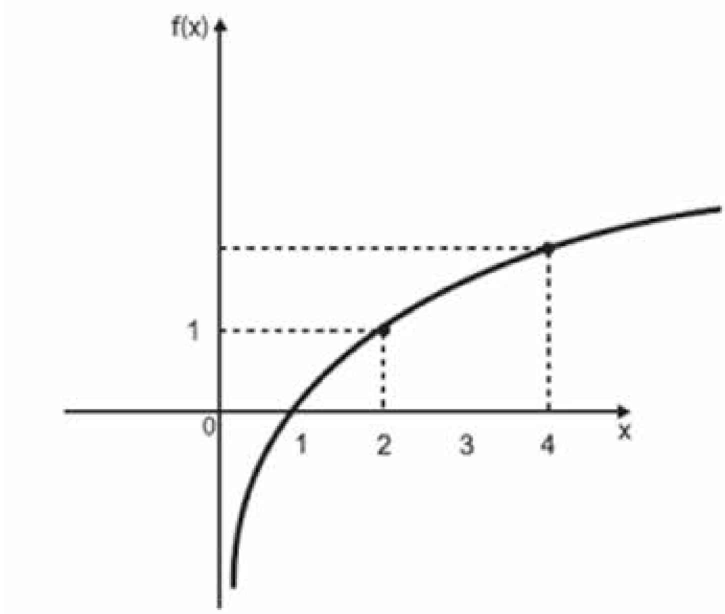
10 MINUTOS

Quarta Etapa

Quiz

SAERJINHO 2011 – Questão 22 do Caderno C1001.

Observe o gráfico abaixo que representa uma função logarítmica de base 2.



Qual é o valor de f(x) para x = 4?

a. 1

b. 2

c. 3

d. 4

e. 6

Quinta Etapa
Análise das Respostas ao QUIZ

Resposta

De acordo com o enunciado, a função será $f(x) = log_2(x)$ *. Então, se substituirmos* $x = 4$ *na função, teremos:* $f(4) = log_2(4) = 2$.

Resposta: Letra ***B****.*

Distratores:

O aluno que optou pela alternativa A possivelmente, ao observar o gráfico, pensou que deveria ter tomado o valor 2, confundindo a base 2 com o valor a ser considerado no domínio, e obtido como imagem o valor 1.

Já o aluno que optou pela alternativa C pode ter observado o valor 3 no eixo das abscissas e sem considerar o enunciado.

15 MINUTOS

Matemática

É possível que a alternativa D tenha sido escolhida pelos alunos que pensaram que   f(x) = 4 e x = 4 têm o mesmo significado.

Finalmente, o item E pode ter sido assinalado pelos alunos que somaram 2 e 4.

Etapa Flex

Para saber +

Muitas situações cotidianas podem ser modeladas utilizando o logaritmo. Os logaritmos foram inicialmente difundidos exclusivamente como instrumento para facilitar os cálculos. Nesse momento, eles eram utilizados juntamente com tabelas de logaritmos, onde encontramos os valores dos logaritmos numa determinada base. Entretanto, com o advento dos computadores e das calculadoras científicas, essa finalidade inicial perdeu a sua importância. Na situação a seguir, você vê como isso pode ser feito, utilizando uma tabela de logaritmos na base 10.

Matemática Financeira

Uma pessoa aplicou a importância de R$500,00 numa instituição bancária que paga juros mensais de 3,5%, no regime de juros compostos. A fórmula para o cálculo dos juros compostos é

$$M = C(1+i)^t$$

onde

M é o montante obtido após determinado período de tempo;

C é o capital inicial;

i é a taxa de juros (escrita na forma decimal); e

t é o tempo – nesse caso, medido em meses.

Para determinar o tempo necessário para o capital (R$500,00) transformar-se em um montante de R$3.500,00, devemos proceder da seguinte maneira.

$$3500 = 500(1+0{,}035)^t = 500 \times 1{,}035^t$$

$$1{,}035^t = \frac{3500}{500} = 7$$

Agora precisamos resolver a equação exponencial $1{,}035^t = 7$. Repare que não conseguimos escrever os dois membros da equação com uma mesma base de maneira simples. Podemos pensar em usar o logaritmo, inverso da exponencial. Utilizando a definição de logaritmo, chegamos a

$$t = \log_{1,035} 7$$

o que realmente não nos ajuda!

A estratégia, em geral, utilizada é a seguinte: como temos que $1,035^t = 7$, então os seus logaritmos também são iguais, isto é, $\log 1,035^t = \log 7$.

Sabe-se que $\log 1,035^t = t \times \log 1,035$, então,

$$\log 1,035^t = \log 7$$
$$t \times \log 1,035 = \log 7$$
$$t = \frac{\log 7}{\log 1,035}$$

Ou seja, para determinar o valor de t, basta conhecermos os valores de $\log 7$ e $\log 1,035$ e, para isso, utilizamos a tabela de logaritmos, ou uma calculadora científica.

Utilizando a calculadora científica do computador, obtemos

$$\log 7 \cong 0,845$$
$$\log 1,035 \cong 0,015$$

Assim,

$$t = \frac{\log 7}{\log 1,035} \cong \frac{0,845}{0,015} \cong 56,3$$

Sendo assim, após 57 meses com certeza a aplicação já terá R$3.500,00.

AGORA, É COM VOCÊ!

Tente resolver os exercícios abaixo para fixar o conteúdo trabalhado nesta dinâmica. Você pode pedir auxílio ao professor, se for necessário.

1. Considere a função $f(x) = \log_3 3x$. Calcule:

a. $f(1) = 1$

b. x, sabendo que $f(x) = 2$

Resposta

$log_3 3x = 2$

$\downarrow$

$x = 3$

• • • • •

2. O número de automóveis no pátio de uma montadora, *dado em milhares de unidades*, comportou-se aproximadamente, no ano de 2004, segundo a função

$N(t) = log_2(64 - 4t)$,

onde t é o número de meses contados a partir do final de dezembro de 2003, considerado na função como mês zero.

Assim, janeiro é o mês 1, fevereiro, o mês 2, e assim por diante.

Considerando os dados acima, determine:

a. O número de veículos em dezembro de 2003.

Resposta

$t = 0 \rightarrow N(0) = log_2 64 = 6$

Resposta: 6.000 automóveis.

• • • • •

b. Em que mês havia no pátio 5000 automóveis?

Resposta

$5 = log_2 (64 - 4t)$

Professor

$2^5 = 64 - 4t$

$4t = 64 - 32$

$t = 8$

Resposta: Agosto.

c. Em relação a dezembro de 2003, quantos carros a menos estarão no pátio da montadora no final de Dezembro de 2004?

Resposta

Em dez 2004, temos $t = 12$

$N = \log_2 (64 - 48)$

$N = \log_2 16 = 4$

Resposta : $6000 - 4000 = 2000$ automóveis