Patrícia Furtado da Rosa Feital da Silva

Geometria Analítica

Trabalho apresentado ao Curso de Formação Continuada
da Fundação CECIERJ – Consórcio CEDERJ.
Orientadora: Danubia de Araujo Machado (Tutora)
Grupo 2
3ª série do ensino médio – 4º bimestre.

Seropédica
2013

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por objetivo apresentar os conceitos relativos a equação da circunferência aos alunos do Curso Normal, de maneira que a construção dos conceitos, propiciem uma aprendizagem eficaz. Para iniciar, utilizarei o roteiro de ação 3 que trabalha a caracterização da circunferência, partindo de uma situação real.

Depois de definida a circunferência trabalharei com o roteiro de ação 4 que explora a construção das equações geral e reduzida.

Devido a falta de tempo do 4º bimestre este PT trata apenas da circunferência, pois preferi abordar bem um conteúdo do que passar rapidamente por vários. A relevância do roteiro 3 que trata de um assunto cotidiano me fez optar por este tema.

2. DESENVOLVIMENTO

- **Um Acidente Nuclear e a Geometria Analítica**

Pré-requisitos: Marcação de Pontos no Plano Cartesiano, ambientação com o software Geogebra.

Tempo de Duração: 100 minutos.

Recursos: Folhas para registrar as atividades, computador com Geogebra, data-show.

Organização da Turma: Os alunos em duplas.

Objetivo: Trabalhar com a caracterização da circunferência.

Descritor associado: H09 - Reconhecer o círculo ou a circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.

Metodologia: Trabalharei as atividades do roteiro de ação 3

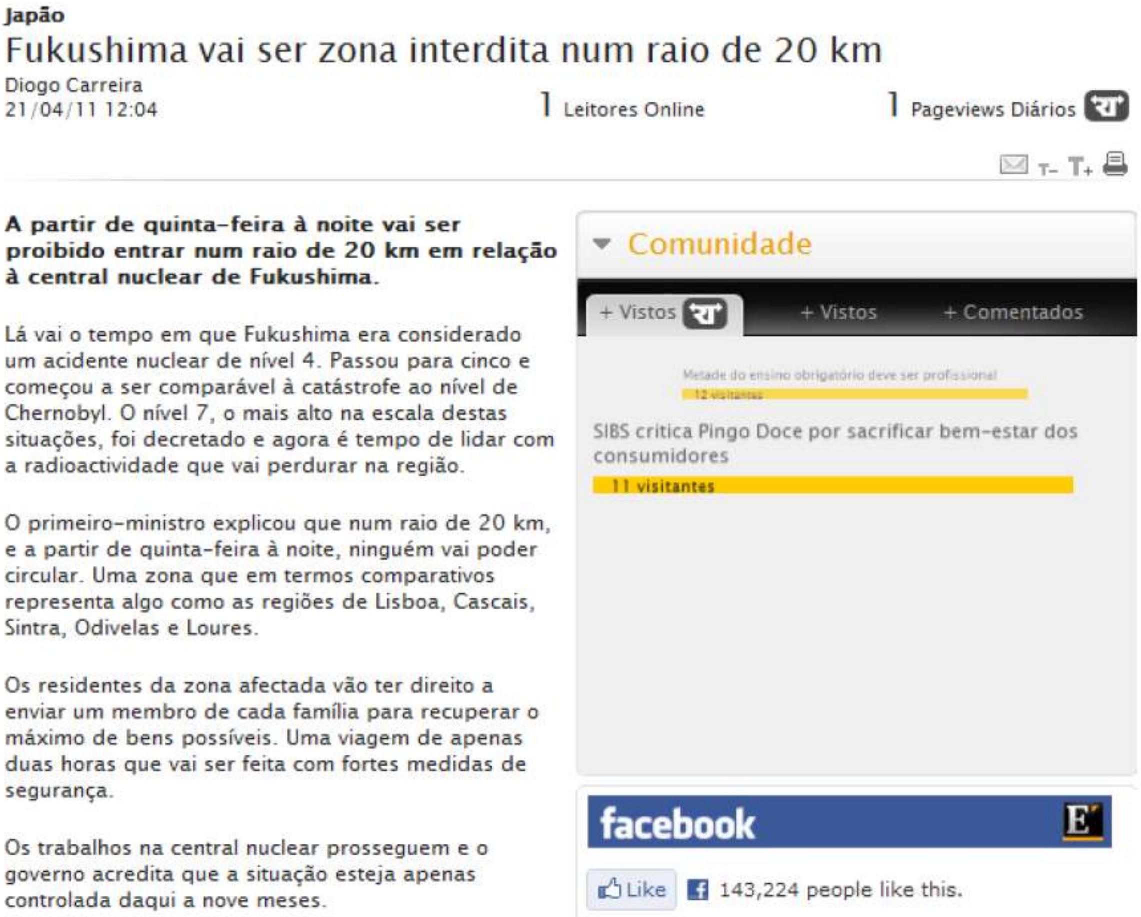
Nesse roteiro o principal objetivo é levar o aluno a compreender a circunferência enquanto conjunto de pontos que equidistam de um ponto central.

Apresentarei a reportagem:

Em março de 2011 aconteceu uma série de falhas em equipamentos na Usina Nuclear de Fukushima, Japão. As explosões dos reatores da usina assustaram o mundo.

O contato humano com alguns raios radioativos pode ter um efeito devastador. Os raios gama podem atravessar o corpo e deformar as células podendo levar a vários tipos de câncer.

A imprensa mundial repercutiu o fato e informou à população todas as medidas que deveriam ser tomadas. A reportagem abaixo, feita por um jornal de Portugal, registra que seria proibida a entrada de pessoas em um raio de 20 km com relação a Usina Central de Fukushima.



Japão

Fukushima vai ser zona interdita num raio de 20 km

Diogo Carreira
21/04/11 12:04

1 Leitores Online

1 Pageviews Diários

A partir de quinta-feira à noite vai ser proibido entrar num raio de 20 km em relação à central nuclear de Fukushima.

Lá vai o tempo em que Fukushima era considerado um acidente nuclear de nível 4. Passou para cinco e começou a ser comparável à catástrofe ao nível de Chernobyl. O nível 7, o mais alto na escala destas situações, foi decretado e agora é tempo de lidar com a radioactividade que vai perdurar na região.

O primeiro-ministro explicou que num raio de 20 km, e a partir de quinta-feira à noite, ninguém vai poder circular. Uma zona que em termos comparativos representa algo como as regiões de Lisboa, Cascais, Sintra, Odivelas e Loures.

Os residentes da zona afectada vão ter direito a enviar um membro de cada família para recuperar o máximo de bens possíveis. Uma viagem de apenas duas horas que vai ser feita com fortes medidas de segurança.

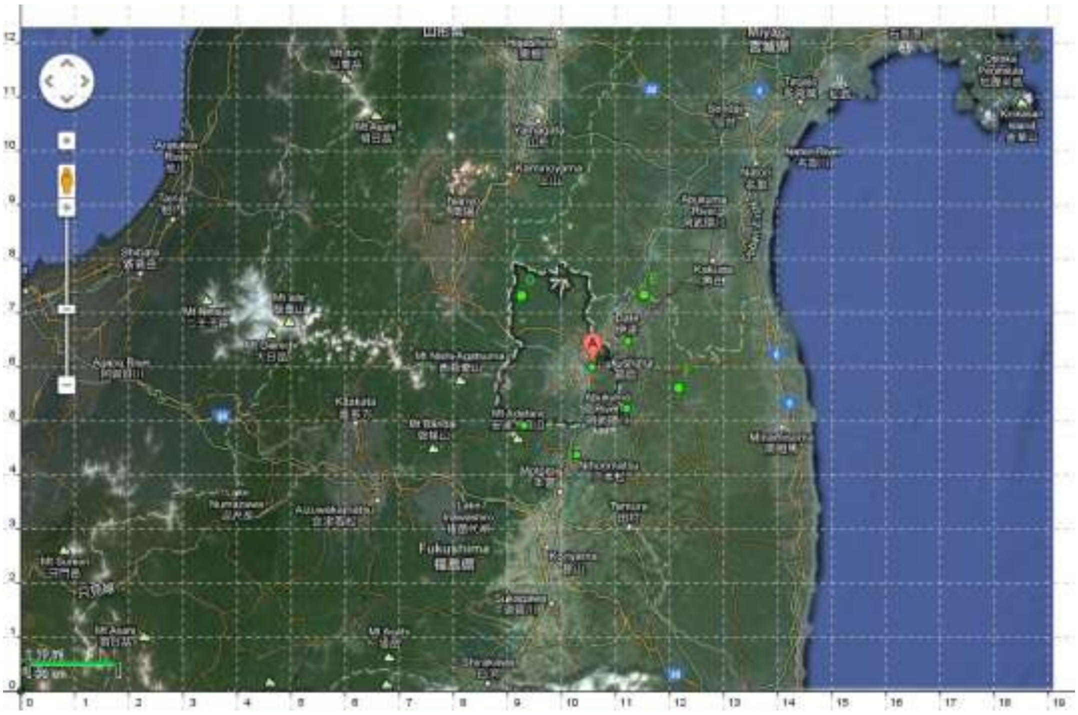
Os trabalhos na central nuclear prosseguem e o governo acredita que a situação esteja apenas controlada daqui a nove meses.

Fonte: http://economico.sapo.pt/noticias/fukushima-vai-ser-zona-interdita-num-raio-de-20-km_116535.html. Acesso em 21/08/2012.

Ao lermos a reportagem acima podemos nos perguntar:

O que significa estar em um raio de 20 km?

Observemos uma foto retirada de um satélite sobreposta a uma plano cartesiano.



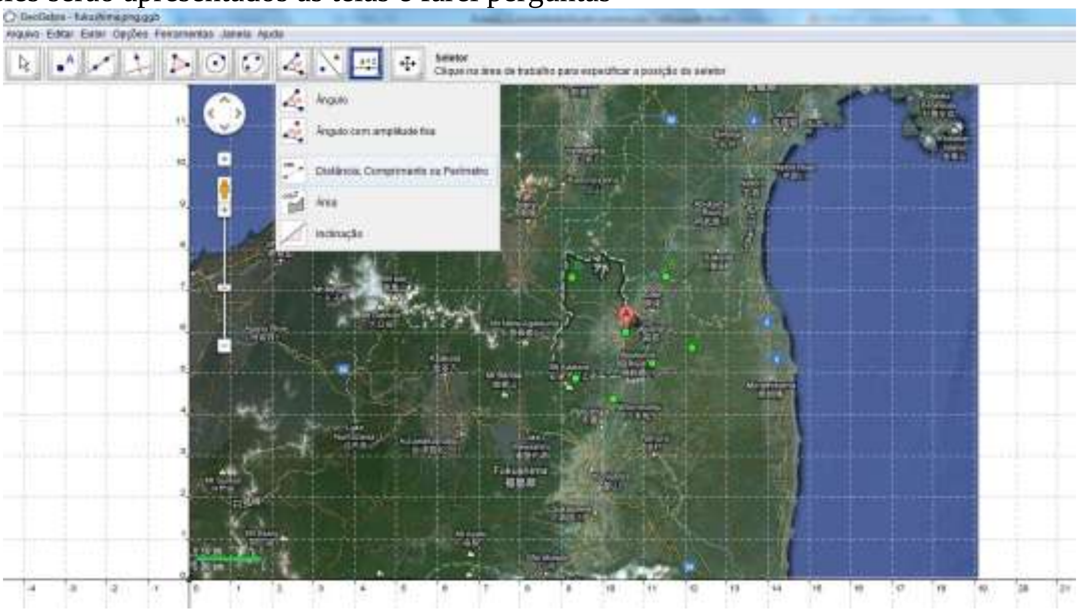
Fonte: Google Maps

- Como podemos determinar quais dos pontos assinalados no mapa não podem ser habitados, por estarem a menos de 20 quilômetros de Fukushima (ponto A)?
- Quais são os pontos que estão a exatamente 20 quilômetros de Fukushima?
- Quais são as cidades que podem ser habitados, por estarem a mais de 20 quilômetros de Fukushima?

Todas essas questões podem ser respondidas tendo a Geometria Analítica como ferramenta.

As manipulações do Geogebra serão feitas por mim num computador ligado ao data-show, pois não disponho de laboratório no momento.

Então eles serão apresentados as telas e farei perguntas



Mostrarei que a distância (BC = 1,66) está relacionando os centímetros no mapa com estão os quilômetros da realidade. Ou seja, 1,66 centímetros no mapa correspondem a 20 quilômetros de distância na realidade.

Nessa hora começarei a movimentar o cursor para que os alunos percebam as cidades que se encontram na área desejada

O aluno verá que os pontos I e J estão numa distância de 1.66 centímetros do ponto A, ou seja, as cidades de Nihonmatsu e MtAdatara estão afastadas a exatos 20 quilômetros de Fukushima).
Já o ponto G dista 2.15 centímetros de A, ou seja, MtNishiAgatsuma está a mais de 20 quilômetros de Fukushima. E a cidade de Abukuma está a menos de 20 quilômetros de distância.

Neste momento farei a seguinte pergunta:

Será que existe alguma forma geométrica que relaciona o conjunto de pontos no mapa que estão a exatamente 20 quilômetros de Fukushima e o ponto A? Discuta com seu colega.

Apresentarei uma tela em que aparecerá a marcação da figura e perguntarei:
Que figura geométrica apareceu na tela? E a mesma que você discutiu com seu colega.

Nesse momento retornaremos aos questionamentos realizados no início do texto sobre o que seria raio.

De maneira informal, podemos dizer que uma circunferência é caracterizada pelo fato de que todos os pontos que pertencem a ela tem a mesma distância até um determinado ponto (centro da circunferência).

Um conjunto de pontos do plano é chamado de Circunferência de centro (x_0, y_0) e raio r quando a distância de cada um de seus pontos ao ponto (x_0, y_0) é r.

3. AVALIAÇÃO

Os alunos serão avaliados por seu envolvimento na dinâmica da aula, participação nas discussões e seus registros;

Um problema regional e a equação da circunferência

Pré-requisitos:Marcação de Pontos no Plano Cartesiano, distância entre dois pontos e sistemas de equações do 1º grau.

Tempo de Duração: 100 minutos.

Recursos: Folhas para registrar as atividades, régua e lápis coloridos .

Organização da Turma: Os alunos serão organizados em grupos com 2 ou 3 alunos

Objetivo: Deduzir a equação da circunferência.

Descritores associados:

- H09 - Reconhecer o círculo ou a circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.

- H16 - Resolver problemas que envolvam a distância entre dois pontos no plano cartesiano.

Metodologia: Trabalharei as atividades do roteiro de ação 4

O principal objetivo desse roteiro é levar o aluno a deduzir a equação da circunferência com centro e raio definidos. Esperamos que o estudante seja capaz de identificar a equação da circunferência quando são conhecidos alguns de seus atributos.

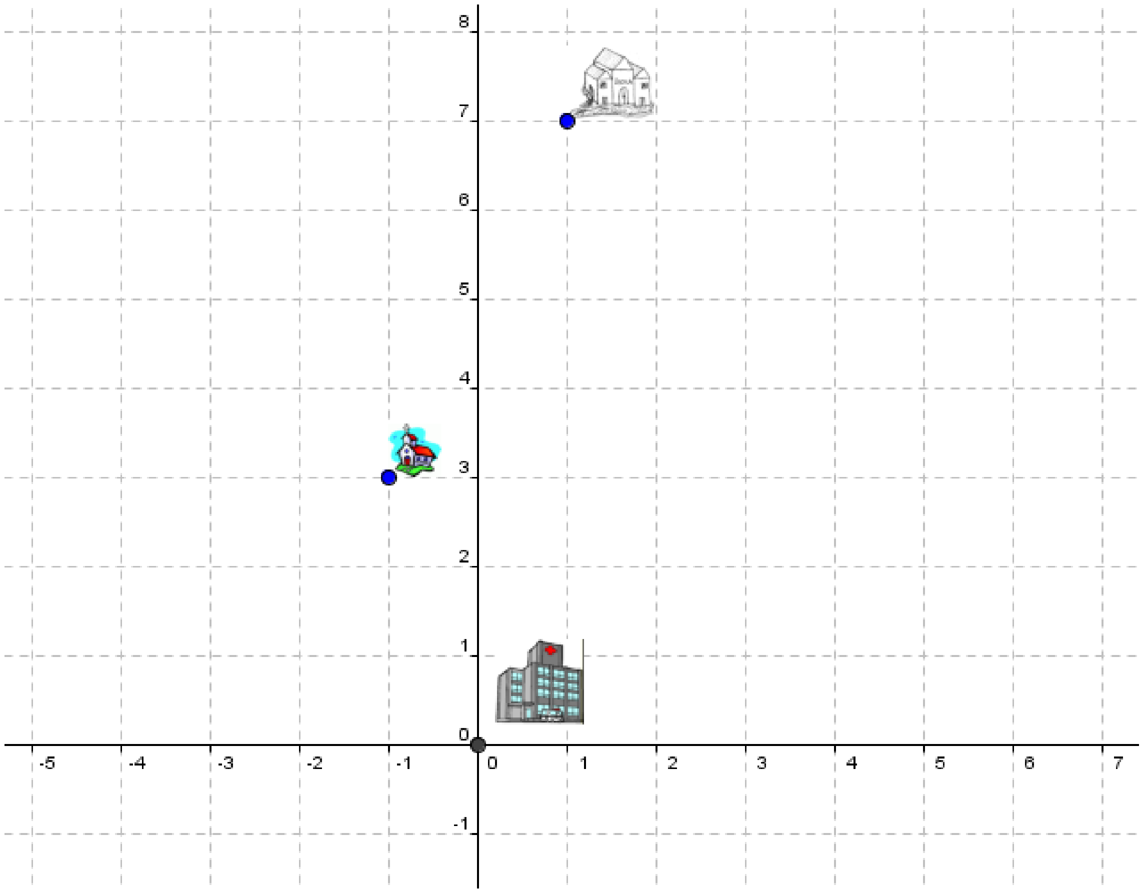
Caro aluno, no roteiro de ação anterior, vimos que, em Geometria Analítica, a circunferência é um objeto que é caracterizado por um conjunto de pontos equidistantes de um ponto específico.

Como estamos no contexto da Geometria Analítica uma questão que deve ser respondida é:

Como podemos representar algebricamente a circunferência, ou seja, qual é a equação que pode representar a circunferência?

Antes de respondermos essa pergunta vamos utilizar o que já sabemos sobre a circunferência para resolvermos o seguinte problema.

Em uma determinada cidade do interior, o hospital, a igreja e a praça principal localizam-se de tal maneira que suas respectivas representações são apresentadas no plano cartesiano como mostra a figura a seguir.



Igreja - http://revavds.blogspot.com.br/2012/01/12-dicas-aqueles-que-precisam-mudar-de.html
Hospital - http://ntmumuarama.blogspot.com.br/2011/07/dia-do-hospital.html
Escola http://acertodecontas.blog.br/artigos/a-escola-reproduz-desigualdades-sociais/
ND: Desenho feito pelo conteudista Vinicius Mendes

A Igreja encontra-se na coordenada (-1,3), a escola na coordenada (1,7) e o hospital em (0,0).O prefeito quer instalar um telefone público em um ponto cuja distância seja a mesma até a igreja, a escola e o hospital.

Para que isso aconteça, quais devem ser as coordenadas do ponto onde será instalado o telefone público?Qual será a distância do telefone até a igreja, até a escola e até o hospital?

Vamos resolver esse problema juntos?

Perceba que desejamos encontrar um ponto que tenha a mesma distância a três outros pontos dados.

1) Você tem algum palpite para a posição onde o telefone deva ser instalado? Converse com seus colegas e dê sua opinião.

2) Como não sabemos exatamente onde o telefone será instalado, ou seja, sua coordenada, considere que ele ficará no ponto (x_0, y_0). Com a simbologia para distância entre dois pontos e usando igualdades, escreva a distância entre o telefone e a igreja, o telefone e a escola e o telefone e o hospital.

Sendo o ponto (x_0, y_0) a posição do telefone, teremos que:

$$d\left((x_0, y_0),(-1,3)\right) = d\left((x_0, y_0),(1,7)\right) = d\left((x_0, y_0),(0,0)\right)$$

Se julgar necessário, faça uma breve revisão de distância entre dois pontos, apresentado no bimestre anterior, com seus alunos.

3) Utilizando o que você aprendeu no último bimestre, desenvolva algebricamente as igualdades acima e chegue até a solução do problema.

Almejamos que ele chegue a seguinte expressão matemática:

$$\sqrt{(x_0-(-1))^2+(y_0-3)^2} = \sqrt{(x_0-1)^2+(y_0-7)^2} = \sqrt{x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}}$$

Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado temos:

$$(x_0+1)^2+(y_0-3)^2 = (x_0-1)^2+(y_0-7)^2 = x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}$$

Reescrevendo as igualdades:

$$\begin{cases} (x_0+1)^2+(y_0-3)^2 = x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2} \\ (x_0-1)^2+(y_0-7)^2 = x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2} \end{cases}$$

Desenvolvendo e subtraindo os termos comuns em ambos os lados das gualdades, chegamos ao seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2x_0-6y_0=-10 \\ -2x_0-14y_0=-50 \end{cases}$$

Como a solução do sistema é $x_0=4$ e $y_0=3$, podemos concluir que o telefone público deve ser instalado no ponto $(4,3)$.

4) Agora que você já sabe onde deverá ficar o telefone, preencha a tabela abaixo:

	Telefone/Escola	Telefone/Igreja	Telefone/Hospital
Distância			

Calculando a distância entre $(4,3)$ e $(0,0)$, por exemplo, concluímos que o telefone irá distar cinco unidades dos pontos destacados. O mesmo ocorrerá para os outros pontos.

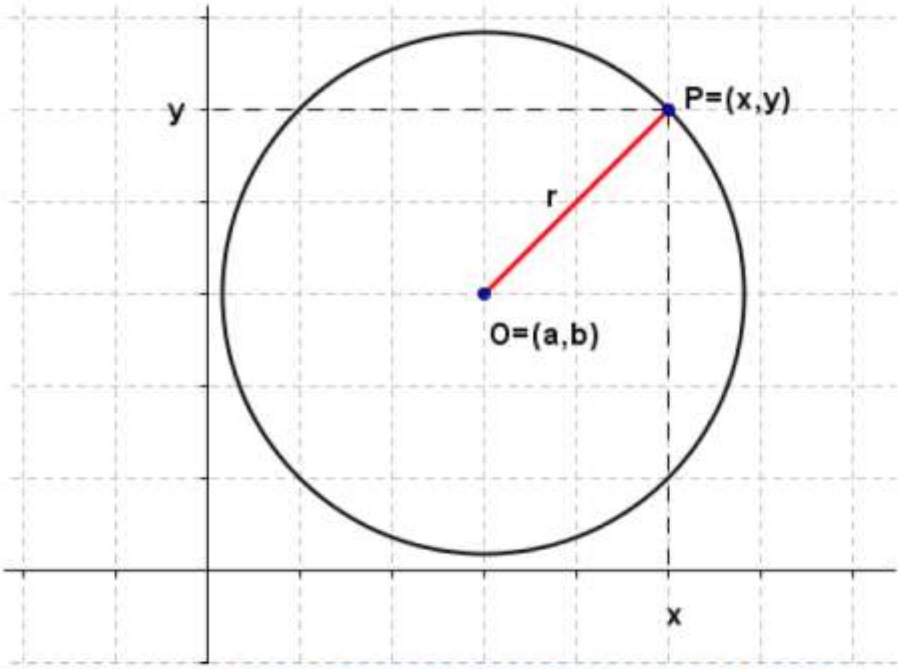
5) As distâncias encontradas são iguais? Verifique com seus colegas.

6) De que forma esse problema relaciona-se com o conceito de circunferência?

Eles poderão associar o telefone como centro da circunferência de raio 5, que é a distância deste telefone a escola, a igreja e ao hospital.

Voltando a atenção para a pergunta principal desse roteiro, procuraremos descobrir qual será a equação que representará uma circunferência.

Consideremos um determinado ponto $O = (a,b)$ e um número real r. Sabemos que qualquer ponto $P = (x,y)$ está em uma mesma circunferência se a distância entre P e O é r, ou seja, $d(P,O) = r$.



ND: Imagem feita pelo conteudista Vinicius Mendes

7) Como podemos reescrever a distância $d(P,O) = r$?

A distância $d(P,O) = r$ pode ser reescrita como

$$d(P,O) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Descobrimos então que a equação da circunferência com centro $O = (a,b)$ e raio r é:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Ela é conhecida como ***equação reduzida da circunferência***.

Qual é o significado da equação da circunferência de centro $O = (a,b)$ e raio r ser $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$?

Significa que na variação de x e y na equação, a coordenada $P=(x,y)$ irá variar também, mas a distância de $P=(x,y)$ à $O=(a,b)$ será sempre r.

Vale a pena observar que podemos desenvolver algebricamente a equação

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=x^2+2ax+a^2+y^2+2ay+b^2=r^2$$

Portanto, a equação

$$x^2+y^2+2ax+2ay+a^2+b^2-r^2=0$$

conhecida como ***equação geral da circunferência*** de centro $O=(a,b)$ e raio r, é uma outra forma de escrita.

Vamos ver se você entendeu esses aspectos sobre a equação da circunferência, preenchendo a seguinte tabela:

Centro	Raio	Equação
$O=(2,3)$	4	$(x-2)^2+(y-3)^2=$ ____________________
$O=(-1,4)$	3	__________________________________= 9
$O=(-2,-3)$	5	
		$(x-4)^2+(y+5)^2=64$
		$(x+1)^2+(y+3)^2=7$

E como será a equação reduzida da circunferência do problema do telefone? E a geral?

Os alunos obterão a equação reduzida $(x-4)^2+(y-3)^2=25$ e a equação geral $x^2-8x+16+y^2-6y+9-25=0 => x^2+y^2-8x-6y=0$

3. AVALIAÇÃO:

Os alunos serão avaliados por seu envolvimento na dinâmica da aula e participação nas discussões.

Além disso, faremos questões do livro didático e da página do Caed/Saerjinho.

Questões do Caed:

Questão 1

(PAMA11015AC) A circunferência que tem centro no ponto (-1,1) e raio 2 tem equação

A) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$

B) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$

C) $(-x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$

D) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$

E) $x^2 + (y - 1)^2 = 2$

Questão 2

(PAMA11148MS) Qual das equações abaixo representa uma circunferência?

A) $x^2 - 2y = -1$

B) $x - 2y^2 = 1$

C) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

D) $x^2 - (y + 1)^2 = -3$

E) $x + y^2 = 0$

Questão 3

(PAMA11013AC) Qual das equações abaixo representa uma circunferência?

A) $(x - 1)^2 + 2y = 1$

B) $x^2 + 2(y - 1) = 1$

C) $(x - 1)^2 + y^2 = 2$

D) $x + y = 1$

E) $x - y = 1$

Questão 4

(PAMA11150MS) Qual das equações abaixo representa uma circunferência?

A) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = -1$

B) $x^2 + y = 2$

C) $x - y^2 = 1$

D) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

E) $x - y = 2$

Questões do livro didático:

1. Determine a equação reduzida da circunferência que tem raio r e centro C, em cada caso:

a. r = 3 e C (3, 3)
b. r = 1 e C (1, -1)
c. r = 2 e C (-3, -2)
d. r = 3 e C (0, 0)

2. Calcule o raio e o centro das circunferências com as seguintes equações reduzidas:

a. $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 25$
b. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$
c. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$
d. $x^2 + y^2 = 16$

3. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BARRETO FILHO, Benigno e SILVA, Cláudio Xavier da. Matemática Aula por Aula. São Paulo: FTD, 2003.

- Roteiros de Ação 3 e 4 – Geometria Analítica 3ª série | 4º Bimestre | 2º Campo Conceitual. Disponível em: http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=130#tit01_c2 Acesso em: 03 nov 2013.

- CAED/SAERJINHO. Avaliação Diagnóstica 3º Bimestre - Língua Portuguesa e Matemática. 3ª série do Ensino Médio. 2012.

- CAED/SAERJINHO, banco de questões da Seeduc. Disponível em: http://www.saerjinho.caedufjf.net/diagnostica/paginas/protegidas/prova/configurarProva.faces Acesso em : 03 nov 2013.