FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO CECIERJ/ CONSÓRCIO CEDERJ

Matemática 2ª série – 3º Bimestre/2014

PLANO DE TRABALHO

Matrizes e Determinantes

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

Acesso em 19.08.14. http://fatosmatematicos.blogspot.com.

Tarefa 1

CURSISTA: Vandete Freire de Souza
ESCOLA: C.E.Rui Guimarães de Almeida/ CERGA/ S.A.Pádua
TUTORA: Susi Cristine Britto Ferreira

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O estudo das matrizes e dos determinantes surgiu com o estudo de sistemas de equações lineares. Um dos registros mais antigos dos sistemas lineares são as tabuletas de argila dos babilônios (300 a.C). No livro Nove Capítulos sobre a Arte Matemática (China: 200 a.C. e 100 a.C.) aparecem problemas envolvendo sistemas.

A teoria das matrizes foi consolidada no século XIX tendo grande aplicação em Matemática e Física e abrange vários aspectos, inclusive o campo da computação. As matrizes são tabelas retangulares de números reais com uma quantidade determinada de linhas e colunas.

A ideia de determinante surgiu simultaneamente na Alemanha e no Japão. Leibnitz (1649 –1716), em uma carta escrita para L'Hopital (1661 – 1704), sugeria utilizar combinações de coeficientes para resolver sistemas. Seki Kowa (1642 – 1708), no Japão, escreveu um livro apresentando sistemas lineares sob a forma matricial, sendo considerado o primeiro matemático a calcular determinantes.

O escocês Maclaurin (1698 – 1746) também faz parte da história relacionada ao estudo de determinantes, acredita-se que foi ele quem descobriu a conhecida Regra de Cramer. O suíço Gabriel Cramer (1704 – 1752) chegou à regra ao estudar problemas para determinar os coeficientes da cônica geral. O francês Bézout (1730 – 1783) sistematizou o processo de estabelecimento dos sinais dos termos de um determinante. Coube ao francês Vandermonde (1735 – 1796) a primeira abordagem da teoria dos determinantes independente do estudo de sistemas lineares. O termo determinante surgiu em 1812 com seu sentido atual num trabalho do francês Cauchy (1789 – 1857).

DESENVOLVIMENTO

OBJETIVOS

- Representar e interpretar uma tabela de números como uma matriz, identificando seus elementos.
- Interpretar e realizar cálculos com matrizes.
- Utilizar a linguagem matricial e as operações com matrizes como instrumentos para interpretar dados, relações e equações.
- Calcular o determinante de uma matriz.

METODOLOGIA

O tema central deste projeto é a compreensão dos conhecimentos relacionados com o estudo das Matrizes e dos Determinantes. Serão desenvolvidas várias atividades que possibilitarão o entendimento dos conceitos relativos ao conteúdo em estudo. O plano teve inspiração nos roteiros 1 e 2.

HABILIDADES RELACIONADAS

- Identificar e representar os diferentes tipos de matrizes.
- Efetuar cálculos envolvendo as operações com matrizes.
- Resolver problemas utilizando as operações com matrizes e a linguagem matricial.
- Calcular o determinante de matrizes quadradas de ordem 2 e 3.

PRÉ-REQUISITOS

- Saber operar com números com sinais.
- Fazer uso de tabelas.

Tempo de Duração: 10 horas-aula

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

A atividade será desenvolvida com os alunos organizados em duplas.

1) Os alunos serão divididos em duplas.
2) Cada dupla receberá uma folha com as atividades sugeridas.
3) De acordo com a orientação da professora deverão realizar as atividades e responder aos questionamentos feitos.

1ª Atividade – Jogando Dominó: uma nova maneira de estudar determinantes.

DETERMINÓ – VER ANEXO

Como o próprio nome já indica: um jogo de dominó em que no lugar dos números são colocados determinantes.

- Jogadores – 2,3 ou 4
- Peças - 28 peças com lados contendo determinantes que devem ser calculados antes do início do jogo.
- Distribuição - 7 peças para cada participante (podendo ficar peças na mesa para serem compradas, se houver menos de 4 jogadores).
- Objetivo – Estudar determinantes de maneira lúdica.

Definições

- Peça do dominó - é uma peça composta por duas pontas, cada uma com um determinante para ser calculado.
- Encaixar peça - quando uma peça é colocada ao lado de outra que tem pelo menos um número em comum (exemplo: 2-5 encaixa com 5-6).
- Extremidades do jogo - são as peças livres da ponta, cujos lados estão em aberto para que outras peças sejam encaixadas.
- Passar a vez - quando o jogador não tem nenhuma peça que encaixe em qualquer extremidade.
- Jogo trancado - quando nenhum jogador possui alguma peça que encaixe em qualquer extremidade.
- Trancar o jogo - quando um jogador joga uma peça que cause o trancamento do jogo.
- Bater o jogo - quando um dos jogadores consegue ficar sem peças na mão, tendo encaixado todas elas.

O Jogo

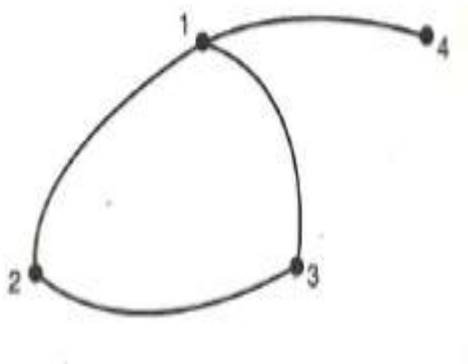
As peças são "embaralhadas" na mesa, e cada jogador pega 7 peças para jogar. O jogador que começa a partida é o que tem a peça 6-6. É necessário calcular os determinantes para descobrir quem irá começar. Ele inicia a partida colocando essa peça no centro da mesa. A partir daí, joga-se no sentido anti-horário. Cada jogador deve tentar encaixar alguma peça sua nas peças que estão na extremidade do jogo, uma por vez. Quando um jogador consegue encaixar uma peça, a vez é passada para o próximo jogador. Caso o jogador não tenha nenhuma peça que encaixe em qualquer lado, ele deve passar a vez, sem jogar peça nenhuma. A partida pode terminar em duas circunstâncias: quando um jogador consegue bater o jogo, ou quando o jogo fica trancado.

Os alunos serão questionados sobre as propriedades dos determinantes. Serão desafiados a descobrir uma maneira mais eficiente de calcular os determinantes aplicando as propriedades.

Os dominós foram elaborados por mim e depois digitalizados.

2ª Atividade – Matrizes e Grafos

Associe uma matriz 4 x 4 à figura abaixo de modo que $a_{ij} = 1$, se os pontos i e j estiverem ligados, e $a_{ij} = 0$ se os pontos não estiverem ligados.

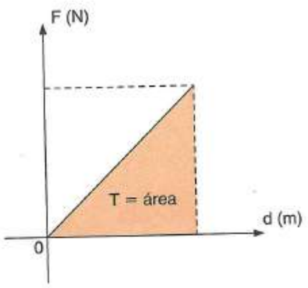


Com a atividade pretende-se falar da importância dos grafos nas redes de comunicação, fluxos em rede de transportes, mapas geográficos, etc.

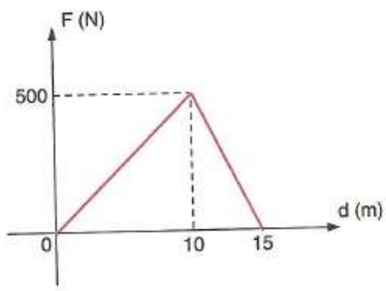
3ª Atividade – Uso do determinante para analisar fenômenos científicos

Algumas palavras adquirem, no dia a dia, significados diferentes daqueles reconhecidos cientificamente. É o caso da palavra “trabalho”, usada frequentemente em expressões como: “Ele foi para o trabalho”. Numa linguagem científica formal, o emprego da palavra “trabalho” é feito em situações como a descrita a seguir.

Quando a força F age na mesma direção do deslocamento de um corpo, dizemos que essa força realiza um trabalho T sobre esse corpo. O valor desse trabalho pode ser obtido multiplicando-se o módulo da força F pelo valor do deslocamento d sofrido pelo corpo. No gráfico, o trabalho é numericamente igual à área do triângulo formado, que representa a variação da força em função do deslocamento.



A força que age em um determinado corpo, produzindo um deslocamento, está representada no gráfico a seguir.



Faça uso do determinante e calcule o trabalho, em joule (J), realizado pela força F

i) durante o deslocamento de 0 a 10 metros.

ii) durante o deslocamento de 10 a 15 metros.

$$S = \frac{1}{2}|D| \qquad D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

4ª Atividade – O uso das matrizes para avaliar e interagir com fenômenos ambientais

O destino mais adequado que deve ser dado ao lixo continua sendo um desafio, principalmente para os moradores de cidades. Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE – em torno de metade dos municípios brasileiros (50,8 %) despejam resíduos sólidos em vazadouros a céu aberto, mais conhecido como lixões. Acesso em 22.8.14.

http://www.estadao.com.br/noticias.

Alguns municípios tentam amenizar o problema com a construção de aterros sanitários. A coleta seletiva de lixo é uma das alternativas que amenizam o impacto ambiental, gerando emprego e renda.

Os alunos farão a atividade abaixo **individualmente**.

Foi realizada uma pesquisa com 100 moradores do Bairro A para saber sobre o lixo gerado.

Tipos de Lixo

Jogam sem critério	Lata de alumínio	Plástico	Papel e papelão	Vidro	Lixo orgânico
Nunca	74	68	56	48	8
Sempre	24	25	34	33	77
Esporadicamente	2	7	10	19	15

I- Cada pessoa entrevistada produz, aproximadamente, por semana, a quantidade de lixo representada na tabela abaixo.

Lixo produzido por semana

Tipo de Lixo	Quantidade (em kg)
Lata de alumínio	0,5
Plástico	1
Papel e papelão	3
Vidro	2
Orgânico	8

Analisando as tabelas anteriores e fazendo uso da **multiplicação de matrizes**, determine a quantidade aproximada de lixo produzida, durante uma semana, pelos moradores que

i) nunca jogam lixo sem critério.

ii) sempre jogam lixo sem critério.

iii) esporadicamente jogam lixo sem critério.

II- É possível resolver a questão anterior sem fazer uso da multiplicação de matrizes? Justifique.

5ª Atividade – Formalizando os conhecimentos adquiridos

Cada aluno deverá fazer o registro em seu caderno dos conhecimentos adquiridos durante as atividades, sob a orientação da professora e com sugestões dos colegas.

AVALIAÇÃO

Os alunos serão avaliados no decorrer das atividades levando em consideração os objetivos propostos.

Em aulas posteriores será feita uma avaliação formalizada para saber se os conteúdos trabalhados foram consolidados, levando em conta, principalmente, os descritores:

- H32 – Calcular o determinante de matrizes quadradas de ordem 2 ou 3.
- H33 – Efetuar cálculos envolvendo as operações com matrizes.

QUESTÕES PROPOSTAS

1- Observe a matriz M abaixo.

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

A matriz $M^2 = M \times M$ é

A) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

2-

Observe as matrizes M e N abaixo.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

A matriz P = M x N é

A) $\begin{bmatrix} -1 & 13 \\ -3 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 3 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 13 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 7 & 7 & 3 \end{bmatrix}$

3-

Observe a matriz P abaixo.

$$P = \begin{bmatrix} x & 0 & y \\ z & 1 & w \\ x & 0 & y \end{bmatrix}$$

O valor do determinante dessa matriz é

A) 0

B) 2xy

C) zw

D) $x^2z + y^2w$

E) x^2y^2zw

4-

Observe abaixo a matriz M.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

O valor do determinante dessa matriz é

A) – 27
B) – 5
C) 5
D) 23
E) 27

5-

Considere as matrizes M e N indicadas abaixo.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

A soma dos determinantes dessas matrizes é

A) – 20
B) – 4
C) 17
D) 19
E) 20

6-

Considere as matrizes M e N indicadas abaixo.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz Q = M – N é

A) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & -1 \\ 6 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática. V. único. São Paulo: Ática, 2005.

IEZZI, Gelson. et all. Fundamentos de Matemática Elementar: trigonometria. V. 3. São Paulo: Atual, 1993.

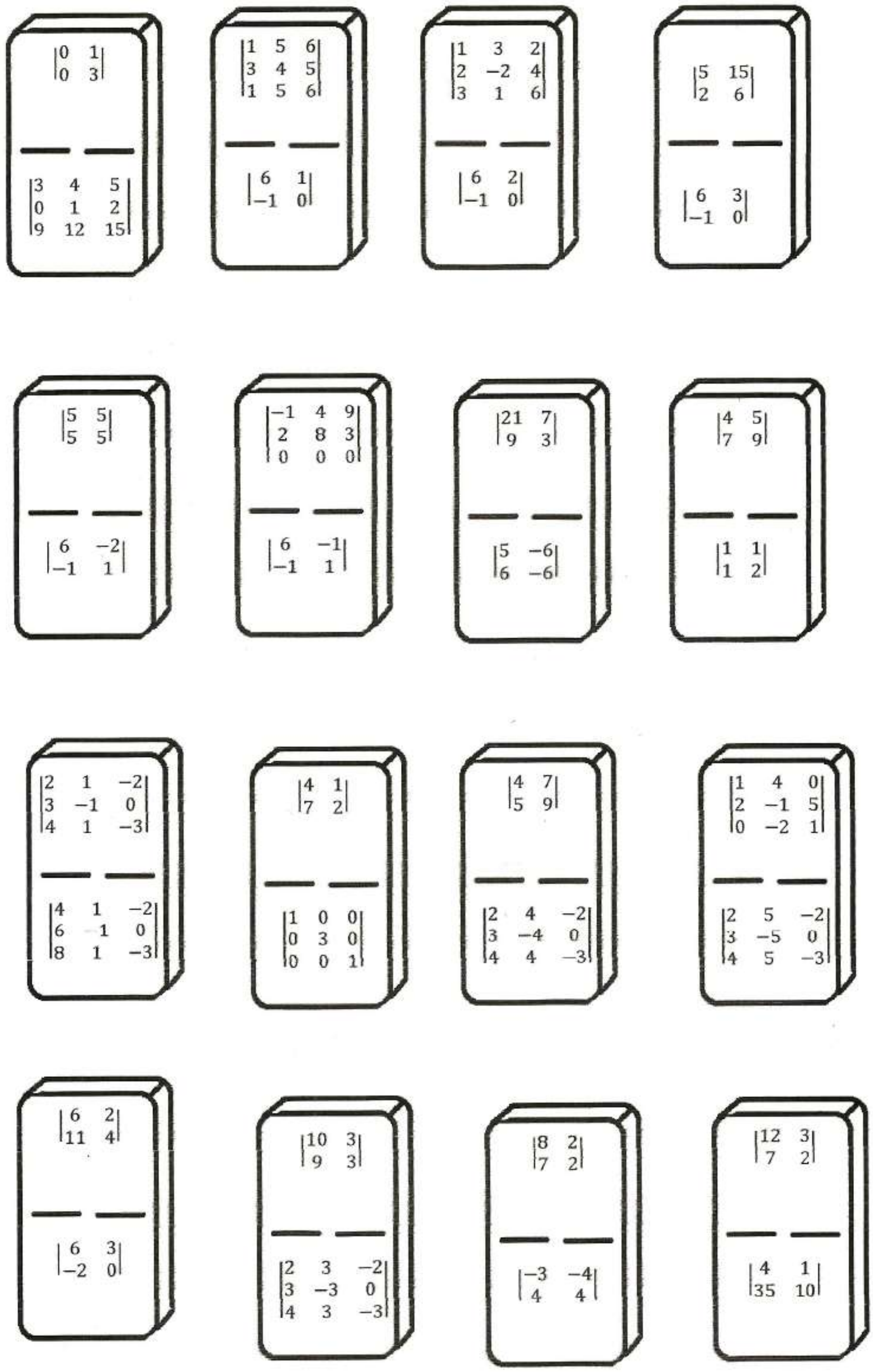
LIMA, Elon Lages et all. A Matemática do Ensino Médio. V 3. 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

PCNEM. Parâmetros Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 1999.

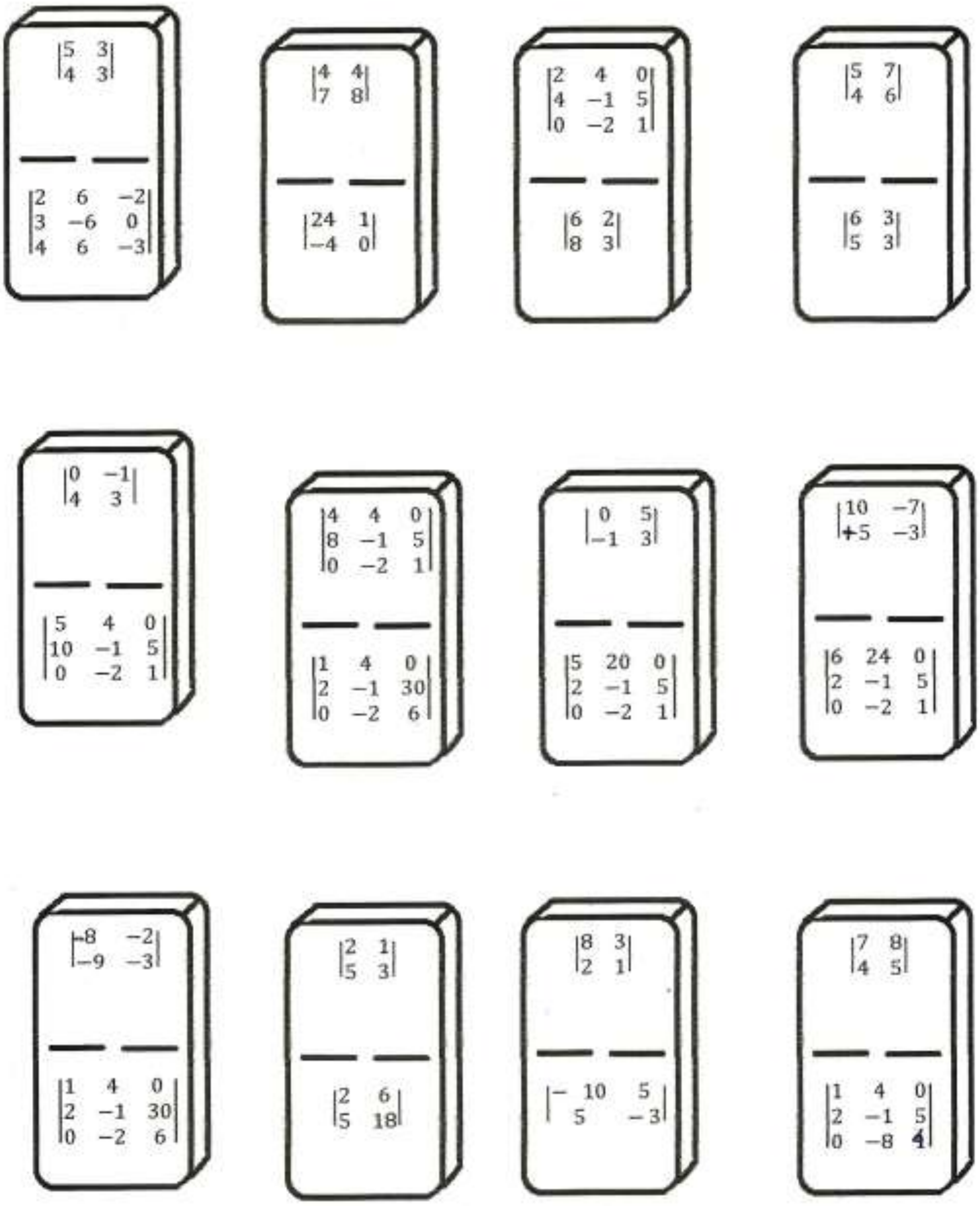
SILVA, Cláudio Xavier da; BARRETO FILHO, Benigno. Matemática Aula por Aula. 2 ed. São Paulo: 2005.

SMOLE, Katia C.Stocco; DINIZ, Maria Ignez de S.Vieira . Matemática Ensino Médio. V 1. 5 ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

ANEXO



$\begin{vmatrix}0 & 1\\0 & 3\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}3 & 4 & 5\\0 & 1 & 2\\9 & 12 & 15\end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix}1 & 5 & 6\\3 & 4 & 5\\1 & 5 & 6\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}6 & 1\\-1 & 0\end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\2 & -2 & 4\\3 & 1 & 6\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}6 & 2\\-1 & 0\end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix}5 & 15\\2 & 6\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}6 & 3\\-1 & 0\end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix}5 & 5\\5 & 5\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}6 & -2\\-1 & 1\end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix}-1 & 4 & 9\\2 & 8 & 3\\0 & 0 & 0\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}6 & -1\\-1 & 1\end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix}21 & 7\\9 & 3\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}5 & -6\\6 & -6\end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix}4 & 5\\7 & 9\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix}2 & 1 & -2\\3 & -1 & 0\\4 & 1 & -3\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}4 & 1 & -2\\6 & -1 & 0\\8 & 1 & -3\end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix}4 & 1\\7 & 2\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix}4 & 7\\5 & 9\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}2 & 4 & -2\\3 & -4 & 0\\4 & 4 & -3\end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix}1 & 4 & 0\\2 & -1 & 5\\0 & -2 & 1\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}2 & 5 & -2\\3 & -5 & 0\\4 & 5 & -3\end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix}6 & 2\\11 & 4\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}6 & 3\\-2 & 0\end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix}10 & 3\\9 & 3\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}2 & 3 & -2\\3 & -3 & 0\\4 & 3 & -3\end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix}8 & 2\\7 & 2\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}-3 & -4\\4 & 4\end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix}12 & 3\\7 & 2\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}4 & 1\\35 & 10\end{vmatrix}$



$\begin{vmatrix}5&3\\4&3\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}2&6&-2\\3&-6&0\\4&6&-3\end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix}4&4\\7&8\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}24&1\\-4&0\end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix}2&4&0\\4&-1&5\\0&-2&1\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}6&2\\8&3\end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix}5&7\\4&6\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}6&3\\5&3\end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix}0&-1\\4&3\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}5&4&0\\10&-1&5\\0&-2&1\end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix}4&4&0\\8&-1&5\\0&-2&1\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}1&4&0\\2&-1&30\\0&-2&6\end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix}0&5\\-1&3\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}5&20&0\\2&-1&5\\0&-2&1\end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix}10&-7\\+5&-3\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}6&24&0\\2&-1&5\\0&-2&1\end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix}-8&-2\\-9&-3\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}1&4&0\\2&-1&30\\0&-2&6\end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix}2&1\\5&3\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}2&6\\5&18\end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix}8&3\\2&1\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}-10&5\\5&-3\end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix}7&8\\4&5\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}1&4&0\\2&-1&5\\0&-8&4\end{vmatrix}$