Formação Continuada Nova EJA

Educação para Jovens e Adultos

Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ

Matemática e suas Tecnologia – 3º bimestre – Módulo 3 - Unidade 1

Plano de Ação - PA 1

Campo Conceitual: **Unidade 1: Introdução a Geometria Espacial**
Unidade 2: Regularidades Numéricas sequências e progressões

Tutor: Maria Elizabete de Lima Fernandes Borges

Cursista: Luiz Carlos Ferreira

Regional: Metropolitana IV

Sumário

Introdução

Abordagem:

Dar uma visão geral aos alunos dos objetivos destacados neste módulo, de forma a facilitar o trabalho pedagógico para a execução desse plano de ação.

Objetivo:

Ao final desta tarefa , o aluno deverá ser capaz entender o conceito de dimensão; entender os conceitos básicos de ponto, reta e plano; identificar posições relativas entre pontos, retas e planos; identificar poliedros e não poliedros; identificar os elementos de um poliedro; e aplicar a relação de Euler, bem como a compreensão e utilização das, habilidades e competências com uma abordagem contextualizada e participativa, que ele possa ter a compreensão da importância do estudo sólidos geométricos. Bem como, Identificar sequências numéricas e obter, quando existir, a expressão algébrica do seu termo geral;.Utilizar o conceito de sequência numérica para resolver problemas;.Diferenciar Progressão Aritmética (P.A.) de Progressão Geométrica(P.G.);
..Utilizar as fórmulas do termo geral e da soma dos termos da P.A. e da P.G. na resolução de problemas.

,

Pré requisitos:

Apresentar conceitos básicos que deverão dar idéias de grupos, entre outros pré requisitos, de forma contextualizada, que fique claro para os alunos a necessidade para compreensão dos novos conteúdos abordados na unidade do material do aluno.

Desenvolvimento

No Desenvolvimento das atividades propostas será utilizado o livro indicado, bem como as atividade propostas nas atividades extras do módulo III.

1 - Atividades Propostas:

Conteúdo Programático - 40 minutos.

Geometria espacial: conceitos básicos
Postulados

São afirmações aceitas sem demonstração. Relacio-nam as noções primitivas de ponto, reta e plano.

Postulado de Existência
Numa reta e num plano existem infinitos pontos *(dentro e fora dele).*

Postulados de Determinação
Dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles;
Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles.

Postulado da Inclusão
Se uma reta tem 2 pontos distintos num plano, então ela está contida no plano.

Postulado das Paralelas
Por um ponto passa uma única reta paralela a uma reta dada.

Breve introdução dos conceitos básicos da Geometria

1. Ponto
2. Reta
3. Plano
4. Espaço.

Ponto e reta, ponto e plano

Determinação de Planos
Um plano pode ser determinado de quatro modos:

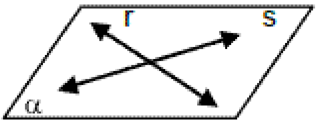
- por 3 pontos não colineares;

- por uma reta e um ponto fora dela;
- por 2 retas concorrentes;
- por 2 retas paralelas distintas.

Posições relativas entre retas
Podem ser concorrentes, paralelas ou reversas.

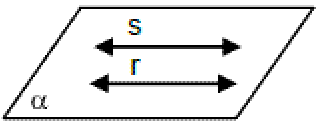
a) Concorrentes: duas retas distintas são concorrentes se, e somente se, tiver um único ponto comum.

$r \cap s = \{P\}$



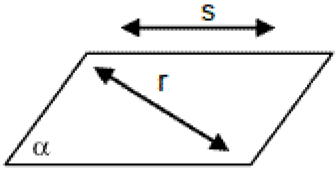
b) Paralelas: duas retas distintas são paralelas se, e somente se, forem coplanares e não tiverem ponto comum.

$r \cap s = \varnothing$



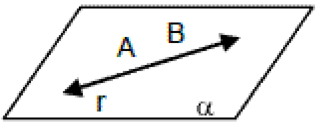
c) Reversas: duas retas distintas são reversas se, e somente se não existe plano que as contenha.

$r \cap s = \varnothing$



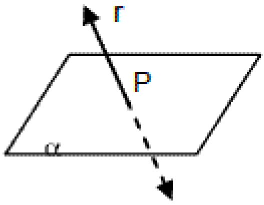
Posições relativas entre reta e plano
Pode a reta estar contida, ser secante ou ser paralela com o plano.

a) Contida: Se, e somente se garantirmos que pelo menos dois pontos da reta estejam no plano.



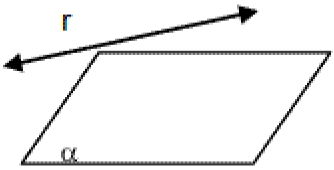
$r \subset \alpha$
$r \cap \alpha = r$

b) Concorrentes ou secantes: Se, e somente se, têm um único ponto comum.



$r \cap \alpha = \{P\}$

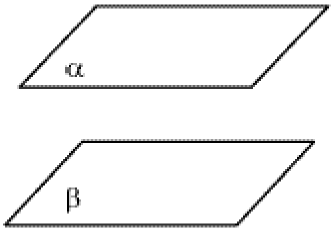
c) Paralelas: Se, e somente se, não tiverem ponto comum.



$r // \alpha \rightarrow r \cap \alpha = \varnothing$

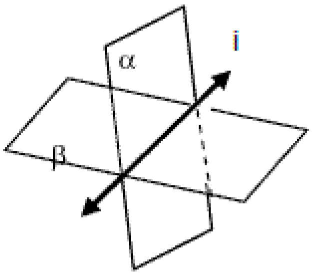
Posições relativas entre planos
Podem ser paralelos ou secantes entre si.

a) Paralelos: Se, e somente se, não tem ponto co-mum.



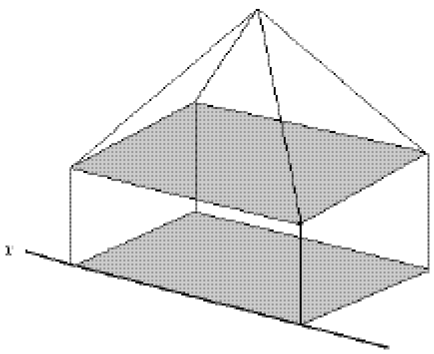
α e β paralelos
$\alpha \cap \beta = \varnothing$

b) Secantes: Se, e somente se, se interceptarem, sen-do essa intersecção uma reta.



α e β secantes
$\alpha \cap \beta = i$

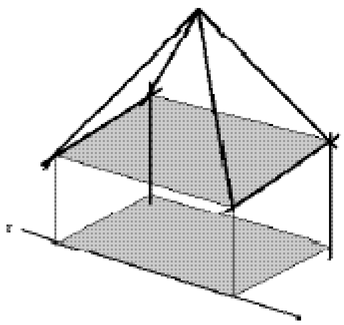
(UNIFESP) Considere o sólido geométrico exibido na figura, constituído de um paralelepípedo encimado por uma pirâmide.
Seja r a reta suporte de uma das arestas do sólido, conforme mostrado.



Quantos pares de retas reversas é possível formar com as retas suportes das arestas do sólido, sendo r uma das arestas do par?

a) 12
b) 10
c) 8
d) 7
e) 6

Solução:



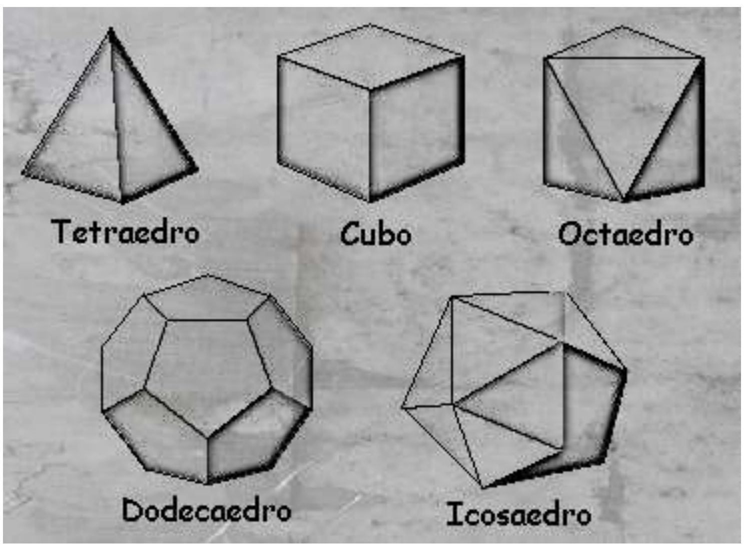
Teremos QUATRO arestas da pirâmide de vértice do topo em comum, mais QUATRO assinaladas de faces do paralelepípedo não adjacentes, num total de OITO arestas.
Letra c)

Figura do autor.

Sólidos Geométricos 80 minutos

Poliedros e a relação de Euler

Geometria Espacial é o estudo da geometria no espaço, em que estudamos as figuras que possuem mais de duas dimensões. Essas figuras recebem o nome de sólidos geométricos ou figuras geométricas espaciais e são conhecidas como: prisma (cubo, paralelepípedo), pirâmides, cone, cilindro, esfera.



A relação criada pelo matemático suíço Leonhard Euler possui extrema importância na determinação do número de arestas, vértices e faces de qualquer poliedro convexo e alguns não convexos. Essa relação permite que os cálculos sejam realizados no intuito de determinarmos o número de elementos de um poliedro. A fórmula criada por Euler é a seguinte:

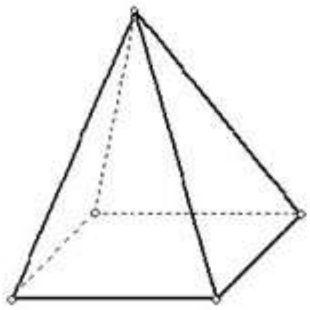
V – A + F = 2, onde V = número de vértices, A = número de arestas e F = número de faces.

Exemplo 1

Determine o número de faces de um sólido que possui 10 arestas e 6 vértices.
Resolução:
V – A + F = 2
6 – 10 + F = 2
–4 + F = 2
F = 4 + 2
F = 6
Portanto, o sólido possui 6 faces.

Exemplo 2

Determine o número de vértices da pirâmide quadrangular a seguir:



Visivelmente podemos afirmar que a pirâmide possui 5 vértices, 5 faces e 8 arestas. Vamos agora demonstrar que a relação de Euler é válida na determinação dos elementos da pirâmide de base quadrangular.
Resolução:
Vértices
V – A + F = 2
V – 8 + 5 = 2
V = 2 + 3
V = 5

Arestas
V – A + F = 2
5 – A + 5 = 2
–A = 2 – 10
–A = –8 x(–1)
A = 8

Faces
$V – A + F = 2$
$5 – 8 + F = 2$
$–3 + F = 2$
$F = 2 + 3$
$F = 5$

.✍

.✍

.✍.

Identificar sequências numéricas e obter, quando existir, a expressão algébrica do seu termo geral 80 minutos;

Utilizar as fórmulas do termo geral e da soma dos termos da P.A. e da P.G. na resolução de problemas - 80 minutos

Uma sucessão ou sequência é uma listagem de termos ou elementos que, no sentido usual, são indexados por um conjunto contável em ordem a permitir identificar um termo inicial. Define-se o tamanho de uma sequência pelo número de elementos que esta possuí, podendo existir sequências ou infinitas ou finitas.

Exemplo:
• O conjunto ordenado (0, 2, 4, 6, 8, 10,...) é a sequência de números pares.
• O conjunto ordenado (7, 9, 11, 13,15) é a sequência de números impares ≥ 7 e ≤ 15.
• O conjunto ordenado (2, 10, 12, 16, 17, 18, 19, 200) é uma sequência de números que começa com a letra D.

Utilizar o conceito de sequência numérica para resolver problemas;
A sequência definida pela lei de formação $an = 2n^2 - 1$, $n \in N^*$, onde n = 1, 2, 3, 4, 5, ... e an é o termo que ocupa a n-ésima posição na sequência. Por esse motivo, an é chamado de *termo geral da sequência*.
Utilizando a lei de formação $an = 2n^2 - 1$, atribuindo valores para *n*, encontramos alguns termos da sequência.
• $n = 1 \rightarrow a1 = 2 . 1^2 - 1 \rightarrow a1 = 1$
• $n = 2 \rightarrow a2 = 2 . 2^2 - 1 \rightarrow a2 = 7$
• $n = 3 \rightarrow a3 = 2 . 3^2 - 1 \rightarrow a3 = 17$
• $n = 4 \rightarrow a4 = 2 . 4^2 - 1 \rightarrow a4 = 31$
.
Diferenciar Progressão Aritmética (P.A.) de Progressão Geométrica(P.G.); - 80 minutos.
. A sequência numérica onde, a partir do 2º termo, a diferença entre um número e seu antecessor resulta em um valor constante é denominada de Progressão Aritmética. O valor constante dessa sequência é chamado de razão da PA. Observe:
2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, ...
$5 – 2 = 3$
$8 – 5 = 3$
$11 – 8 = 3$
$14 – 11 = 3$
$17 – 14 = 3$

20 – 17 = 3
23 – 20 = 3
26 – 23 = 3
29 – 26 = 3
Observe que nessa sequência a razão possui valor igual a 3.
Em uma progressão aritmética podemos determinar qualquer termo ou o número de termos com base no valor da razão e do 1º termo. Para tais cálculos, basta utilizar a seguinte expressão matemática:
an = a1 + (n – 1) * r
Exemplo 1
Sabendo que o 1º termo de uma PA é igual a 2 e que a razão equivale a 5, determine o valor do 18º termo dessa sequência numérica.
a18 = 2 + (18 – 1) * 5
a18 = 2 + 17 * 5
a18 = 2 + 85
a18 = 87
O 18º termo da PA em questão é igual a 87.
Em algumas situações ocorre a necessidade de determinar o somatório dos termos de uma progressão aritmética. Nesses casos a expressão matemática $S_n = \frac{(a_1 + a_n) * n}{2}$ determina a soma dos termos de uma PA.
Exemplo 2
Na sequência numérica (–1, 3, 7, 11, 15, ...), determine a soma dos 20 primeiros termos.
Cálculo da razão da PA
3 – (–1) = 3 + 1 = 4
7 – 3 = 4
11 – 7 = 4
15 – 11 = 4
Determinando o 20º termo da PA
a20 = –1 + (20 – 1) * 4
a20 = – 1 + 19 * 4
a20 = – 1 + 76
a20 = 75
Soma dos termos

$$S_{20} = \frac{(-1+75) * 20}{2}$$

$$S_{20} = \frac{74 * 20}{2}$$

$$S_{20} = \frac{1480}{2}$$

$$S_{20} = 740$$

Dizemos que uma sequência numérica constitui uma progressão geométrica quando, a partir do 2º termo, o quociente entre um elemento e seu antecessor for sempre igual. Observe a sequência:

(2, 4, 8, 16, 32, 64,...), dizemos que ela é uma progressão geométrica, pois se encaixa na definição dada.

4 : 2 = 2
8 : 4 = 2

16 : 8 = 2
32 : 16 = 2
64 : 32 = 2

O termo constante da progressão geométrica é denominado razão.

Muitas situações envolvendo sequências são consideradas PG, dessa forma, foi elaborada uma expressão capaz de determinar qualquer elemento de uma progressão geométrica. Veja:

$$a_n = a_1 * q^{n-1}$$

Com base nessa expressão, temos que:

a2 = a1 * q
a3 = a1 * q2
a5 = a1 * q4
a10 = a1 * q9
a50 = a1*q49
a100 = a1*q99

Exemplo 1

Em uma progressão geométrica, temos que o 1º termo equivale a 4 e a razão igual a 3. Determine o 8º termo dessa PG.

a8 = 4 * 37
a8 = 4 * 2187
a8 = 8748

O 8º termo da PG descrita é o número 8748.

Exemplo 2

Dada a PG (3, 9, 27, 81, ...), determine o 20º termo.

a20 = 3 * 319
a20 = 3 * 1.162.261.467
a20 = 3.486.784.401

Soma dos termos de uma PG

A soma dos termos de uma PG é calculada através da seguinte expressão matemática:

$$S_n = \frac{a_1 * (q^n - 1)}{q - 1}$$

Exemplo 3

Considerando os dados do exemplo 2, determine a soma dos 20 primeiros elementos dessa PG.

$$S_n = \frac{a_1 * (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_n = \frac{3 * (3^{20} - 1)}{3 - 1}$$

$$S_n = \frac{3 * (3.486.784.401 - 1)}{2}$$

$$S_n = \frac{10.460.353.200}{2}$$

$$S_n = 5.230.176.600$$

Exemplo 4

Uma dona de casa registrou os gastos mensais com supermercado durante todo o ano. Os valores foram os seguintes:

Janeiro: 98,00
Fevereiro: 99,96
Março: 101,96
Abril: 104,00
Maio: 106,08

Calcule o gasto anual dessa dona de casa, considerando que em todos os meses o índice inflacionário foi constante.

Os termos estão em progressão geométrica, observe:

106,08 : 104 = 1,02
104 : 101,96 = 1,02
101,96 : 99,96 = 1,02

99,96 : 98,00 = 1,02

A razão dessa progressão geométrica é dada por 1,02, isto indica que a inflação entre os meses é de 2%. Vamos determinar a soma dos gastos dessa dona de casa, observe:

$$S_n = \frac{98 * (1,02^{12} - 1)}{1,02 - 1}$$

$$S_n = \frac{98 * (1,02^{12} - 1)}{1,02 - 1}$$

$$S_n = \frac{98 * (1,26824179 - 1)}{0,02}$$

$$S_n = \frac{98 * 0,26824179}{0,02}$$

$$S_n = 1.314,39$$

Os gastos da dona de casa com compras de supermercado, foram equivalentes a R$ 1.314,39.

Assim, a sequência formada é (1, 7, 17, 31, ...)
2 - Recursos:

Quadro/louza, Folha de atividade, lápis, borracha, caneta e vídeos contextualizados .

3 - Metodologia:

Turma disposta em grupos, Dinâmica de grupo; trabalho individual.

Avaliação

- Atividades desenvolvidas em sala de aula - testes cadernos - 2 pontos;

- Participação e frequencia - 2 pontos;

- Avaliação Individual (Prova) - 3 pontos;

Trabalho em grupo -Apresentação do Projeto - Sólidos Geométricos - 3 pontos.

O aluno terá outros registros acumulativos pela participação de projetos existentes no bimestre.

Referências Bibliográficas

Nova EJA - Matemática e suas Tecnologia - - Módulo 3

Matemática – Série Novo Ensino Médio – Volume Único – Editora Ática – Carlos Alberto Marcondes dos Santos; Nelson Gentil; Sérgio Emílio Greco.
Matemática – Contextos e Aplicações – Volume Único – Editora Ática – Luiz Roberto Dante.

Endereços eletrônicos acessados:

http://www.somatematica.com.br/emedio/espacial/espacial.php; em 26/08/2014.

http://professor.pauloalexandre.com/conceitos-basicos-de-geometria/; em 26/08/2014

http://guiadoestudante.abril.com.br/estudar/matematica/geometria-espacial-677817.shtml; em 26/08/2014

http://www.brasilescola.com/matematica/geometria-espacial.htm, em 26/08/2014

http://www.brasilescola.com/matematica/sequencia-numerica.htm, em 27/08/2014