FUNÇAO EXPONENCIAL

PLANO DE TRABALHO

CURSISTA: ADRIANA DE ARAÚJO BRAGA

SERIE: 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

GRUPO: 06

TUTOR: MARIA TERESA

SUMÁRIO

✓ INTRODUÇÃO

Tendo em vista que Função Exponencial é um modelo matemático para muitos fenômenos naturais, abordamos este assunto fazendo uma conexão direta com tais acontecimentos para que o aluno compreenda não somente a definição, bem como a aplicação dessas funções.

Este plano de trabalho tem por objetivo conduzir o aluno a entender as Funções Exponenciais e sua aplicação nos fenômenos ao nosso redor.

Percebe-se que o aluno torna-se mais interessado no conteúdo quando ele pode usá-lo em aplicações próximas de sua realidade ou de seu contexto social, por isso também é fundamental a contextualização na abordagem de conteúdos curriculares.

É necessário que o aluno tenha noção de potência já estudadas no Ensino Fundamental e de suas propriedades (aulas de revisão foram dadas antes da introdução deste conteúdo), que tenha o conhecimento prévio da relação entre duas variáveis (Função Polinomial do 1º Grau) e que saiba realizar cálculos com números decimais e fracionários.

Esse plano será realizado em oito tempos de aula com duração de 50 minutos cada tempo. Seis tempos serão para abordagem do assunto e desenvolvimento do conteúdo com exercícios. Dois tempos serão para avaliação de aprendizagem.

✓ DESENVOLVIMENTO

❖ HABILIDADES RELACIONADAS: H58 – Resolver problemas envolvendo a função exponencial; H 63 – Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial.

ATIVIDADE 1:

- DURAÇÃO: Dois tempos de aula com duração de 50 minutos cada.
- METODOLOGIA: utilizando folhas de papel A4 os alunos irão fazer dobradura construindo uma sequência que cresce exponencialmente, a principio,usaremos a intuição para construir a sequência sem formular uma lei. Serão apresentados ainda textos e paráfrases narrados pelo professor, os alunos irão fazer suas anotações em seus cadernos construindo tabelas para cada situação narrada e utilizarão calculadora para realização dos cálculos.
- RECURSOS DIDÁTICOS PEDAGÓGICOS: folha de papel A4, quadro branco, caneta de quadro branco e calculadora.
- OBJETIVO: Apresentar a função exponencial, conduzir o aluno a identificar o crescimento exponencial (uma sequência que cresce exponencialmente).

DOBRADURA

(introdução a sequência exponencial)

1. Vamos fazer uma experiência com dobraduras (cada aluno recebera uma folha A4). Dobre uma folha retangular pela metade a sua largura e, em seguida, abra-a e anote o numero de retângulos que aparecem marcados; continue dobrando sucessivamente o retângulo encontrado, sempre pela metade o no mesmo sentido. E, a cada etapa, abra totalmente a folha e anote a quantidade de retângulos menores que aparecem marcados nela.

   a) Complete a seguinte tabela com os resultados obtidos(chamamos de numero de dobradura a quantidade de vezes que o papel foi dobrado a cada etapa.

Nº DE DOBRADURAS	Nº DE RETANGULOS	POTENCIA DE BASE 2
0	1	2^0
1	2	2^1
2	4	2^2
3	8	2^3
4	16	2^4
5	32	2^5
...	...	...
n	...	2^n

<u>Observações:</u> *o aluno devera perceber a relação entre os valores do expoente e o numero de dobraduras, são sempre iguais sendo assim nossa expressão seria do tipo* $f(x)=2^x$.

b) Se forem feitas 6 dobraduras, quantos retângulos ficarão marcados na folha?
c) Generalizando, qual seria a expressão que da o numero de retângulos para *n* dobraduras?
d) Ao fazer esta experiência uma pessoa obteve 256 retângulos marcados na folha original. Quantas dobraduras ela fez?

TEXTOS:

1. Uma Lenda sobre o Jogo de Xadrez

Há uma lenda sobre o jogo de xadrez que conta que um rei empolgado com as tramas possíveis de serem construídas com esse jogo, pede ao sábio responsável por sua invenção que escolha qualquer coisa do seu reino como forma de gratificação. O sábio pede como prêmio grãos de trigo. O rei, bastante surpreso pela simplicidade do pedido, pergunta imediatamente qual é a quantidade desejada. O sábio, deixando o rei ainda mais assustado e intrigado, pede ao soberano 1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos pela segunda, 4 grãos pela terceira, 8 grãos pela quarta, 16 pela quinta, e assim por diante, dobrando sempre o número de grãos de trigo na passagem de cada casa. O rei fica perplexo e não entende a simplicidade do pedido.

a) O rei parece perplexo com o pedido. E você? Qual a sua opinião sobre o pedido do sábio? A quantidade de grãos pedida poderia ser paga pelo rei? Discuta com seus colegas sobre essa questão.

b) Vamos entender o pedido do sábio inventor do jogo de xadrez? Para isso, preencha a Tabela 1 até a 10º casa do tabuleiro, seguindo as orientações do texto.

CASA DO TABULEIRO	GRÃOS RECEBIDOS	POTENCIA DE BASE 2
1	1	2^0
2	2	2^1
3	4	2^2
4	8	2^3
5	16	2^4
6	32	2^5
...	...	...
10	1024	2^{10}
64	18 446 744 000 000 000 000	2^{64}
x	y	2^x

<u>Observações:</u> *o aluno devera perceber que os valores do expoente são sempre em uma unidade menor que o numero de casas passados sendo assim nossa expressão seria do tipo* $f(x)=2^{x-1}$.

c) É possível estabelecer alguma relação entre o número de grãos de trigo com as casas do tabuleiro? Escreva uma fórmula que relacione o número de grãos (y) com as casas do tabuleiro (x).

2.Uma proposta Milionária

Da mais profícua ilha dos sonhos humanos, o Gênio da Lâmpada de Salin, em pleno século XXI, a nosso querido aluno Ounegni1, uma maravilhosa proposta:

- Caro Ounegni, estou aqui para oferecer-lhe em uma única oportunidade riqueza e sabedoria para mantê-la contigo. Para tanto é necessário apenas que decidas por uma de duas formas de receber esta oferta. Receberás trinta dias após o dia de hoje a quantia de um milhão de reais, ou receberás hoje um centavo de real e a cada novo dia o dobro do que recebeu no dia anterior, até o dia em que receberias um milhão de reais se tivesse escolhido a primeira opção.

Ounegni, atônito com tudo que acontecerá como um passe de mágica lembra-se de seu professor de Matemática e de suas agradáveis aulas. E, imbuído de um sentimento cujo sabor misturava o amargo da ganância humana e o doce do conhecimento da matemática fez-se digno da oferta do Gênio.
Instantes depois de confirmar na internet o saldo da conta que havia recebido do gênio, ligou ainda afoito para agradecer ao seu professor de Matemática por suas contagiantes aulas. Contou-lhe sua sábia decisão, e que só pensava agora em se preparar para continuar fazendo seu novo patrimônio crescer. Como conselho seu professor disse-lhe a ambígua frase:

"não há apropriação que não dependa dos valores finais do usuário".

a. Qual foi a feliz resposta dada pelo aluno Ounegni?

Como a história nos contou que Ounegni fez-se digno da oferta do gênio devemos acreditar que sua resposta escolhia a opção que lhe oferecia riqueza e sabedoria para mantê-la com ele. É de bom senso, então, admitirmos que a tentadora oferta de 1 milhão de reais só seria recusada se houvesse outra melhor, e que ,para isso acontecer, a segunda opção deveria render ao final mais que um milhão. Vamos fazer as contas?

Vejamos.

Dia	**1ª Opção (valor recebido, em reais, no dia)**	**2ª Opção (valor recebido, em reais, no dia)**	**POTENCIA DE BASE 2**
1º	0,00	0,01	$0{,}01 \cdot 2^{0}$
2º	0,00	0,02	$0{,}01 \cdot 2^{1}$
3º	0,00	0,04	$0{,}01 \cdot 2^{2}$
4º	0,00	0,08	$0{,}01 \cdot 2^{3}$
5º	0,00	0,16	$0{,}01 \cdot 2^{4}$
...	0,00	...	...
30º	0,00	5.368.709,12	$0{,}01 \cdot 2^{29}$
31º	1 000 000,00	10.737.418,24	$0{,}01 \cdot 2^{30}$
TOTAL	1 000 000,00	21.474.835,48	$0{,}01 \cdot 2^{31}$

Observações: *iremos utilizar um valor inicial igual a 0,01 relativo ao primeiro dia da 2ª proposta,e o aluno devera perceber que os valores do expoente são sempre em uma unidade menor que o numero de dias passados sendo assim nossa expressão seria do tipo* $f(x)=0{,}01.2^{n-1}$.

ATIVIDADE 2:

- DURAÇÃO: Dois tempos de aula com duração de 50 minutos cada.
- METODOLOGIA: Será conceituado Função Exponencial, bem como suas características utilizando o livro didático e o quadro branco; exercícios desenvolvido em dupla para melhor compreensão e troca de conhecimento com acompanhamento de mesa em mesa para auxiliá-los; correção das atividades em quadro branco e utilização de calculadora para realização dos cálculos.
- RECURSOS DIDÁTICOS PEDAGÓGICOS: quadro branco, caneta de quadro branco, livro didático e calculadora.
- OBJETIVO: capacitar o aluno a identificar a representação algébrica de uma função exponencial e o seu uso para modelar vários fenômenos da vida.

FUNÇÃO EXPONENCIAL:

DEFINIÇAO:

Denomina-se função exponencial de base ***a*** ($a>0$ e $a \neq 1$) a uma função **f** de IR em IR^{*}_{+}, dada por $f(x) = a^x$ ou $y = a^x$.
Esse modelo se aplica nas situações vistas na aula anterior do xadrez e da dobradura, lembram-se?

VAMOS VER POR QUE A BASE NÃO PODE SER NEGATIVA E NEM IGUAL A UM

1. Para a = 0 e x negativo, não existiria a^x (não teríamos uma função em R)
   Exemplo:
   $f(x) = 0^{-1}$ - $f(x) = \frac{1}{0}$ - não existe divisão em R cujo divisor seja zero.

2. Para a< 0 e x = ½, não haverá a^x (não teríamos uma função em R)
   Exemplo:

$f(x) = -3^{1/2}$ - $f(x) = \sqrt{-3}$ - não existe raiz quadrada de um numero negativo.

3. Para a = 1 e x qualquer numero real (teríamos uma função constante)
   Exemplo:
   $f(x) = 1^3$ - $f(x) = 1$
   $f(x) = 1^{-2}$ - $f(x) = 1/1$ - $f(x) = 1$

Mas a função exponencial também poderá ser dada por $f(x) = b \cdot a^x$, lembram-se da aula anterior da situação narrada em " uma proposta milionária"? Pois e quando nos temos uma constante *b*,diferente de zero,que geralmente representa um valor inicial das informações que estamos trabalhando, a forma exponencial do tipo $f(x) = b \cdot a^x$ e muito utilizada no calculo de juros compostos.

EXEMPLOS DE FUNÇAO EXPONENCIAL

$f(x) = 25 \cdot 1{,}02^x$

$f(x) = 3^x$

$f(x) = 0{,}4^{x-1}$

$f(x) = (\sqrt{2})^x$

$f(x) = 1/3^{4x}$

APLICAÇÃO DE MODELO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL EM FENÔMENOS QUE NOS CERCA

Como estimar o crescimento populacional? Como prever o período de semidesintegraçao de elementos radioativos? Quanto os seus bens irão desvalorizar nos próximos anos? E seus investimentos, quanto vão aumentar?

Existem inúmeras situações nas quais função exponencial estão presente entre elas: na Economia, onde se aplicam juros compostos;na Biologia, no estudo do crescimento do numero de bactérias numa cultura; Química, onde se verifica a contaminação de um ambiente ou de pessoas por elementos radioativos, entre outros.

APLICANDO

1. Uma pesquisa cientifica de biologia revelou que uma População inicial de bactérias aumentava, em media, 20% a cada hora. Qual o numero de bactérias após 3 horas?
   Vamos escrever a expressão que representa esta situação:
   Taxa de aumento = 20% a cada hora.

Fator de crescimento – 100%(nº inicial de bactérias) + 20% (taxa de crescimento) = 120% = 120/100 = 1,2

Representando a população de bactérias por B e o tempo por t,temos:

LEMBRANDO QUE NOSSA FUNÇAO E DO TIPO:

$f(x) = b \cdot a^x$, $f(x)= B$ e $t = x$, onde b e o valor inicial de bactérias e a (base) e a taxa de crescimento.

$B = 1000 \cdot 1{,}2^t$

Logo teremos em 3 horas $B = 1000 \cdot 1{,}2^3$ - 1000.1,728 – em 3 horas o numero de bactérias será de 1728.

2. A população de uma cidade, em 2000, era de 57 000 habitantes. Se a taxa de crescimento anual ficou em torno de 1,8%, qual será a população aproximada no ano de 2010?
3. Uma quantia de R$8 000,00 e investida de maneira que todo mês sejam acrescidos 2,8% do valor do mês anterior. Após 3 meses de investimentos, qual e o montante?
4. Suponha que inicialmente uma pessoa entrou em contato com o cesio-137(e um elemento químico radioativo). No dia seguinte duas novas pessoas entraram em contato com a substancia. No terceiro dia, quatro novas pessoas, e assim por diante.
   A. Quantas pessoas entraram em contato com a substancia no sexto dia?
   B. Qual e o numero total de pessoas que entraram em contato do primeiro dia ao décimo dia?
   C. Escreva a função exponencial que representa o numero de novas pessoas que entraram em contato com o césio-137 em função de t contado em dias.

ATIVIDADE 3:

- DURAÇÃO: dois tempos de aula com duração de 50 minutos cada.

- OBJETIVO: conduzir o aluno a identificar o decrescimento constante de um fenômeno exponencial decrescente por meio de situações contextualizadas.

- METODOLOGIA: uso de situações problemas copiadas do quadro branco, uso de dialética para alcançarmos conclusões tanto de crescimento quanto de decrescimento para que seja introduzido então a representação gráfica da função exponencial, onde serão utilizado papel milimetrado para construção dos gráficos.

- RECURSOS DIDÁTICOS PEDAGÓGICOS: quadro branco,caneta de quadro, folha de papel milimetrado, régua e calculadora..

FUNÇAO EXPONENCIAL DECRESCENTE

1. João comprou um carro em 2001, por R$ 20 000,00. Ele cuida do seu carro com todo o carinho, ate hoje: limpa, lustra, faz toda manutenção e lhe deu ate um nome, chamando-o carinhosamente de " Possante". João tem tanto carinho com o carro que seus amigos vivem brincando com João dizendo: Ai, João, o Possante " ta" ficando velho, hein? João fica muito bravo e sempre responde: Meu carro não e velho, e seminovo!
   Suponha que a cada ano que passa, o preço de um carro perde 30% do seu valor.

a) Complete a tabela com o valor do Possante no decorrer de alguns anos, descartando os centavos.

ANO	Anos passados	VALOR DO 'Possante" em Reais	FUNÇAO $f(x) = 20\,000 \,.\, 0{,}7^x$
2001	0	20 000	
2002	1	14 000	
2003	2	9 800	
2004	3	6 860	
2005	4	4 802	
...	...		
2012	11	395	

<u>Observações:</u> *Primeiramente o aluno devera perceber que se trata de uma função exponencial do tipo:f(x) = b.a*^{x} *, pois temos um valor inicial que sera nossa constante; depois será direcionado quanto aos cálculos percentuais, ao invés de calcularmos 100% + 30%, percebemos que o valor do automóvel desvaloriza a cada ano, logo chegamos a conclusão de que o calculo seria 100%(representando o valor total pago pelo automóvel novo)*

– 30%(valor que diminui a cada ano passado) = 70% - relativo a nossa base a;o valor inicial do automóvel seria nossa constante b; e por fim o aluno devera concluir que nosso expoente e o mesmo valor que anos de velho do carro.O aluno devera perceber também que trata-se de uma função cujo seus valores decrescem em função do tempo.

Agora e sua vez de fazer sozinho!!!

2. A produção, em toneladas, de uma indústria esta diminuindo 20% a cada na, m media, devido a uma crise econômica. Sabendo que sua produção, em 2000, era de 100 toneladas, qual sera sua produção em 2004?

CONCLUSÕES

Podemos perceber que uma Função Exponencial ela pode crescer, como vimos nas aulas anteriores, quando falamos de juros compostos, ou seja, toda vez que fazemos aplicações financeiras com juros compostos, tende a aumentar o valor aplicado em função do tempo decorrido; como também a população de cidades ou ate mesmo na cultura de bactérias que se reproduzem rapidamente, o numero de bactérias tende a crescer rapidamente, concluímos que essa função exponencial e crescente, pois na medida em que o tempo aumenta (passa), o valor final, quer seja população, produção ou montante, também aumenta.
TEMOS QUE: $a > 1$(base e maior que um) caracteriza uma função crescente.
Bem mas não para por ai, hoje vimos também que existem situações em que a função exponencial decresce, ou seja, quando falamos de um automóvel seu valor tende a cair(desvaloriza) ao decorrer(em função) do tempo, isso nos indica que a medida que o tempo(t) aumenta , o valor final (y) diminui, isso e uma Função exponencial decrescente.
TEMOS QUE: $0 > a > 1$ (a base e um valor entre zero e um) caracteriza uma função exponencial decrescente.

AGORA VAMOS VER COMO FICA A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UMA FUNÇÃO EXPONENCIAL?

Para construirmos o gráfico vamos seguir o passo a passo.

1. Tendo a função $f(t) = 20.\ 1{,}2^2$ montamos então nossa tabela.

t	$F(t)= 20.1,2^{t}$	y ou f(t)	Par ordenado
- 2	$20.1,2^{-2}$	13,9	(- 2; 13,9)
- 1	$20.1,2^{-1}$	16,7	(-1; 16,7)
0	$20.1,2^{0}$	24	(0, 24)
1	$20.1,2^{1}$	28,8	(1; 28,8)
2	$20.1,2^{2}$	34,6	(2; 34,6)

2. No papel milimetrado traçamos o eixo das ordenadas e das abscissas e marcamos os pontos de cada par odenado, em seguida ligamos esses pontos.

O GRAFICO SERA FEITO NO QUADRO BRANCO, NÃO COLOQUEI NESTE PT POR NÃO TER NO MOMENTO FERRAMENTAS GRAFICAS DISPONIVEIS.

Construindo outro gráfico!

t	$F(t)= 10.0,2^{t}$	y ou f(t)	Par ordenado
- 2	$10.0,2^{-2}$	250	(- 2; 250)
- 1	$10.0,2^{-1}$	50	(-1; 50)
0	$10.0,2^{0}$	10	(0,10)
1	$10.0,2^{1}$	2	(1; 2)
2	$10.0,2^{2}$	0,4	(2;0,4)

O que podemos perceber analisando as tabelas em relação aos valores das variáveis em questão? Na primeira tabela a medida que aumenta o *t* o que acontece com f(x), e na segunda?

Agora observando o gráfico o que podemos perceber? E uma parábola? E uma reta?

Em algum momento poderá tocar no eixo *x*? Em algum momento esta curva poderá estar no 3º ou no 4º quadrante?

Essas perguntas deverão ser exploradas, juntamente com as devidas explicações dadas pela professora, visando caracterizar um gráfico de função exponencial da melhor maneira possível.

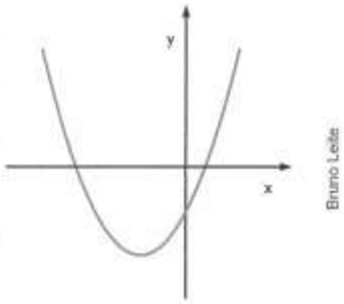
ATIVIDADE 4:

- DURAÇÃO: dois tempos de aula com duração de 50 minutos cada.
- OBJETIVO: Desenvolver no aluno a competência de resolução de problemas, envolvendo diferentes habilidades como a de buscar e processar informações, leitura de gráfico, cálculos, entre outras. Compreender enunciados e formular questões. Estimular o aluno para que pense, crie, estabeleça relações e tenha autonomia de pensamento.
- METODOLOGIA: avaliação escrita e individual.
- RECURSOS DIDÁTICOS PEDAGÓGICOS: folha de avaliação e calculadora.

1. (PUCPR) – A figura mostra o gráfico de um trinômio de 2º grau da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde **a**, **b** e **c** são constantes. Esse trinômio tem:

a) $a < 0, b < 0, c < 0$
b) $a < 0, b > 0, c > 0$
c) $a > 0, b < 0, c > 0$
d) $a > 0, b < 0, c < 0$
e) $a > 0, b > 0, c < 0$

O gráfico intercepta o eixo x em dois pontos; a concavidade é voltada para cima e $y_x < 0$. Resposta correta: item e → $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$



2. (PUC Minas – MG) – Uma pedra é atirada para cima e sua altura **h**, em metros, é dada pela função $h(t) = at^2 + 12t$, em que **t** é medido em segundos. Se a pedra atingiu a altura máxima no instante $t = 2$, pode-se afirmar que o valor de **a** é:

$x_v = \frac{-b}{2a}$ $\frac{2}{1} = -\frac{12}{2a}$ $4a = -12$ $a = -3$

a) -3 **b)** -2 **c)** 2 **d)** 3

FOLHA DE AVALIAÇÃO

1. Uma aplicação financeira obedece a lei $M(t) = 50\,000 .1{,}1^t$ em que M(t)e o montante final após t meses.

a) Determine o montante final após 5 meses?

b) Observando a lei de formação desta função podemos afirmar que trata-se de uma função crescente ou decrescente? Justifique sua resposta.

c) Quando o montante for de R$ 107 179, 44, quantos meses este capital permaneceu aplicado?

2. O valor de um automóvel daqui a t anos e dado pela lei
$V = 20\,000.0{,}9^t$ em dólares.

a) Calcule o valor deste automóvel daqui a 4 anos?

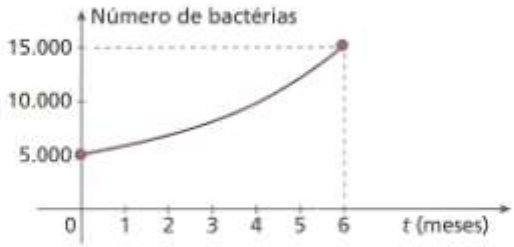
b) Observando a lei de formação desta função podemos afirmar que trata-se de uma função crescente ou decrescente? Justifique sua resposta.

3. Uma empresa produziu, num certo ano, 8 000 unidades de determinado produto. Projetando-se um aumento de 50% responda:

   a) Qual será a produção P dessa empresa t anos depois

   b) Daqui a quantos anos a produção anual será de 40 500 unidades?

4. Com base em uma pesquisa, obteve-se o gráfico abaixo, que indica o crescimento de uma cultura de bactérias ao longo de 6 meses.



a) Com quantas bactérias se iniciou a pesquisa?

b) Após seis meses, qual a quantidade total de bactérias?

c) Admitindo a lei de formação da função que representa essa situação como $f(t) = b \,.\, a^t$, determine os valores de b e de a.

d) Qual é o número de bactérias após um ano?

✓ AVALIAÇÃO:

- O aluno será avaliado individualmente a cada aula através de sua participação e realização das atividades de fixação- descritores: H58 – Resolver problemas envolvendo a função exponencial; H 66 – Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial, recebendo ponto de participação;
- Avaliação escrita e individual – com duração de 100 minutos(dois tempos de aula) com questões contextualizadas de situações problema abordando todas as aplicações vistas em sala.

✓ REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto;GIOVANNI JUNIOR, José Ruy.**Matemática Fundamental: uma nova abordagem**:ensino médio: volume único.São Paulo:FTD,2002.(pag. 168)

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, 2010. (pag.229,237 e 255)

ZAMPIROLLO, Maria José Couto; SCORDAMAGLIO, Maria Terezinha; CANDIDO, Suzana Laino.**Matemática:Projeto Escola e Cidadania para Todos**.1ª Ed.São Paulo:Editora do Brasil,2004.(pag. 86,88 e 97)

BARROSO, Juliane Matsubara. **Conexões com a Matemática**.1.ed. São Paulo: Moderna,2010. (pag.220 e 221)

ROTEIROS DE AÇÃO – Função Exponencial – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 1º ano do Ensino Médio – 4º bimestre/2012 –

http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ acessado em 30 /10/2012.

PROJETO REFORÇO ESCOLAR – curso de reforço escolar oferecido nas Escolas Estaduais do RJ referente ao 1° na do Ensino Médio – 4° Bimestre/2012.(dinâmica 3- pag.7)