Geometria Analítica

FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC - RJ

Tutora: Maria Cláudia Padilha Tostes
Cursista: Marta Cristina de Oliveira
Matrículas: 09137050 / 09269929
Grupo 1

Plano de trabalho 2

Colégio: Ciep Brizolão 152 Garrincha Alegria do Povo
Professora: Marta Cristina de Oliveira
Série: 3º ano Regular Ensino Médio 4º bimestre / 2013

PLANO DE TRABALHO 2

Assunto:
Geometria analítica

<u>Introdução</u>:

Este plano de trabalho visa ao incentivo do aluno ao estudo de geometria analítica. É importante sensibilizar o aluno para o valor do seu estudo na solução de problemas e proporcionar-lhe, entretanto, condições para a sua aprendizagem. Os alunos são expostos a pouquíssimas situações que ilustrem a aplicação dos conteúdos matemáticos à vida diária.

A fim de suprir esta deficiência e não apresentar o conteúdo de forma assustadora, este plano de trabalho mostra algumas situações em que se aplica tal assunto. Querendo sensibilizar os alunos para sua importância, estimulando o seu desenvolvimento nesse cálculo.

Além disso, faz uma abordagem sobre geometria analítica, onde haverá necessidade de reforçar o estudo sobre raio, diâmetro, equações do 1ºgrau e operações fundamentais (soma, subtração, multiplicação e divisão).

<u>Desenvolvimento</u>

Atividade 1 – Conhecendo Geometria Analítica – Retas Paralelas e perpendiculares a partir de suas equações e equação da circunferência.

Habilidade relacionada:

Identificar retas paralelas e retas perpendiculares a partir de suas equações.

Determinar a equação da circunferência na forma reduzida e na forma geral, conhecidos o centro e o raio.

Pré-requisitos: raio, radiano**,** equações do 1ºgrau e operações Fundamentais (soma, subtração, multiplicação e divisão).

Tempo de Duração: 200 minutos (podendo dividir em três aulas).

Recursos Educacionais Utilizados: Quadro, caneta, vídeo, explicações e lista de exercícios como ferramenta para a fixação de conteúdos.

Organização da turma: Individualmente ou em grupo.

Objetivos: Identificar retas paralelas e retas perpendiculares a partir de suas equações.
Determinar a equação da circunferência.
Desenvolver as habilidades relacionadas a circunferência.
Fixação dos conhecimentos através de exercícios.
Mostrar a importância do assunto e sua aplicação.

Metodologia adotada:

Precisamos justificar o estudo de retas paralelas, perpendiculares e equação da circunferência como forma de representar dados para a resolução de problemas.
Utilizar a aula expositiva para introduzir o assunto.
Propor a resolução de exercícios e corrigi-lo para eliminar as dúvidas.
Introduzir o tema mostrando o objetivo dos estudos que estão por vir.
Mostrar os tipos de problemas que podem ser resolvidos através do conteúdo e entregar para os alunos uma folha contendo um resumo contendo os conceitos.
Apresentar o conteúdo através de exemplos simples e práticos.
Distribuir lista de exercícios.

Acompanhe através do estudo as aplicações.

Explicar

Passar os vídeos para os alunos:
vídeo-aula que apresenta circunferência .
http://www.youtube.com/watch?v=2oinjlWiX-U

http://www.youtube.com/watch?v=SsHjW_uBJnc

Conversar com os alunos sobre o vídeo.

Em seguida apresentar o assunto:
Nessa aula apresentar atividades que poderão servir para desenvolver a capacidade dos alunos.

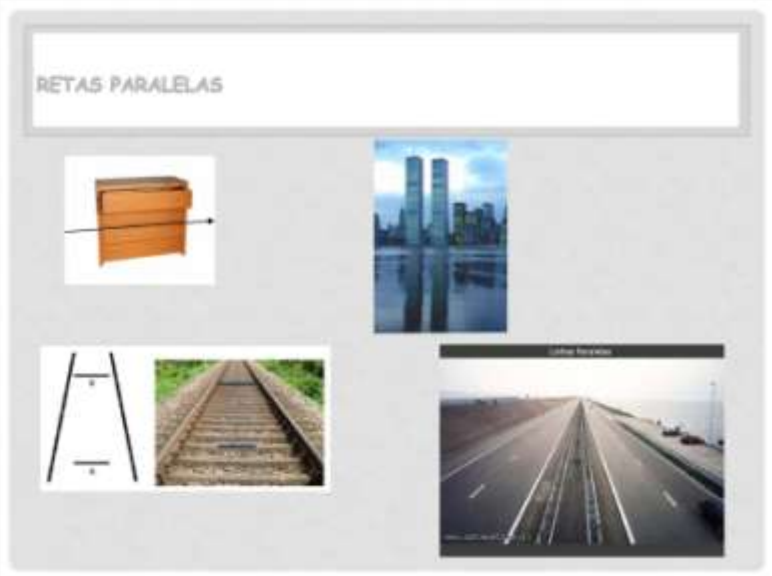
Começando o estudo as aplicações haverá necessidade de reforçar o estudo sobre raio , diâmetro equações do 1º grau e operações Fundamentais (soma, subtração, multiplicação, divisão).

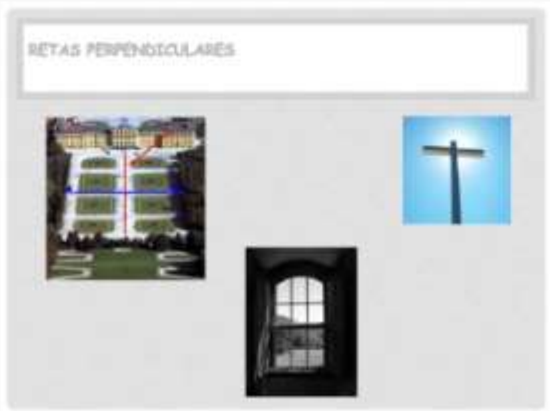
Retas Paralelas e perpendiculares a partir de suas equações

No estudo analítico da reta não podemos deixar de falar das posições relativas entre retas. Dadas duas ou mais retas do plano, elas podem ser paralelas, concorrentes, coincidentes ou concorrentes perpendiculares. Abordaremos aqui o paralelismo e o perpendicularismo de retas, assunto que sempre intrigou matemáticos de todas as épocas. Sabemos que duas retas são paralelas quando são equidistantes durante toda sua extensão, não possuindo nenhum ponto em comum.

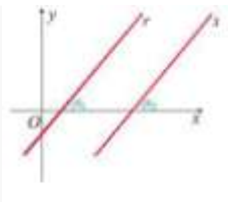
Devemos questionar os alunos sobre o que seria para eles duas retas paralelas e duas retas perpendiculares, dando exemplos concretos. Como as linhas contínuas pintadas no asfalto que representam não ultrapassagem (paralelas):

Outros exemplos que podem ser citados:





Dessa forma, considere duas retas, r e s, no plano cartesiano.



As retas r e s são paralelas se, e somente se, possuírem a mesma inclinação ou seus coeficientes angulares forem iguais.
Utilizando a linguagem matemática:

$r // s \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$

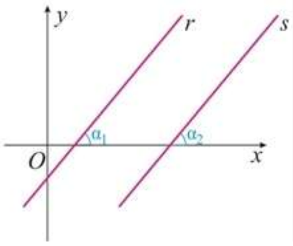
Uma maneira mais simples de verificar se duas retas são paralelas é comparar seus coeficientes angulares: se forem iguais as retas são paralelas.

Observe:

Retas Paralelas

As retas r e s têm o mesmo coeficiente angular.

$$\alpha_r = \alpha_s \leftrightarrow m_r = m_s$$

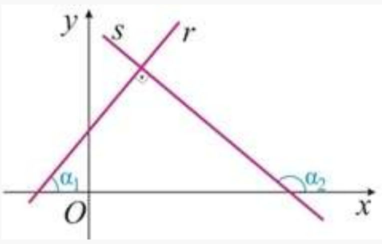


$$m_r = m_s \leftrightarrow -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = 0$$

Retas Perpendiculares

É um caso particular de reta concorrente. Duas retas são ditas perpendiculares quando os seus coeficientes angulares são tais que:

$$m_r = -\frac{1}{m_s}$$



Exemplo 1. Verifique se as retas r: 2x + 3y – 7 = 0 e s: – 10x – 15y + 45 = 0 são paralelas.

Solução: Vamos determinar o coeficiente angular de cada uma das retas.

Reta r: 2x + 3y – 7 = 0
Para encontrar o coeficiente angular precisamos isolar y na equação geral da reta.

$$3y = -2x + 7$$

$$y = \frac{-2x}{3} + \frac{7}{3}$$

$$m_r = \frac{-2}{3}$$

Faremos o mesmo processo para a reta s.

Reta s: – 10x – 15y + 45 = 0

$$-15y = 10x - 45$$

$$15y = -10x + 45$$

$$y = \frac{-10x}{15} + \frac{45}{15} = \frac{-2x}{3} + 3$$

$$m_s = \frac{-2}{3}$$

Como $m_r = m_s = \frac{-2}{3}$, podemos afirmar que r // s.

Exemplo 2. Determine a equação geral da reta t que passa pelo ponto P(1, 2) e é paralela à reta r de equação 8x – 2y + 9 = 0.

Solução: para determinar a equação de uma reta basta conhecermos um ponto dessa reta e seu coeficiente angular. Já conhecemos o ponto P(1, 2) da reta procurada, agora resta encontrar o seu coeficiente angular. Como a reta t é paralela à reta s, elas possuem o mesmo coeficiente angular. Assim, utilizando a equação da reta r iremos determinar o coeficiente angular. Segue que:

$$8x - 2y + 9 = 0$$

$$-2y = -8x - 9$$

$$2y = 8x + 9$$

$$y = \frac{8x}{2} + \frac{9}{2}$$

$$y = 4x + \frac{9}{2}$$

$$m_r = 4$$

Podemos afirmar que $m_t = 4$. Conhecendo um ponto da reta e seu coeficiente angular, utilizamos a fórmula abaixo para determinar sua equação.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Onde x_0 e y_0 são as coordenadas do ponto pertencente à reta. Teremos:

$$y - 2 = 4(x - 1)$$

$$y - 2 = 4x - 4$$

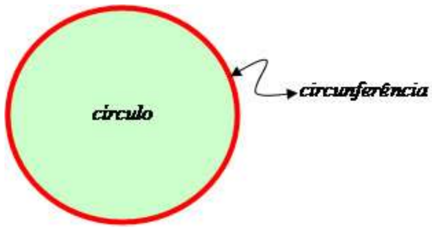
$$4x - y - 4 + 2 = 0$$

$4x - y - 2 = 0 \rightarrow$ Equação geral da reta t.

Circunferência

Equação reduzida da circunferência

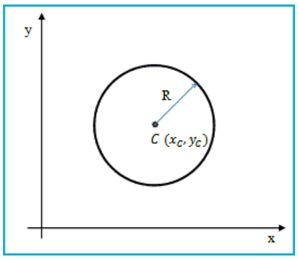
Na Figura



.

Circunferência é lugar geométrico dos pontos de um plano que distam igualmente, ou seja, de uma mesma medida – chamada **raio**, de um ponto fixo denominado **centro**.

Obs.: A circunferência é uma linha, enquanto o círculo é a figura plana delimitada pela circunferência.



A dedução da equação da circunferência segue a definição, o lugar geométrico dos pontos (x,y) equidistantes do centro $C(x_c, y_c$ da medida R.

Então:

$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2 \rightarrow$ esta é a chamada **equação reduzida** da circunferência.

Por exemplo: a equação reduzida de uma circunferência de raio 8 e centro (5,-7) será:

$(x - 5)^2 + (y + 7)^2 = 8^2$

Ou:

$$\boxed{(x-5)^2 + (y+7)^2 = 64}$$

Equação geral da circunferência

A equação geral de uma circunferência é definida quando se desenvolve a equação reduzida. Assim:

$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$

$(x^2 - 2x_c x + x^2{}_c) + (y^2 - 2y_c y + y^2{}_c) = R^2$

Reagrupando: $\boldsymbol{x^2 + y^2 - 2x_c x - 2y_c\, y + x^2{}_c + y^2{}_c - R^2 = 0}$

Ou de uma maneira generalizada:

$\boldsymbol{x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0}$ → está é a **equação geral** da circunferência.

Onde:

$$\left.\begin{aligned} m &= -2x_C \\ n &= -2y_C \\ p &= x_C^2 + y_C^2 - R^2 \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

Por exemplo, para uma circunferência de raio 8 e centro (5,-7):

$x^2 + y^2 - 2 \,.\, 5.\, x - 2 \,.\, (-7)y + 5^2 + (-7)^2 - 8^2 = 0$

$$\boxed{x^2 + y^2 - 10x + 14y + 10 = 0}$$

Determinação de centro e raio a partir da equação geral

Para se determinar o centro e o raio de uma circunferência a partir da equação geral

$x^2y^2 + mx + nx + p = 0$

utilizam-se as equações (I), deduzindo-se que:

$$x_C = \frac{-m}{2}$$

$$y_C = \frac{-n}{2}$$

$$R = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - p}$$

$$x^2 + y^2 - 10x + 14y + 10 = 0$$

$$x_C = \frac{-m}{2} = \frac{-(-10)}{2} = 5$$

$$y_C = \frac{-n}{2} = \frac{-14}{2} = -7$$

$$R = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - p} = \sqrt{5^2 + (-7)^2 - 10} = \sqrt{25 + 49 - 10} = \sqrt{64} = 8$$

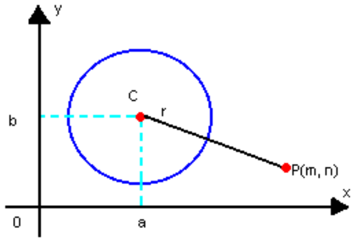
Logo:

C(5,-7) e o raio R = 8

Posição de um ponto em relação a uma circunferência

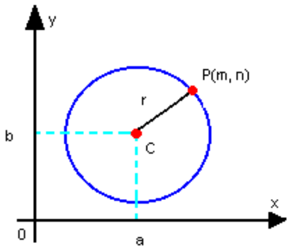
Em relação à circunferência de equação (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, o ponto P(m, n) pode ocupar as seguintes posições:

a) **P** é exterior à circunferência



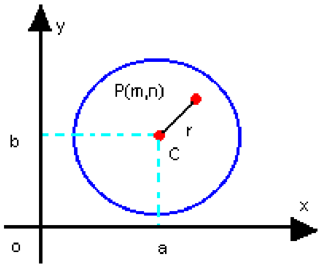
$$CP > r \Rightarrow \sqrt{(Xp - Xc)^2 + (Yp - Yc)^2} > r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{(m - a)^2 + (n - b)^2} > r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (m - a)^2 + (n - b)^2 > r^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (m - a)^2 + (n - b)^2 - r^2 > 0$$

b) **P** pertence à circunferência



$$CP = r \Rightarrow (m - a)^2 + (n - b)^2 = r^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (m - a)^2 + (n - b)^2 - r^2 = 0$$

c) **P** é interior à circunferência

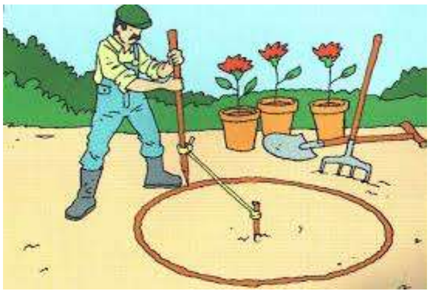


$$CP < r \Rightarrow (m - a)^2 + (n - b)^2 < r^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (m - a)^2 + (n - b)^2 - r^2 < 0$$

Assim, para determinar a posição de um ponto P(m, n) em relação a uma circunferência, basta substituir as coordenadas de P na expressão (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2:

- se (m - a)^2 + (n - b)^2 - r^2 > 0, então **P** é exterior à circunferência;
- se (m - a)^2 + (n - b)^2 - r^2 = 0, então **P** pertence à circunferência;
- se (m - a)^2 + (n - b)^2 - r^2 < 0, então **P** é interior à circunferência.

Podemos associar a situações do dia a dia essas definições:

Temos contato com objetos do cotidiano, usados pelas pessoas, que apresentam formato de uma circunferência. O movimento dos ponteiros de um relógio segue um movimento circular e desenha, em seu percurso, uma circunferência. Outros objetos, como moedas e CDs, muito presentes em nosso meio, também apresentam o mesmo formato.

Mostrar exemplos para que se compreenda como utilizar o assunto.:

1- Determine a equação da circunferência que possui centro em C(3, 6) e raio 4.

A equação da circunferência de centro C(a, b) e raio r, com r > 0, é $(x – a)^2 + (y – b)^2 = r^2$.
Portanto:

A equação da circunferência com coordenados do centro (3, 6) e raio medindo 4 é dada por:

$(x – 3)^2 + (x – 6)^2 = 16$

2- (PUC-SP) O ponto P(3, b) pertence à circunferência de centro no ponto C(0, 3) e raio 5. Calcule valor da coordenada b.

Temos por $(x – a)^2 + (y – b)^2 = r^2$, que a circunferência de centro C(0 ,3) e raio 5, possui como representação a equação $(x – 0)^2 + (y – 3)^2 = 5^2$ ou $x^2 + (y – 3)^2 = 25$.

Considerando que o ponto P(3, b) pertença à circunferência, então:

$x^2 + (y – 3)^2 = 25$
$3^2 + (b – 3)^2 = 25$
$9 + (b – 3)^2 = 25$
$(b – 3)^2 = 25 – 9$
$(b – 3)^2 = 16$

$b – 3 = 4$ ou $b – 3 = – 4$
$b = 4 + 3$ ou $b = –4 + 3$
$b = 7$ ou $b = –1$

A coordenada b pode assumir os valores 7 ou –1.

3-Qual das equações abaixo representa uma circunferência?

a) $2x^2 + y^2 – 3x + 4y – 1 = 0$
b) $x^2 + y^2 – 2xy + 4x – 6y – 1 = 0$
c) $x^2 + y^2 – 2x – 2y + 5 = 0$
d) $x^2 – y^2 – 4x – 2y – 1 = 0$
e) nda.

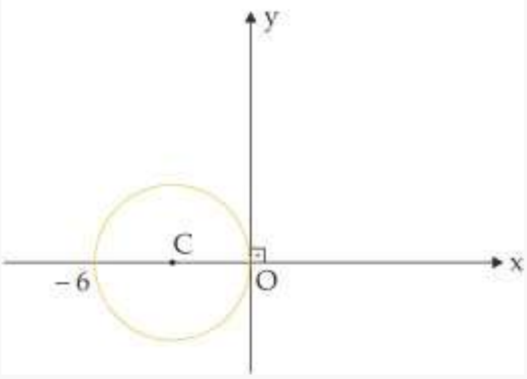
As equações das alternativas a e d não representam uma circunferência, pois os coeficientes de x^2 e y^2 são diferentes ($A \neq B$).

A equação da alternativa b também não representa uma circunferência, pois o coeficiente de xy não é nulo ($C \neq 0$).

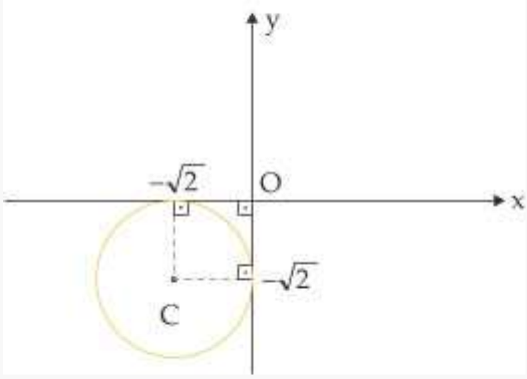
A equação da alternativa c, embora pareça representar uma circunferência, não representa, pois, se representasse, o centro da mesma seria C = (1, 1) e $a^2 + b^2 – f = 1^2 + 1^2 – 5 = – 3 < 0$.

Assim, a resposta é alternativa e.

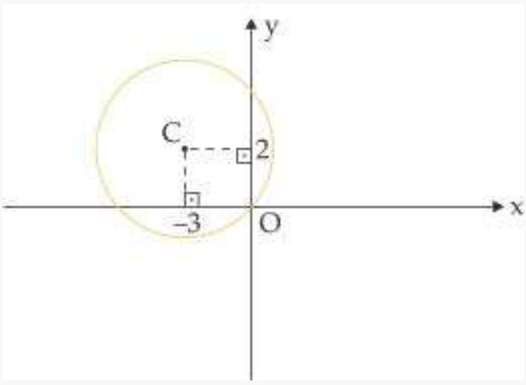
4- Encontre a equação das circunferências:



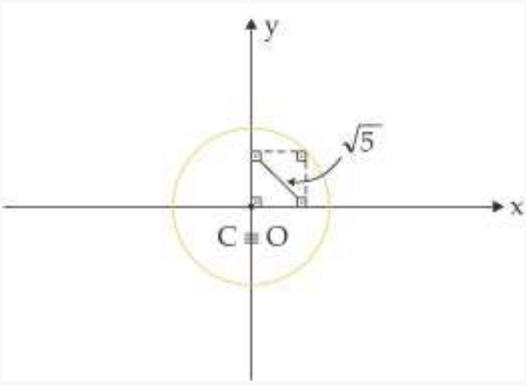
a)



b)



c)



d)

a) *Centro* = $C(-3, 0)$ *e raio* = 3

Assim: $(x + 3)^2 + y^2 = 9$

b) *Centro* = $C(-\sqrt{2}, -\sqrt{2};)$ *e raio* = $\sqrt{2}$

Assim: $(x + \sqrt{2})^2 + (y + \sqrt{2})^2 = 2$

c) *Centro* = $C(-3, 2)$ *e raio* = d_{OC}

Então:

$raio = \sqrt{(0+3)^2+(0-2)^2} = \sqrt{13}$

Assim: $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$

d) *Centro* = $C(0, 0)$ *e raio* = $\sqrt{5}$

Assim: $x^2 + y^2 = 5$

Outra opção de atividade a ser apresentada:

Caso os alunos estejam com dúvidas apresentar outros vídeos: http://www.youtube.com/watch?v=t0iB53etruw

http://www.youtube.com/watch?v=fjHTFywfU_o

Testando os seus conhecimentos do aluno (pode-se escolher algumas atividades para serem feitas em sala e o restante para serem feitas em casa).

Exercícios para praticar

1) Verifique se r e s são retas perpendiculares:

a) r: $5x - 7y = 0$

s: $7x + 5y - 1 = 0$

b) r: $4x + 6y - 1 = 0$

s: $2x + 3y + 1 = 0$

c) r: $3x - 5y + 2 = 0$

s: $5x - 3y - 2 = 0$

d) r: $3x - 7 = 0$

s: $2y + 5 = 0$

2) O centro e o raio da circunferência de equação $\mathbf{2x^2 + 2y^2 + 8x - 4y - 6 = 0}$ é:

a) $(2,-1)$ e $\sqrt{2}$

b) $(2,-1)$ e $2\sqrt{2}$

c) $(-2,1)$ e $2\sqrt{2}$

d) (–2,1) e $\sqrt{3}$

e) (–2,5) e $\sqrt{3}$

3) Determinando a posição da reta r, de equação **2x – 3y + 5 = 0**, em relação à reta s, de equação **4x- 6y -1 = 0**, encontramos:

a) $m_1 = \frac{-2}{3}$ e $m_2 = \frac{-3}{2}$

b) $m_1 = \frac{2}{5}$ e $m_2 = \frac{4}{7}$

c) $m_1 = \frac{3}{2}$ e $m_2 = \frac{1}{6}$

d) $m_1 = \frac{5}{3}$ e $m_2 = \frac{3}{5}$

e) $m_1 = \frac{2}{3}$ e $m_2 = \frac{2}{3}$

4)Na circunferência de equação $\mathbf{x^2 + y^2 - 8x - 2y + 1 = 0}$, o centro e o raio valem, respectivamente:

a) (1, 4) e 1
b) (8, 2) e 1
c) (-4, -1) e 1
d) (-4, -1) e ½
e) (4, 1) e 4
e) n.d.a

5) O centro e o raio da circunferência de equação $\mathbf{(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2}$ é:

a) (2,1) e 2 b) (2,–1) e 2 c) (–2, –1) e 2 d) (–2,1) e 2 e) n.d.a

6) A área do círculo cuja circunferência é dada pela equação $\mathbf{x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0}$ é:

a) 15π
b) 17π
c) 22π
d) 20π
e) 25π

7) A circunferência de centro **(– 1,– 2)** e raio **3** tem por equação geral:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 4$

b) $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$

c) $x^2 + y^2 + x + 4y + 4 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 9 = 0$

8) A equação reduzida da circunferência que tem centro em $\boldsymbol{C(-1,-4)}$ e raio **2** é:

a) $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 2$
b) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$
c) $(x+1)^2 + (y+4)^2 = 4$
d) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = -4$
e) $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$

9)A equação geral da circunferência que tem centro em $\boldsymbol{C(0,0)}$ e raio **10** é

a) $x^2 + y^2 - 100 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 22 = 0$
c) $4x^2 + 4y^2 + 24x - 4y + 1 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 16 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

10) Escrever a equação da circunferência de centro C(-3, 5) cujo raio é 8.

11) Uma equação da circunferência tem diâmetros cujos extremos são (2, 3)e (-4, 5).Encontre equação da circunferência.

12) Determine a equação da circunferência de centro C(7,-6) e que passa por A(2, 2).

13) Determine a equação da circunferência de centro C(2,-4)e que é tangente ao eixo y.

14) A equação de uma circunferência $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 36$. Mostrar que o ponto (2,-5) se encontra no interior da circunferência e o ponto (-4, 1) no exterior.

15) Dada a forma geral da equações de circunferência, determine se as equações representam ou não uma circunferência. Em caso afirmativo encontre seu centro e raio:

(a) $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0$;

b) $4x^2 + 4y^2 + 28x - 8y + 53 = 0$;

(c) $16x^2 + 16y^2 - 64x + 8y + 177 = 0$;

(d) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$;

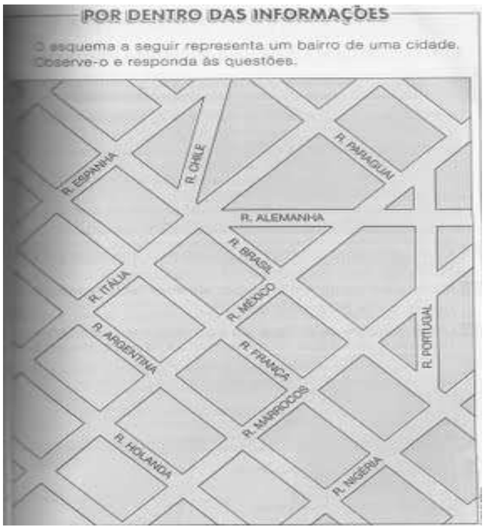
(e) $x^2 + y^2 + 6x - 14y + 58 = 0$;

(f) $x^2 + y^2 - 6x + 12y + 96 = 0$;

16) Determinar a equação da circunferência cujo raio é 5 e o centro é a interseção das retas $3x - 2y - 24 = 0$ e $2x + 7y + 9 = 0$:

17) Uma circunferência passa pelos pontos A(-3; 3) e B(1; 4)e se centro se encontra sobre a reta $3x - 2y - 23 = 0$; Encontre sua equação.

18) O esquema abaixo, representa um bairro de uma cidade. Observe-o e responda as questões:



a) Escreva o nome de duas ruas paralelas à Rua México.______________________

b) Escreva o nome de duas ruas perpendiculares à Rua França.____________________

c) O nome de uma rua que é paralela à Rua Brasil e perpendicular à Rua Itália._________________.

d) O nome de uma rua concorrente à Rua Brasil.____________________________.

e) O nome de três ruas paralelas entre si.____ .

f)O nome de duas ruas que não são paralelas nem perpendiculares.__________________________

Avaliação

O desempenho do aluno será avaliado considerando a participação nas atividades propostas. Será distribuído listas de exercícios, os alunos que fizerem, veremos que os objetivos foram alcançados. Caso os alunos não tenham alcançado poderemos fazer atividades extra classe.

Os alunos que participaram das atividades e não tiveram dificuldade em aplicar os conceitos, dominam bem potência e operações fundamentais. Há uma dificuldade nesse assunto.

Aplicando este plano de trabalho voltado para a realidade do aluno, o assunto facilita a compreensão dos alunos.

Fontes de Pesquisa:

Giovanni, J.R., BONJORNO, J.R. Matemática Completa. 2.ed.renov.São Paulo:FTD,2005.384.

Site da Web:

Infoescola .Geometria Analítica. Disponível em:

<www.infoescola.com/geometria-analitica/posicoes-relativas-de-duas-retas/>.Acesso em: 15 de nov. de 2013

Coladaweb . Circunferência . Disponível em:

http://www.coladaweb.com/exercicios-resolvidos/exercicios-resolvidos-de-matematica/circunferencia

>.Acesso em: 15 de nov. de 2013.

Scribd . Retas paralelas e perpendiculares . Disponível em:

< http://pt.scribd.com/doc/128976537/Retas-Paralelas-e-Perpendiculares>.Acesso em: 15 de nov. de 2013.

Somatemática .Circunferência. Disponível em:

<http://www.somatematica.com.br/emedio/circunferencia/circunf2.php >.Acesso em: 15 de nov. de 2013.

Exatasnet. Geometria Analítica. Disponível em:

< Equação da circunferência http://www.exatas.net/lista2a.pdf>.Acesso em: 15 de nov. de 2013.

Brasilescola. Geometria Analítica. Disponível em:

<
http://www.cfnp.com.br/2012/material_de_apoio/MTM/3/Lista%20de%20exerc%C3%ADcios%20Retas%20perpendiculares;%20%C3%82ngulo%20entre%20retas;%20Dist%C3%A2ncia%20entre%20ponto%20e%20reta.pdf>.Acesso em: 14 de nov. de 2013.

Ensinodematematica. Equação reduzida da circunferência. Disponível em:

<http://ensinodematemtica.blogspot.com.br/2011/04/equacao-reduzida-da-circunferencia.html

>.Acesso em: 14 de nov. de 2013.

Coladaweb. Circunferência. Disponível em:

< http://www.coladaweb.com/matematica/circunferencia >.Acesso em: 14 de nov. de 2013.

Webquestbrasil. Geometria Analítica. Disponível em:

< http://www.webquestbrasil.org/criador/webquest/soporte_mondrian_w.php?id_actividad=22224&id_pagina=1>.Acesso em: 14 de nov. de 2013.

Educacaouol. Geometria Analítica. Disponível em:

< http://educacao.uol.com.br/matematica/equacao-da-circunferencia-geral-e-reduzida-determinacao-de-centro-e-raio.jhtm>.Acesso em: 14 de nov. de 2013.

Colmagno. Geometria Analítica. Disponível em:

<www.colmagno.com.br/Plus_2013/arquivos/lista4-2013-correta.doc >.Acesso em: 14 de nov. de 2013.

Brasilescola. Geometria Analítica. Disponível em:

< http://tudodeconcursosevestibulares.blogspot.com.br/2012/12/exercicios-resolvidos-equacao-geral-da.html>.Acesso em: 14 de nov. de 2013.