PLANO DE TRABALHO 1 – 3º BIMESTRE – 2013

FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ
COLÉGIO: COLÉGIO ESTADUAL ARY PARREIRAS
PROFESSOR: ANA CRISTINA PEREIRA COSTA
MATRÍCULA: 914400-7
SÉRIE: 3ª
TUTOR (A): MARIA CLÁUDIA PADILHA TOSTES

PLANO DE TRABALHO

NÚMEROS COMPLEXOS

Ensino Médio - 3ª Série

Introdução

Este Plano de Trabalho foi elaborado para ser aplicado na turma 3001 do Colégio Estadual Ary Parreiras.

As atividades propostas neste plano têm como objetivo levar o aluno a entender o Conjunto dos Números Complexos como uma extensão dos conjuntos numéricos já conhecidos para suplantar obstáculos à realização de operações, neste caso, a raiz quadrada de números negativos. Inicialmente será utilizada uma atividade, na qual, por meio de questionamentos gerais sobre os números e suas propriedades, o aluno será levado a recordar os Conjuntos Numéricos, dos Naturais aos Reais, como pré-requisito para compreender a introdução da unidade imaginária.

Logo a seguir são sugeridas atividades que envolvem as operações com Números Complexos propostas no Roteiro de Ação 3, essenciais para que o estudo destes números seja concretizado de forma significativa para os alunos.

Como avaliação neste Plano de Trabalho, será utilizado inicialmente, um vídeo com a revisão dos temas abordados, e depois, serão propostos alguns exercícios de fixação. Temos, assim, a tecnologia do presente explicando as descobertas do passado, para o bem da aprendizagem de nossos alunos

Desenvolvimento

Duração prevista: 2 semanas (8 aulas de 50 minutos)

Área de conhecimento: Matemática.

Assunto: Números Complexos

Objetivos: Compreender o conceito de número complexo.

Identificar e conceituar a unidade imaginária.

Compreender e efetuar operações com números complexos em sua forma algébrica.

Pré-requisitos: Conhecer os conjuntos Numéricos de N a R; realizar operações básicas com números reais;

Material necessário: Folha de atividade, computador e datashow.

Organização da classe: Turma organizada em duplas, propiciando trabalho organizado e colaborativo.

Descritores associados: H46-Reconhecer números reais em diferentes contextos.

H36-Efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica.

Etapa 1 **(Tempo previsto: 2 aulas de 50 minutos)**

O objetivo desta atividade é deduzir com os alunos, através de questionamentos, a existência dos Números Complexos, sendo estes criados como solução para questões consideradas como obstáculo para os Matemáticos até o século XVI.

1- Quais foram os primeiros números que você conheceu? ________________________

Resposta pessoal, mas é de se esperar que os alunos citem: 1, 2, 3 etc.

2- Os romanos não consideravam o zero como número, eles não precisavam desse símbolo. Por exemplo, eles escreviam cento e cinco como CV, cento e cinqüenta como CL quinze como XV. No sistema posicional, porém, era preciso distinguir cento e cinco de quinze e de cento e cinqüenta. Surgiu, então, a necessidade da criação de um símbolo para o zero. Em 105, 15 e 150, o zero indica qual o valor de 1 e de 5 em cada um desses números. A maioria dos livros chama os números 0, 1, 2, etc. de números naturais e seu conjunto de N. Observe que você pode somar quaisquer dois números naturais e obtém ainda um número natural. Dê alguns exemplos.

Resposta pessoal, mas serve qualquer soma do tipo 2+3=5.

3- Qual é a operação inversa da adição? ________________

Subtração.

4- **1º obstáculo**: No campo dos números naturais, você pode subtrair quaisquer 2 números? Por exemplo, qual será o número natural resultado de 8-5? E de 5-8?

A resposta é que só é possível subtrair um número menor de um maior, mas não ao contrário: 8-5=3, mas não há número natural igual a 5-8, pois não há número natural que somado a 8 dê 5.

5- O conjunto dos números naturais foi aumentado para superar este obstáculo. Você sabe quais foram os números que resolveram este problema? _____________________

Foram os números negativos que, junto dos naturais, formam o conjunto Z dos números inteiros, onde 5-8=-3.

6- Você pode multiplicar quaisquer dois números inteiros e obter ainda um número inteiro. Por exemplo, quanto é 2 . (-5)? E quanto é (-2) . (-5)? ___________________

-10 e 10

7- Qual a operação inversa da multiplicação? _________________

A divisão.

8- **2º obstáculo**: Você pode dividir quaisquer 2 números inteiros e obter um número inteiro? Por exemplo, qual o número inteiro resultado de 8:4? E de 8:5? _____________

Como resultado inteiro, só é possível dividir um número por seus divisores, ou seja, não há inteiro que, multiplicado por 5, dê 8. Espera-se que o estudante se lembre de que não é possível dividir por 0, mas esse é um obstáculo que permanece, pois o produto de qualquer número por 0 dá 0.

9- O conjunto dos números inteiros foi aumentado para superar este obstáculo (sem considerar aqui o obstáculo da divisão por zero). Você sabe quais foram os números que resolveram este problema? ___________________________________

Foram os números fracionários que, junto com os inteiros, formam o conjunto Q dos números racionais, onde 8:5=8/5=1,6.

10- A representação decimal de um número racional é uma representação finita (com um nº finito de algarismos, com vírgula, ou não) ou uma dízima periódica (um número sem fim de algarismos depois da vírgula que, a partir de certo ponto, passam a se repetir na mesma ordem, indefinidamente). Que tipo de representação decimal pode existir ainda e como se chamam os números assim representados?_______________________

São as representações sem fim e sem período. Os algarismos se repetem, mas desordenadamente. Os números assim representados chamam-se irracionais.

11- Qual é o conjunto obtido pelo conjunto dos números racionais, completado pelos números irracionais? __________________________

Conjunto R dos números reais.

12- 3º obstáculo: Uma operação que se pode fazer entre os números reais é elevar ao quadrado. Qual é a operação inversa desta? Quando se pode calcular esta inversa e quando não se pode? ____

A inversa de elevar ao quadrado é a raiz quadrada. Todos os números reais podem ser elevados ao quadrado, mas nem todos têm raiz quadrada. Os números negativos não têm raiz quadrada.

Vamos ver como a Matemática fez para saltar esse obstáculo?

Ela considerou um outro tipo de número: os números imaginários. Para isso, definiu um novo número chamado de unidade imaginária e indicado pela letra i tal que:

$$\sqrt{-1} = i$$
$$i^2 = -1$$

Como agora você já tem como calcular $\sqrt{-100}$, qual é a solução dada pela fórmula, dita de Bhaskara, para a equação $x^2 + 20x + 125 = 0$?

Essa etapa é fundamental que o professor realize junto com o aluno, chegando ao resultado -10+5i e -10-5i.

Etapa 2 **(Tempo previsto: 2 aulas de 50 minutos)**

Soma e Subtração de Números Complexos na forma algébrica

Pré-requisitos: Operações elementares com números reais; compreensão sobre as representações dos números complexos na forma algébrica.

Nesta atividade, você terá contato com as operações de soma e subtração envolvendo números complexos. Na verdade, você descobrirá que elas muito se assemelham a outros conceitos já estudados anteriormente. Preparado?

Por exemplo, como faríamos a soma dos números complexos $z = 2$ e $w = 4$?

Uma vez que todo número real é um número complexo, tanto faz somarmos complexos que possuam apenas a parte real, apenas a parte imaginária ou ambas.

Um cuidado deve ser tomado: a unidade imaginária i distingue a parte real da parte imaginária e, sendo cada parte de natureza distinta, não podemos simplesmente uní-las. Assim, o procedimento de soma de dois números complexos se assemelha ao de soma de expressões algébricas da forma $ax + b$.

Sob esta ótica, temos, por exemplo:

$z = 2 + 3i$; $w = 5 + 2i$

$z + w = 2 + 3i + 5 + 2i = (2 + 5) + (3 + 2)i = 7 + 5i$

1. Agora efetue as somas z + w abaixo:

a. $z = 3$; $w = 5$

b. $z = 2i$; $w = 4i$

c. $z = 5$; $w = 3i$

d. $z = 2 + 3i$; $w = 3$

e. $z = 3 + 5i$; $w = 3 + 2i$

As respostas esperadas são: a) 8; b) 6i; c) 5 + 3i; d) 5 + 3i; e) 6 + 7i

Caso os alunos apresentem dificuldade, relembre com a turma o procedimento de soma algébrica de expressões da forma ax + b, onde devemos somar os termos semelhantes.

Como você pôde perceber, somar números complexos pode ser tratado de modo semelhante à soma de expressões algébricas. Na verdade, descobriremos mais à frente que a relação entre estes dois assuntos é ainda mais estreita.
Para o caso da subtração de números complexos, mantendo a relação citada acima, basta a troca de sinal da parte real e da parte imaginária, seguindo com o agrupamento e soma dos termos semelhantes como anteriormente.

Por exemplo:

$z = 5 + 2i$; $w = 2 + i$

$z - w = (5 + 2i) - (2 + i) = 5 + 2i - 2 - i = (5 - 2) + (2 - 1)i = 3 + i$

2. Agora, efetue z – w nos casos abaixo:

a. $z = 6 + 3i$; $w = 2 – 4i$

b. $z = -2 + 4i$; $w = 3 – 5i$

c. $z = 3 – 5i$; $w = -2 + 4i$

As respostas esperadas são: a) $4 + 7i$; b) $-5 + 9i$; c) $5 – 9i$

Neste ponto, é necessária atenção para possíveis equívocos na troca de sinal. Os itens b e c estão com z e w invertidos. Isto nos mostra que, assim como acontece com os números reais, a subtração não é comutativa, isto é, a ordem dos fatores altera a diferença. É importante comentar isso com a turma.

Como vimos, o procedimento para soma e subtração de números complexos pode ser resumido a operar com a parte real e com a parte imaginária separadamente e, em seguida, juntar as partes para formar um novo número complexo

As atividades que você acabou de realizar levaram em conta apenas valores inteiros para as partes real e imaginária dos números complexos. Mas os números complexos são muito mais que isso!

Na realidade, os valores podem ser quaisquer números reais e, para realizar a soma/subtração em cada caso, basta seguir o mesmo procedimento que você realizou anteriormente, só que agora com quaisquer complexos.

Etapa 03 (Tempo previsto: 2 aulas de 50 minutos)

Multiplicação e Divisão de Números Complexos na forma algébrica

Pré-requisitos: Operações elementares com números reais; compreensão sobre as representações dos números complexos na forma algébrica; relacionar i^2 com -1.

Assim como fizemos na soma/subtração, podemos considerar a multiplicação e a divisão como uma operação envolvendo a forma algébrica, da mesma forma que fazemos com as expressões algébricas.

E mais: você lembra da “racionalização do denominador de uma fração”? Esse é um procedimento bastante efetuado no estudo de frações envolvendo expressões algébricas e números irracionais. Será utilizado aqui também!

1. Inicialmente, tente efetuar a operação z . w, com z = 3 + 2i e w = 4.

Resposta esperada: 12 + 8i.

Atenção para possíveis equívocos na operação, como multiplicar apenas a parte real e não a parte imaginária.

2. Agora vamos complicar um pouco. Efetue a operação z . w, com z = 2 + 4i e w = 3i. Não se esqueça que, como i = V-1, podemos considerar que $i^2 = -1$.

Resposta esperada: -12 + 6i.

Certifique-se se os alunos compreendem que $4i.3i = 4.3.i.i = 4.3.i^2 = 12 . (-1) = -12$

3. Efetue z . w, com z = 2 – 3i e w = 5 – i.

O resultado esperado é 7 – 16i.

A partir deste ponto, você já deve estar em condições de efetuar o produto entre dois complexos na forma algébrica. Mas, e a divisão?

4. Bom tente efetuar a seguinte divisão: z : w, com z = 6 – 4i e w = 2.

Resposta esperada: 3 – 2i.

Atenção para possíveis equívocos na operação, como dividir apenas a parte real, e não a parte imaginária.

Na divisão onde o divisor é um número real puro, basta dividir cada termo do dividendo pelo divisor. Agora efetue:

5. z : w, com z = -9i e w = 3i.

6. z : w, com z = 6 – 4i e w = 2i.

Para efetuar uma divisão onde o divisor possui parte imaginária, faremos uso de um artifício que você conheceu durante o estudo de números irracionais: a racionalização do denominador.

A divisão de números complexos na forma a + bi pode ser vista do mesmo modo que uma divisão de números irracionais na forma de radicais. Neste caso, quem executa a tarefa de eliminar a parte imaginária é o conjugado do número complexo.

Procure efetuar a seguinte divisão, utilizando esta idéia:

7. z : w, com z = 4 – 3i e w = 2 + i

Resposta esperada: 1-2i

ETAPA 4 : AVALIAÇÃO (Tempo previsto: 2 aulas de 50 minutos)

Esta parte do plano de trabalho propõe uma revisão das habilidades trabalhadas nas etapas anteriores através de um vídeo encontrado no link: http://www.pensevestibular.com.br/vestibular/aula-sobre-numeros-complexos-forma-algebrica. *Além do vídeo, neste mesmo link, pode ser conferido um texto histórico que trata da introdução dos números no século XVI como solução para equações cúbicas. Após o vídeo, deverão ser realizadas as atividades abaixo.*

As atividades propostas a seguir possuem o objetivo de fazer uma avaliação diagnóstica da aprendizagem dos alunos em relação aos tópicos abordados sobre os Números Complexos neste Plano de Trabalho. Esta fase da implementação é importante para o professor porque os resultados obtidos nortearão as ações pedagógicas para a elaboração de atividades que visem revisar os assuntos que não foram bem assimilados pelos alunos. As etapas desenvolvidas até agora, devem contar o opoio do professor, porém, estas atividades avaliativas devem ser realizas com independência por parte dos alunos, para que possa ser concluído o grau de desempenho de cada um.

Descritores do Currículo Mínimo:

- Identificar e conceituar a unidade imaginária.
- Calcular a expressões envolvendo as operações com números complexos na forma algébrica.

1- O conjunto solução da equação $4x^2 - 4x + 2 = 0$, com $x \in C$, é

a) S = { }

b) S = {0,1}

c) $S = \{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\}$

d) $S = \{1/2 - 4i, 1/2 + 4i\}$

e) $S = \left\{\frac{1 - i}{2}, \frac{1 + i}{2}\right\}$

2- Sendo $t_1 = 4 + 3i$ e $t_2 = 5 - 3i$, o resultado da operação $t_1 . t_2$ é igual a

a) $-1 + 5i$

b) $9 - i$

c) $20 - 8i$

d) $20 - 6i$

e) $26 - 2i$

3- O valor que representa o desenvolvimento de $(1+i)^2$ é

a) $2 + 2i$

b) $2i$

c) -2

d) $-2i$

e) 0

4- Efetuando a operação $(2 + 3i) + (3 + 2i)$, temos como resultado

a) $5 + 5i$

b) $-1 + 5i$

c) $5 - i$

d) $-5 + 5i$

e) $1 - 5i$

5- Dados os complexos

v = 1 + 2i e w = 2 – 2i

o valor da expressão w - v é

a) -1 - 4i

b) 1

c) 3

d) 1 + 4i

e) 1 – 4i

6- Calcule: $\frac{3 + 3i}{1 + 2i}$

7- Considere os números complexos z = 4 + 5i e w = -2 + 6i.

Qual é o número complexo que representa a diferença z – w?

a) 6 – i

b) 6 – 11i

c) 2 + 11i

d) 2 – i

e) -6 + i

Referências Bibliográficas

CAED/SAERJ. Avaliação Diagnóstica 3º Bimestre - Língua Portuguesa e Matemática 3ª série do Ensino Médio. 2011 e 2012.

DINÂMICA 1 Reforço Escolar - Real ou Imaginário – Curso de Formação para Dinamizadores de Matemática oferecido por CECIERJ referente à 3ª série do Ensino Médio – 3º bimestre/2013.

RIBEIRO, J. **Ciência, Linguagem e Tecnologia – Ensino Médio Matemática**. Vol 3. 1. ed. São Paulo: Ed. Scipione, 2011.

ROTEIROS DE AÇÃO – Números Complexos – Curso de Formação Continuada oferecido por CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 3º bimestre/2013.

Link: http://www.pensevestibular.com.br/vestibular/aula-sobre-numeros-complexos-forma-algebrica