Formação Continuada para professores de Matemática
Fundação CECIERJ/SEEDUC – RJ
Colégio Estadual Cinamomo
Profª. Adilcimara da Silva Gomes
Matrícula: 0838003-2
Série 2° Ano –Ensino Médio – 4° Bimestre
Tutora: Maria Cláudia Padilha Tostes

Trabalho 1

Sistemas Lineares

Introdução

Este plano de trabalho tem por objetivo permitir que os alunos percebam, através de problemas do dia-a-dia, a aplicabilidade do conteúdo denominado **sistemas lineares** para resolução de problemas. O planejamento foi elaborado visando a transmissão de conhecimento através da construção feita pelos alunos com resolução de situações-problema e generalizações.

Já que os alunos apresentam dificuldades na interpretação de enunciados, nos cálculos envolvendo números reais e também a falta de interesse; utilizaremos assuntos diversificados e atraentes para que possamos ter a atenção dos alunos.

Para a totalização do plano serão necessários 10 tempos de 40 minutos para desenvolvimento dos conteúdos mais 2 tempos para avaliação da aprendizagem, lembrando que essa turma é do EJA com 4 aulas semanais.

DESENVOLVIMENTO

ATIVIDADE 1

Habilidade Relacionada:

* Identificar os sistemas lineares como modelos matemáticos que traduzem situações-problemas para a linguagem matemática

* Resolver problemas utilizando sistemas lineares

Pré- Requisitos: Equação do 1º grau

Tempo de Duração: 80 minutos

Recursos Educacionais Utilizados: Data-show para apresentação das situações- problemas, folha de atividades, lápis, borracha, régua e papel quadriculado

Organização da Turma: duplas

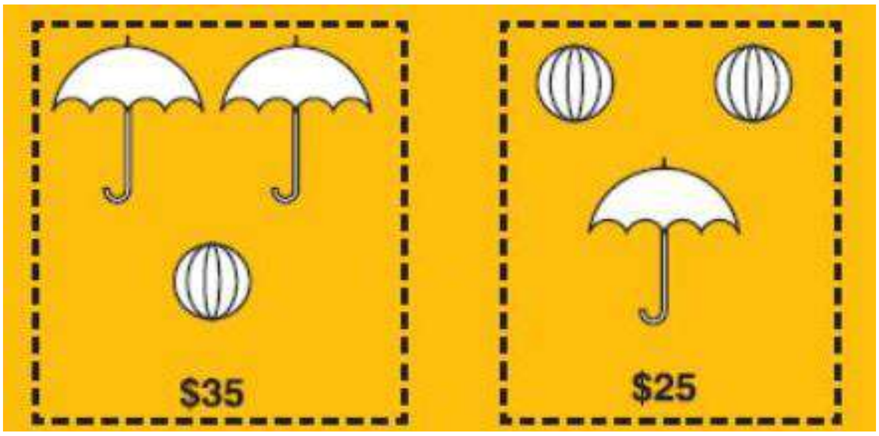
Objetivos:
Resolver um sistema de equações lineares de 2 equações e 2 incógnitas algébrica e graficamente .
Mostrar aos alunos a importância do tema que será estudado e sua aplicação em assuntos cotidianos.

Metodologia Adotada

Apresentação de slides com problemas do dia-a-dia envolvendo sistemas de equações:

Exemplo 1

Quanto vale o guarda-chuva e a bolsa?



Exemplo 2

Um terreno de 8 000m² deve ser dividido em dois lotes. O lote maior deve ter 1000 m² a mais do que o lote menor. Calcule a área de cada um.

Exemplo 3

A equação da receita para certa marca de pasta de dentes é **R = 2,5x** em que x é o número de tubos de pasta de dentes. A equação do custo é **C = 0,9x + 3000**, em que **x** é o número de tubos de pasta de dentes fabricados. Responda:

a) Quando x for zero qual o valor da receita e do custo?
b) Quando x for 1000 qual o valor da receita e do custo?
c) Quando x for 2000 qual o valor da receita e do custo?
d) Quando x for 3000 qual o valor da receita e do custo?
e) Monte o gráfico das funções acima.
f) Com certa quantidade de pasta de dente vendida a empresa iguala custo e receita suas contas e, a partir daí, começa a ter lucro. Qual o ponto do gráfico que representa essa situação?

ATIVIDADE 2 – Sistemas lineares 3x 3

Habilidade Relacionada:

* Identificar os sistemas lineares como modelos matemáticos que traduzem situações-problemas para a linguagem matemática

* Resolver problemas utilizando sistemas lineares

Pré- Requisitos: Equação do 1º grau, sistemas de equações lineares 2x2 e cálculo de determinantes

Tempo de Duração: 160 minutos

Recursos Educacionais Utilizados: folha de atividades, lápis e borracha

Organização da Turma: duplas

Objetivos:
Resolver um sistema de equações lineares de 3 equações e 3 incógnitas algebricamente pelo método da regra de Cramer
Mostrar aos alunos a importância do tema que será estudado e sua aplicação em assuntos cotidianos.

Metodologia Adotada

Começaremos com o texto abaixo:

Você conhece o índice *Big Mac*?

(Texto construído com trechos das reportagens "*Índice Big Mac mostra real como a 4ª moeda mais cara do mundo*" de 12/01/2012, disponível em http://www1.folha.uol.com.br/mercado/1126314-indice-big-mac-coloca-o-real-como-4-moeda-mais-cara-do-mundo.shtml acesso em 28/07/2012 e "*Brasil fica em 4º em ranking Big Mac*" de 12/01/2012, disponível em http://oglobo.globo.com/economia/brasil-fica-em-4-em-ranking-big-mac-3655577 acesso em 28/07/2012)

O índice *Big Mac*, divulgado pela revista "Economist", é baseado na teoria da paridade do poder de compra (PPP, da sigla em inglês), segundo a qual, a longo prazo, as taxas de câmbio deveriam se ajustar para igualar uma cesta de bens e serviços em distintos países. Neste caso particular, o bem é o tradicional sanduíche da cadeia de fast-food *McDonald's*.
Fonte: http://www.sxc.hu/photo/14680
No cálculo desse índice faz-se uma comparação do preço do *Big Mac* em vários países do mundo. Isso ajuda a medir a valorização do dólar em cada país frente à moeda local.
Pelos últimos índices, divulgados aqui no Brasil em janeiro de 2012, o sanduíche brasileiro só custa menos que o vendido na Suíça, na Noruega e na Suécia, em uma lista de 44 países, deixando o Brasil em 4º lugar no ranking.
Na lista da "Economist", o hambúrguer mais barato é o da Índia, comercializado a US$ 1,62 (84 rúpias). Como o *Big Mac* não é vendido na Índia, considerou-se o preço do *Maharaja Mac*, feito com frango em vez de carne bovina. O cálculo, neste caso, aponta uma desvalorização da rúpia, moeda da Índia, de 60%.

A revista considera que o ideal é que o sanduíche custe o mesmo que nos Estados Unidos. Isso porque, para a "Economist", como o sanduíche usa os mesmos itens nos países em que é feito, o "valor justo" na conversão para o dólar seria o mesmo cobrado nas lojas norte-americanas.
Na semana passada fui a uma lanchonete com as minhas sobrinhas Beatriz, Mariana e Maria Luisa, e a mais nova (Bia) notou que eles também vendiam o sanduíche acompanhado de refrigerante e batata frita, as conhecidas "Ofertas".
Geralmente ao comprar uma oferta o preço do sanduíche sai mais barato do que se for comprado sozinho.
Bia ficou na dúvida se valia mesmo a pena. Foi aí que resolvi sentar com as minhas sobrinhas para pensar na situação.
Vamos ver...

A Bia comeu  +  e pagou R$14,25 reais.

A Mariana comeu  +  e a conta dela foi de R$14,75 reais.

A Maria Luisa comeu  +  e gastou R$8,50 reais.
Como posso calcular o preço de cada produto sabendo quanto gastou cada uma delas? Sabendo o preço de cada item em separado, qual a vantagem de se comprar uma promoção? Esse tipo de problema é uma das muitas situações em que podemos usar um *sistema de equações*.
É possível descrever essa situação pensando em um sistema de equações em que as *incógnitas* são os preços do sanduiche (x), da batata frita (y) e do refrigerante (z).
1sanduiche+ 1 refrigerante = R$14,25
1sanduiche + 1 batata frita = R$14,75
1batata-frita + 1 refrigerante = R$8,50
ou seja

$$\begin{cases} x+z = 14{,}25 \\ x+y = 14{,}75 \\ y+z = 8{,}50 \end{cases}$$

Nesse caso, conseguimos um sistema com 3 incógnitas e 3 equações.
Muitas outras situações cotidianas recaem em sistemas de equações lineares de 2 ou mais incógnitas e com um número variável de equações também. O importante é lembrar que os valores procurados devem satisfazer todas as condições propostas, ao mesmo tempo. A *solução* então é um terno ordenado (x,y,z) que satisfaz o sistema, ou seja, a todas e a cada uma das equações,

Para resolução dos sistemas de três incógnitas, utilizaremos os métodos Regra de Cramer e escalonamento

1- Regra de Cramer

Os sistemas lineares são formados por um conjunto de equações lineares de m incógnitas. Todos os sistemas possuem uma representação matricial, isto é, constituem matrizes envolvendo os coeficientes numéricos e a parte literal. Observe a representação matricial do seguinte sistema: $\begin{cases} 2x+9y=-20 \\ 7x-5y=6 \end{cases}$.

Matriz incompleta (coeficientes numéricos)

$$A=\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}$$

Matriz completa

$$B=\begin{vmatrix} 2 & 9 & -20 \\ 7 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

Representação Matricial

$$\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -20 \\ 6 \end{vmatrix}$$

A relação existente entre um sistema linear e uma matriz consiste na resolução de sistemas pelo método de Cramer.

Vamos aplicar a regra de Cramer na resolução do seguinte sistema: $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x+y+z=6 \\ x-y+2z=5 \end{cases}$.

Aplicamos a regra de Cramer utilizando a matriz incompleta do sistema linear. Nessa regra utilizamos Sarrus no cálculo do determinante das matrizes estabelecidas. Observe o determinante da matriz dos sistemas:

$$B=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow D=5$$

Regra de Sarrus: soma dos produtos da diagonal principal subtraída da soma dos produtos da diagonal secundária.

Substituir a 1ª coluna da matriz dos sistemas pela coluna formada pelos termos independentes do sistema.

$$B_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow D_x = 5$$

Substituir a 2ª coluna da matriz dos sistemas pela coluna formada pelos termos independentes do sistema.

$$B_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow D_y = 10$$

Substituir a 3ª coluna da matriz dos sistemas pela coluna formada pelos termos independentes do sistema.

$$B_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow D_z = 15$$

De acordo com regra de Cramer, temos:

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{5}{5} = 1$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{10}{5} = 2$$

$$z = \frac{Dz}{D} = \frac{15}{5} = 3$$

Portanto, o conjunto solução do sistema de equações é: x = 1, y = 2 e z = 3.

EXERCÍCIOS

1- Resolver o sistema $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 5y = -2 \end{cases}$.

2- Calcule os valores de *x*, *y* e *z* no sistema:

a) $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-y+3z=9 \\ 3x+3y-2z=3 \end{cases}$

3- Luís e Maria resolveram comparar suas coleções de “compact disc”. Descobriram que têm ao todo 104 CDs e que se Maria tivesse 12 CDs a menos teria o triplo do número de CDs do Luís. É possível afirmar que a quantidade de CDs que Luís possui é:

a) 46

b) 40

c) 32

d) 23

ATIVIDADE 3 – Sistemas lineares 3x 3

Habilidade Relacionada:

* Identificar os sistemas lineares como modelos matemáticos que traduzem situações-problemas para a linguagem matemática

* Resolver problemas utilizando sistemas lineares

Pré- Requisitos: Equação do 1º grau e sistemas de equações lineares 3x3

Tempo de Duração: 160 minutos

Recursos Educacionais Utilizados: folha de atividades, lápis e borracha

Organização da Turma: duplas

Objetivos:
Resolver um sistema de equações lineares de 3 equações e 3 incógnitas algebricamente pelo método escalonamento
Mostrar aos alunos a importância do tema que será estudado e sua aplicação em assuntos cotidianos.

Metodologia Adotada

Escalonamento

Vamos então aplicar a técnica do escalonamento, considerando dois tipos de sistema:

I. O número de equações é igual ao número de incógnitas (m=n)

Exemplo 1: $\begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x + 2y + z = 3 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$

1º passo: Anulamos todos os coeficientes da 1º incógnita a partir da 2º equação, aplicando as propriedades dos sistemas equivalentes:

Trocamos de posição a 1º equação com a 2º equação, de modo que o 1º coeficiente de x seja igual a 1: $\begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x + 2y + z = 3 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$
Trocamos a 2º equação pela soma da 1º equação, multiplicada por -2, com a 2º

equação: $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x-3y-z=4 \\ 3x-y-2z=1 \end{cases} \Leftarrow[(-2)]\Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=3 \\ -7y-3z=-2 \\ 3x-y-2z=1 \end{cases}$

Trocamos a 3º equação pela soma da 1º equação, multiplicada por -3, com a 3º equação:

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ -7y-3z=-2 \\ 3x-y-2z=1 \end{cases} \Leftarrow[(-3)]\Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=3 \\ -7y-3z=-2 \\ -7y-5z=-8 \end{cases}$$

2º passo: Anulamos os coeficientes da 2º incógnita a partir da 3º equação:

Trocamos a 3º equação pela soma da 2º equação, multiplicada por -1, com a 3º equação:

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ -7y-3z=-2 \\ -7y-5z=-8 \end{cases} \Leftarrow[(-1)]\Rightarrow \begin{cases} x+2y+y=3 \text{ (I)} \\ -7y-3z=-2 \text{ (II)} \\ -2z=-6 \text{ (III)} \end{cases}$$

Agora o sistema está escalonado e podemos resolvê-lo.

$-2z=-6 \Rightarrow z=3$

Substituindo z=3 em (II):

$-7y - 3(3)= -2 \Rightarrow -7y - 9 = -2 \Rightarrow y=-1$

Substituindo z=3 e y=-1 em (I):

$x + 2(-1) + 3= 3 \Rightarrow x=2$

Então, x=2, y=-1 e z=3

EXERCÍCIOS

1) Escalone e resolva o sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 3x-3y+z=8 \\ 2y+z=0 \end{cases}$$

2- (UFRN) A solução do sistema $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 4x+2y-z=5 \\ x+3y+2z=13 \end{cases}$ é:

(-2, 7, 1) b) (4, -3, 5) c) (0, 1, 5) d) (2, 3, 1) e) (1, 2, 3)

3-

Em um restaurante existem mesas de 3, 4 e 6 cadeiras num total de 16 mesas. Ocupando todos os lugares nas mesas de 3 e 4 cadeiras, 36 pessoas ficam perfeitamente acomodadas. Sabendo-se que o restaurante acomoda no máximo 72 pessoas, quantas mesas de cada tipo (3, 4 e 6) , respectivamente, existem?

a) 6, 4 e 6 b) 6, 6 e 4 c) 4, 6 e 6 d) 3,7 e 6 e) 6, 3 e 6

ATIVIDADE 4 (Problemas do SAERJ/Saerjinho)

Habilidade Relacionada:

* Identificar os sistemas lineares como modelos matemáticos que traduzem situações-problemas para a linguagem matemática

* Resolver problemas utilizando sistemas lineares

Pré- Requisitos: Resolução de sistemas lineares 2x2 e 3x3

Tempo de Duração: 80 minutos

Recursos Educacionais Utilizados: folha de atividades, lápis e borracha,

Organização da Turma: duplas

Objetivos:
Resolver um sistema de equações lineares de 3 equações e 3 incógnitas algebricamente .
Mostrar aos alunos a importância do tema que será estudado e sua aplicação em assuntos cotidianos.

Metodologia Adotada

Apresentação de questões diversificadas do SAERJ e Saerjinho envolvendo os conceitos aprendidos sobre sistemas lineares.

EXERCÍCIOS

1ª QUESTÃO

(M114725I) A solução do sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y + 5z = 10 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ é

A) (2, 1, 0)
B) (− 2, 1, 0)
C) (− 1, 0, 2)
D) (2, 0, − 1)
E) (2, − 1, 0)

2ª QUESTÃO

(M11309SI) Resolva o sistema de equações abaixo.

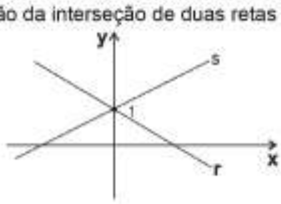
$$\begin{cases} -3x - y + 2z = -6 \\ 2x + y - z = 3 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

A solução desse sistema é

A) (0, 2, 3)
B) (– 6, 3, 1)
C) (1, – 1, – 2)
D) (– 1, 2, 0)
E) (6, – 3, – 1)

3ª QUESTÃO

(PAMA11233MS) Observe a representação da interseção de duas retas r e s abaixo.



Dentre os sistemas abaixo, qual tem sua solução representada acima?

A) $\begin{cases} x - y = -1 \\ -x - y = -1 \end{cases}$

B) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$

C) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - 4 = -1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$

D) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$

E) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$

4ª QUESTÃO

(M11035SI) Observe o sistema linear abaixo.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 90 \\ x + 2y + 3z = 70 \\ 3x + y + 4z = 110 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, encontra-se valores para x, y e z, cuja a soma é

A) 30
B) 36
C) 40
D) 42
E) 50

5ª QUESTÃO

(UNESP-02) Considere três lojas, L_1, L_2 e L_3, e três tipos de produtos, P_1, P_2 e P_3. A matriz a seguir descreve a quantidade de cada produto vendido por cada loja na primeira semana de dezembro. Cada elemento a_{ij} da matriz indica a quantidade do produto P_i vendido pela loja L_j, i,j = 1,2,3.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} L_1 & L_2 & L_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 30 & 19 & 20 \\ 15 & 10 & 8 \\ 12 & 16 & 11 \end{bmatrix} \end{array}$$

Analisando a matriz, podemos afirmar que:

A) a quantidade de produtos do tipo P_2 vendidos pela loja L_2 é 11

B) a quantidade de produtos do tipo P_1 vendidos pela loja L_3 é 30

C) a soma das quantidades de produtos do tipo P_3 vendidos pelas três lojas é 40

D) a soma das quantidades de produtos do tipo P_i vendidos pelas lojas L_i, i = 1, 2, 3, é 52

E) a soma das quantidades dos produtos dos tipos P_1 e P_2 vendidos pela loja L_1 é 45

AVALIAÇÃO

A avaliação é um instrumento fundamental para fornecer informações sobre como está se realizando o processo de ensino- aprendizagem como um todo – tanto para o professor conhecer e verificar os resultados de seu trabalho quanto para o aluno verificar seu desempenho. Além disso, ela deve ser um meio para que possamos reavaliar o processo de ensino, sanando as dificuldades e aperfeiçoando os métodos.

A folha de atividades a ser realizada em duplas será uma forma de avaliação, através dela poderemos verificar as competências e habilidades aprendidas, ela será utilizada como um instrumento de avaliação.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES SOBRE ESTE PLANO DE TRABALHO

Ele foi preparado levando em consideração o tempo disponível de aulas para as turmas do 2º ano/ EJA com 4 aulas semanais e o grau de conhecimento dos alunos. Fiz o planejamento para 3 semanas de aula.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ROTEIROS DE AÇÃO – Sistemas Lineares –

Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 2º ano do Ensino Médio – 4º bimestre/2012 –

http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/

Matemática Contexto & Aplicações – volume 2- Dante – 1ª Edição (2011) – Editora Ática

Matemática Ciência e Aplicações – Volume 2-Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn e Nilze de Almeida – 6ª Edição (2010) – Editora Saraiva

Endereços eletrônicos acessados:

http://brasilescola.com/matriz

http://somatematica.com.br/emedio/matrizes

www.youtube.com.br

WWW.MATEMATIQUES.COM.BR

WWW.MATEMATICAMUNDIAL.COM.BR