FORMAÇÃO CONTINUADA

NÚMEROS COMPLEXOS

ANA CRISTINA DA SILVA FERREIRA

FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ
COLÉGIO ESTADUAL PADRE MANUEL DA NÓBREGA
PROFESSORA ANA CRISTINA DA SILVA FERREIRA
MATRÍCULA: 827293.2
SÉRIE: 3º ANO DO ENSINO MÉDIO
TUTORA: DANÚBIA

SUMÁRIO

FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ
COLÉGIO ESTADUAL PADRE MANUEL DA NÓBREGA
PROFESSORA ANA CRISTINA DA SILVA FERREIRA
MATRÍCULA: 827293.2
SÉRIE: 3º ANO DO ENSINO MÉDIO
TUTORA: DANÚBIA

PLANO DE TRABALHO SOBRE NÚMEROS COMPLEXOS

(Ana Cristina da Silva Ferreira)
(cristinabicho@hotmail.com)

I- Introdução

Iniciaremos o estudo de números complexos relembrando conjuntos numéricos e equações do 2º grau.

Utilizaremos o vídeo: Matemática **- Aula** 08 - **Números complexos** - YouTube para introdução do conteúdo..

Serão incluídos desafios que questionem e ampliem o conhecimento da turma.

Ao desenvolver ideias acerca dos conteúdos estudados, os alunos trabalharão com rascunhos, que lhes permite revisar suas produções, assim como desenvolver a oportunidade de aprimorar seus textos através de revisões individuais e coletivas.

Faremos algumas atividades envolvendo a história dos Números Complexos.

Utilizaremos como suporte, além do livro didático, trabalhos em grupo, pesquisas, ferramentas tecnológicas e outros recursos de forma a tornar a aprendizagem mais significativa.

II- Desenvolvimento

<u>Roteiro de Ação 1</u>

Apresentação do vídeo: Matemática - **Aula** 08 - **Números complexos** - YouTube

Números Complexos

Duração da Aula: 100 minutos

Área de Conhecimento: Equações do 2º grau

Objetivos: Resolver equações do 2º grau com discriminante negativo.

Identificar, conceituar a unidade imaginária e calcular suas potências de expoente inteiro.

Pré-requisitos: Conjuntos Numéricos

Equação do 2º grau

Material didático: • Notebook do professor acompanhado de projetor multimídia.

• Aplicação de dinâmicas de grupo

Organização da classe: Em grupos para troca de conhecimentos e ideias.

Descritores associados:

H48 – Resolver situações-problema envolvendo equação do 2º grau

Habilidades:

-Utilizar situações-problema para introduzir números complexos.

Dando início ao nosso trabalho, abordaremos o conteúdo revisando os conjuntos numéricos e também a equação do 2° grau com discriminante negativo.

Iniciaremos o questionamento das equações do 2º grau dando exemplos para que as resolvam. Dentre as equações trabalhadas, colocaremos uma com discriminante negativo ($\Delta < 0$). Daí, quando pararem dizendo não poder continuar por conta da inexistência de raiz quadrada negativa, começaremos então uma discussão sobre o assunto.

Para fixar melhor, utilizaremos o vídeo: “Números Complexos”, que se encontra acessível em:

Matemática - **Aula** 08 - **Números complexos** - YouTube

Além de trabalhar equações do 2º grau com discriminante negativo, o vídeo também aborda potências de i, número imaginário puro e real.

Roteiro de Ação 2: História dos Números Complexos

Duração: 150 minutos

Área de Conhecimento: Números Complexos

Objetivo: Estudar a Linguagem Matemática e os Números Complexos na vida cotidiana.

Pré- requisitos: Operações de adição, subtração e multiplicação de números reais

Conteúdos: Números Complexos

Operações com Números Complexos

Material didático:

- Fórum de discussões;
- Resolução de problemas;
- Aplicação de dinâmicas de grupo

Recursos de apoio:

Laboratório de Informática

Organização da classe: Em duplas para troca de conhecimentos e ideias.

Descritores associados:

H36 - Efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica.

Habilidades:

-Utilizar situações-problema para introduzir os conceitos de números complexos

Historicamente, os números complexos começaram a ser estudados graças à grande contribuição do matemático Girolamo Cardano (1501-1576). Esse matemático mostrou que mesmo tendo um termo negativo em uma raiz quadrada era possível obter uma solução para a equação do segundo grau: $x^2 - 10x + 40 = 0$. Essa contribuição foi de grande importância, pois até então os matemáticos não acreditavam ser possível extrair a raiz quadrada de um número negativo. A partir dos estudos de Girolamo Cardano, outros matemáticos estudaram sobre esse impasse na matemática, obtendo uma formalização rigorosa com Friedrich Gauss (1777-1855).

O conjunto dos números complexos é o conjunto que possui maior cardinalidade, afinal ele contém todos os outros conjuntos. É necessário, pois, compreender os processos das operações (aritméticas, trigonométricas, algébricas) envolvendo elementos desse conjunto, assim como a representação geométrica dos números complexos.

Portanto, nessa seção serão abordados assuntos como: concepções básicas do número complexo, operações aritméticas com números complexos, operações trigonométricas com os números complexos, o Plano de Argand-Gauss, entre outros artigos que se relacionam com os números complexos – números de grande importância e aplicabilidade.

Após a pesquisa da história dos números complexos e suas aplicações, conversaremos sobre a importância dos números complexos e o conteúdo propriamente dito:

DEFINIÇÕES:

Conjunto de Números Complexos (C) é o conjunto formado pelos pares ordenados (x, y) de números reais para os quais:

Graficamente, os eixos de representação das suas coordenadas x e y denominam-se: eixo de números reais(x) e eixo dos números imaginários(y).

z é complexo na forma ou algébrica ou binomial.

$$z = x + yi$$

z é complexo na forma de par ordenado.

$$\Rightarrow z = (x, y) = x + yi$$

Onde:

x - parte real de *z*

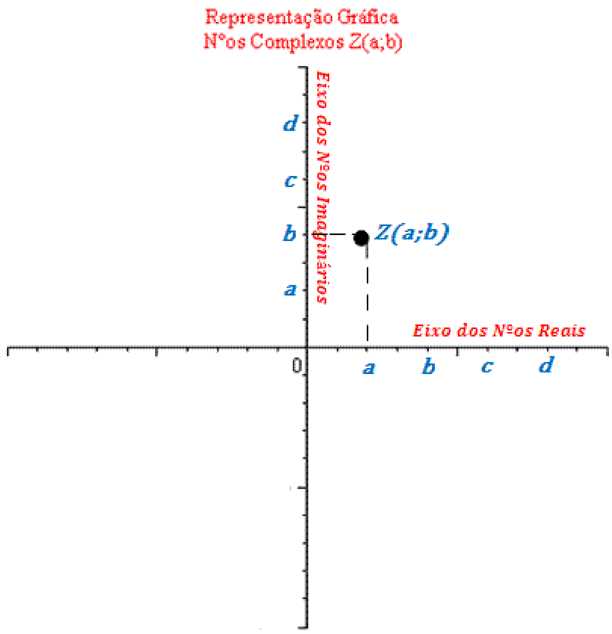
y - parte imaginária de *z*

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE COMPLEXOS

Z(x,y) = Z(nºreal; nºimaginário)

Onde: a coordenada *x* = *um número real*

a coordenada *y* = *um número imaginário*



OPERAÇÕES ENTRE COMPLEXOS

➔ *Correspondência entre Complexo na forma de Par Ordenado(um ponto de um gráfico) e a Forma Algébrica*

$$z = (a, b) = a + bi$$

➔ *Igualdade*

$$(a, b) = (c, d) \Rightarrow a = c, bi = di$$

$$(a + bi) = (c + di) \Rightarrow a = c, bi = di$$

➔ *Adição*

soma nºos reais

$$(a, b) + (c, d) = (a + bi) + (c + di)$$

soma nºos imaginários

$$\Rightarrow (a + b) + (b + d)i$$

➔ *Conjugado*

$$z = a \boxed{+} bi$$

$$\bar{z} = a \boxed{-} bi$$

➔ *Divisão*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 . \overline{z_2}}{z_2 . \overline{z_2}} = z$$

➔ *Multiplicação*

$$z_1 \times z_2 = (a + bi) \times (c + di)$$

$$\Rightarrow z_1 \times z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

EXEMPLOS

Considere os complexos *Z1* e *Z2*, onde *Z1* é número complexo na forma algébrica e *Z2* é numero complexo na forma de par ordenado (uma coordenada cartesiana):

Z1 = 2 + 3i e *Z2(-4;5)*

Determine: Z1+Z2; Z1.Z2; 7Z1-6Z2

O primeiro passo é passar Z2 para a forma algébrica, e assim conseguir efectuar as operaçoes acima proposta, então:

Z2 = (-4;5) = -4 + 5i

Exemplo 1.

(+) + (-) = (-)

→ atribuindo-se o sinal do maior número (-4)

$$z_1 + z_2 = (2+3i) + (-4+5i) = -2+8i = (-2;8)$$

(+) + (+) = (+)

Exemplo 2.

(+) x (+) = (+)

(+) x (-) = (-)

$$z_1 . z_2 = (2+3i) + (-4+5i) = -8+10i-12i+15i^2$$

(+) x (-) = (-)

(+) x (+) = (+)

$$C.A. \Rightarrow \quad i = \sqrt{-1} \quad \Rightarrow \quad (i)^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad i^2 = -1$$

$$\Rightarrow z_1 . z_2 = -8+10i-12i+15.(-1) = -8+10i-12i-15$$

$$\Rightarrow z_1 . z_2 = -23-2i = (-23;\ -2)$$

Exemplo 3.

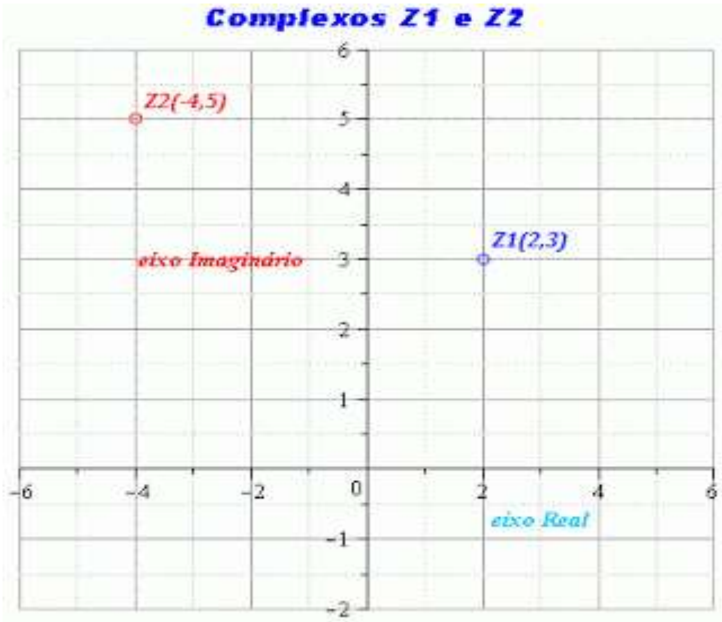
(-) x (-) = (+)

$$7z_1 - 6z_2 = 7.(2+3i) - 6.(-4+5i) = 14+21i+24-30i$$

(-) x (+) = (-)

$$\Rightarrow 7z_1 - 6z_2 = 38-9i = (38;-9)$$

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA **_Z1(2,3)_** **e** **_Z2(-4;5)_**



PROPRIEDADES:

$$z = x + yi \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = \overline{x + yi} = x - yi$$

Definição: O conjugado de um complexo

Ex:

$$z = 5 + 2i \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = 5 - 2i$$

$$z = -3 - 8i \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = -3 + 8i$$

Propriedade 1: A soma de 2 complexos conjugados é sempre um número real.

$$soma \begin{cases} z = x + yi \\ \bar{z} = x - yi \end{cases} \Rightarrow (x + yi) + (x - yi) = x + \cancel{yi} + x - \cancel{yi} = 2x$$

$$\Rightarrow x + x = 2x$$

Propriedade 2: O produto de 2 complexos conjugados é sempre um número positivo.

$$produto \begin{cases} z = x + yi \\ \bar{z} = x - yi \end{cases} \Rightarrow (x + yi) \times (x - yi) = x^2 - \cancel{xyi} + \cancel{xyi} - (yi)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - (yi)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - y^2 i^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - y^2.(-1) \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 \geq 0$$

Propriedade 3: O conjugado do conjugado , de um complexo, é o próprio complexo.

$$\Rightarrow z = x + yi$$

$$\bar{\bar{z}} = z$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{z}} = \overline{\overline{x + yi}} \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = \overline{x - yi} \quad \Rightarrow \quad z = x + yi$$

Propriedade 4: O conjugado da soma, é igual a soma dos conjugados.

$$\Rightarrow \quad \overline{z_1 + z_2} \quad = \quad \overline{z_1} \ + \ \overline{z_2}$$

Propriedade 5: O conjugado do produto, é igual ao produto dos conjugados.

$$\Rightarrow \quad \overline{z_1 \ . \ z_2} \quad = \quad \overline{z_1} \ . \ \overline{z_2}$$

<u>Roteiro de Ação 3</u>

Duração: 150 minutos

Área de Conhecimento: Potências de i

Objetivo: Calcular potências da unidade imaginária com expoentes naturais e resolver uma equação com raízes complexas.

Pré- requisitos: Divisão de números inteiros

.Material didático:

- Livro didático;
- Fórum de discussões;
- Resolução de problemas
- Aplicação de dinâmicas de grupo

Recursos de apoio:

Apostila do Reforço Escolar

Organização da classe: Em duplas para troca de conhecimentos e idéias.

Em grupo, para confecção e manuseio dos jogos matemáticos.

Descritores associados:

H36 - Efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica.

Habilidades:

-Utilizar situações-problema para introduzir os conceitos de números complexos

Desenvolvimento

Para dominar melhor o conteúdo, trabalharemos a ludicidade, com uma atividade: **Atividade · Complexos, mas ... não tanto** (aplicados em 2014 no Reforço Escolar).

Essa atividade tem como objetivo trabalhar as potências de i.

Atividade · Complexos, mas ... não tanto.

Descrição da atividade

Esta é uma atividade em que o aluno vai usar propriedades já conhecidas para potências de bases reais positivas e expoentes naturais estendendo-as para o caso da unidade imaginária. Ao aplicar estas propriedades, o aluno vai poder calcular qualquer potência de base i e expoente natural, além de perceber a existência das raízes quadradas de qualquer número real negativo, que são os números imaginários ou imaginários puros, como são conhecidos.

Eis as questões como serão propostas ao aluno:

A definição da unidade imaginária, i, propicia a construção de um conjunto bem maior de números que estende o conjunto dos números reais. Entre esses números, as operações são definidas de modo que se mantenham grande parte das propriedades que elas possuíam nos números reais. Por exemplo:

Dadas as definições:

.$i^0 = 1$

.$i^1 = i$

.$i^{n+1} = i^{n \times i}$, se n ≥ 1, n natural.

Têm-se:

.Se r e s são números inteiros, para a base i valem as propriedades que valiam para bases reais positivas: ir × is = ir + s e (ir)s = ir × s.

.Vale ainda a propriedade que permite o cálculo da raiz quadrada de qualquer número real, mesmo que ele seja negativo: ab ×= a × b .

Usando estas propriedades, você vai conhecer alguns outros números imaginários nas próximas questões:

Questão 1:

Complete a tabela a seguir:

$\sqrt{-1} =$	
$\sqrt{-4} =$	$\sqrt{4\times(-1)} = \sqrt{4}\times\sqrt{-1} = 2i$
$\sqrt{4} =$	
$\sqrt{-0,25} =$	$\sqrt{0,25\times(-1)} = \sqrt{0,25}\times\sqrt{-1} = 0,5i$
$\sqrt{-100} =$	
$i^{20} =$	$(i^4)^5 = 1^5 = 1$
$i^{30} =$	$i^{28} \times i^2 = (i^4)^7 \times (-1) = 1^7 \times (-1) =$ $= 1 \text{ x } (-1) = -1$
$i^{100} =$	$(i^4)^{25} = 1^{25} = 1$

$i^2 =$	
$i^3 =$	$i^2 \times i = (-1) \times i = -i$
$i^4 =$	
$i^5 =$	
$i^6 =$	
$i^{21} =$	
$i^{31} =$	
$i^{102} =$	

QUESTÃO 2:

Como você agora já tem como calcular $\sqrt{-100}$, qual é a solução dada pela fórmula, dita de Bhaskara, da segunda equação da primeira etapa, $x^2 + 20x - 125 = 0$, cujo discriminante é $\Delta = -100$?

Os números desta fórmula, com uma parte real (– 10) e uma parte imaginária (+5i ou –5i) são chamados números complexos.

Fixaremos o conteúdo com um exercício:

Colégio Estadual Padre Manuel da Nóbrega

Aluno(a):____

Professora: Ana Cristina Turma:__________ Nº: ______

Exercícios de Matemática

1. (USP) O produto (5 + 7 i) . (3 - 2 i) vale:

a. 1 + 11i b. 1 + 31i c. 29 + 11i d. 29 - 11i e. 29 + 31i

2. (UFPA) O número complexo z = x + (x^2 - 4) i é real se, e somente se:

a. $x \neq 0$ b. $x = \pm 2$ c. $x \neq \pm 2$ d. $x \neq 0$ e $x \neq \pm 2$ e. $x = 0$

3. (UFPA) Qual é o valor de m, real, para que o produto (2 + m i) . (3 + i) seja um imaginário puro ?

a. 5 b. 6 c. 7 d. 8 e. 10

4. (UFU - MG) Sejam os números complexos z_1= 2x + 3 i e z_2= 2 + y i, onde x e y são números reais. Se z_1=z_2, então o produto x . y é:

a. 6 b. 4 c. 3 d. -3 e. -6

5. (ACAFE - SC) Se z = 2 + 2 i é um número complexo, então w = z + z i é:

a. 4 i b. 4 - 4 i c. 4 d. - 4 + 4 i e. 4 + 4 i

6. (OSEC - SP) Se f(z) = z^2 - z + 1 então f (1 - i) é igual a:

a. i b. - i + 1 c. i - 1 d. i + 1 e. -i

7. (MACK - SP) Sejam os números complexos z_1 e z_2 , onde z_2 = 3 i e z_1 . z_2 = -9 + 6 i . Então z_1 + z_2 vale:

a. 2 + 6 i b. 2 - 6 i c. -3 + 3 i d. -3 - 3 i e. 9 i

8. (UEL - PR) Sejam os números complexos w = (x - 1) + 2 i e v = 2x + (y -3) i, onde x, y $\in$ IR. Se w = v, então:

a. x + y = 4 b. x . y = 5 c. x - y = -4 d. x = 2y e. y = 2x

9. (FESO - RJ) O valor de i^{1996} é de:

a. 1 b. -1 c. i d. -i e. 499

10. (USF - SP) Se o número complexo z é tal que z = $i^{45} + i^{28}$ então z é igual a:

a. 1 - i b. 1 + i c. -1 + i d. -1 - i e. i

11. (MACK - SP) O conjugado de $\frac{2-i}{i}$ vale:

a. 1 - 2i b. 1 + 2i c. 1 + 3i d. -1 + 2i e. 2 – i

12.. (UFRN) Se z = 4 + 2i, então $z - 3\bar{z}$ vale:
a. 6 + i b. 1 + 8i c. -8 + 8i d. 1 - 8i e. 12 + 6i

III- Avaliação

Os alunos serão avaliados diariamente, mediante suas anotações, as observações produzidas a partir das discussões em aula, os conceitos formados, os exercícios resolvidos em aula e em casa, os resumos, as atividades em grupo e a prova escrita.

As atividades serão realizadas em sala de aula e no laboratório de Informática.

A avaliação deverá ser feita de forma que se torne possível identificar através dos resultados das atividades sugeridas e da análise da participação dos alunos nas aulas, a capacidade desses alunos reconhecerem Números Complexos e a utilidade dos mesmos.

IV - Referências Bibliográficas

Fontes:

Vídeo : Números Complexos. Disponível em:
<Matemática - **Aula** 08 - **Números complexos** - YouTube**>**
(acessado em 25/08/2014)

Atividades: Potências de i
<file:///C:/Users/Administrador/Downloads/S03_D01_Alun_3B_Mat.pdf>
(acessado em 25/08/2014)

História dos números complexos e suas utilidades:
<http://www.brasilescola.com/matematica/numeros-complexos.htm>
(acessado em 25/08/2014)

Conteúdo propriamente dito:Números Complexos e Operações
<http://aprendermmatematica.blogspot.com.br/p/numeros-complexos.html>
(acessado em 25/08/2014)