Reforço escolar · Matemática ·

Professor

Do Basquete ao futsal

Dinâmica 5

3ª Série | 1º Bimestre

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	3ª do Ensino Médio	Numérico Aritmético	Análise Combinatória

DINÂMICA	Do basquete ao futsal.
HABILIDADE BÁSICA	H51 – Resolver problemas com números racionais, envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão).
HABILIDADE PRINCIPAL	H60 – Resolver problemas de contagem, utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjos simples e/ou combinações simples.
CURRÍCULO MÍNIMO	Identificar e diferenciar os diversos tipos de agrupamentos.

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos.

GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fundação CECIERJ Consórcio cederj

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar Ideias	Achei meus companheiros	de 10 a 15 min.	Formar grupos de 5 alunos.	Individual
2	Um novo olhar...	Esqueci a fórmula, e agora?	de 20 a 30 min.	Nos mesmos grupos, com correção coletiva.	Individual
3	Fique por dentro!	Compondo seleções	de 25 a 35 min.	Nos mesmos grupos.	Individual
4	Quiz	Quiz	10 min	Individual	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quiz	15 min	Coletiva	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor, se tiver dúvidas.			

Apresentação

Nesta dinâmica, são focalizados dois temas. Nas etapas de revisão, são propostas atividades sobre a divisão de frações, começando por frases já prontas que justificam o procedimento da inversão da segunda fração e avançando para uma atividade em que o aluno faz o cálculo diretamente, com o intuito de promover maior agilidade na operação. No tema do Currículo, é feita uma análise dos diferentes agrupamentos que, por serem muito frequentes, recebem nomes especiais. Essa análise evita as definições formais a fim de não criar conflito com as definições que o aluno está vendo no curso regular. Para o aluno iniciante e num assunto que, por sua natureza, causa algum desconforto para grande parte dos estudantes, uma modificação na linguagem pode causar a impressão de que sejam objetos distintos com o mesmo nome.

Primeira Etapa
Compartilhar Ideias

15 MINUTOS

Atividade • Achei meus companheiros

Objetivo

Justificar o procedimento do cálculo da divisão de frações.

Descrição da atividade

Cada aluno vai receber 1 cartão com parte de uma frase. São precisos 5 cartões para completar cada uma das frases:

$$\frac{2}{3} \div \frac{5}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15} \text{ porque } \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2}{3}.$$

$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\quad}{15} \text{ porque } \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2}{5}.$$

$$\frac{3}{2} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8} \text{ porque } \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{2}.$$

$$\frac{5}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{6} \text{ porque } \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{2}.$$

$$\frac{4}{3} \div \frac{7}{2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{8}{21} \text{ porque } \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 7} \cdot \frac{7}{2} = \frac{4}{3}.$$

Os 5 alunos que completarem uma frase verdadeira formam um grupo.

Recursos necessários

- Encarte do Aluno
- Cartões para recortar, em anexo.

Procedimentos Operacionais

- *Como em outras ocasiões, os cartões precisam ser recortados com antecedência.*
- *Para ajudar os alunos a formarem a sua frase, será bom escrever no quadro uma frase mais simples como, por exemplo:*

8 ÷ 2 = 4 porque 4 x 2 = 8

- *O número de cartões a serem distribuídos tem que ser um múltiplo de 5. Se o número de alunos presentes não for múltiplo de 5, será preciso fazer uma escolha entre dar mais cartões a alguns alunos, ou 1 cartão para 2 ou 3 alunos.*

Intervenção Pedagógica

Professor:

Os alunos, em geral, decoram essas regras sem saber qual a sua razão. A apresentação de uma justificativa pode ajudar o aluno a decorar com mais facilidade as regras que terão que usar daqui para a frente, de um modo mais automático.

É, portanto, muito importante frisar a regra para a divisão de frações:

Multiplicar a 1ª fração pelo inverso da 2ª fração.

e observar dois pontos sobre esta atividade:

1. *Os exemplos são só para dar uma justificativa. Quando o aluno tiver que dividir uma fração por outra, vai aplicar diretamente a regra.*
2. *Essas justificativas não são uma demonstração, pois estão apoiadas somente em casos particulares.*

Segunda Etapa

Um novo olhar...

25 MINUTOS

Atividade • Esqueci a fórmula e agora?

Objetivo

Utilizar a regra da divisão de frações.

Descrição da atividade

Esta atividade utiliza a definição de progressão geométrica (PG), a fim de provocar o uso da divisão de frações. O primeiro exercício, começando com números inteiros, pretende mostrar o caminho ao aluno. Nos exercícios seguintes, tendo já o caminho traçado, a dificuldade fica só na divisão de frações.

Uma questão do concurso que Mirela estava prestando pedia que fossem completadas algumas progressões geométricas. Mirela só se lembrava de que, numa PG, cada termo é obtido multiplicando-se o anterior por um número, chamado razão. Mirela não se lembrava de fórmula alguma, mas estava muito interessada em ter uma boa nota. Vamos ajudar Mirela a resolver essa questão?

Questão

Em cada uma das linhas abaixo, está escrita uma progressão geométrica. Complete os termos que faltam, escrevendo os termos não inteiros na forma de fração:

Resposta

1º termo da PG	2º termo da PG	3º termo da PG	4º termo da PG	Razão
$2 \div 2 = 1$	$4 \div 2 = 2$	4	8	$8 \div 4 = 2$
$\frac{5}{9} \div \frac{6}{5} = \frac{5}{9} x \frac{5}{6} = \frac{25}{54}$	$\frac{2}{3} \div \frac{6}{5} = \frac{2}{3} x \frac{5}{6} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{4}{5} x \frac{3}{2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$
$\frac{3}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{4} x \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$	$\frac{1}{2} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{2} x \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$	$\frac{1}{3} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{3} x \frac{3}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Recursos necessários

- Encarte do aluno

Procedimentos Operacionais

- *Talvez seja necessária uma leitura coletiva da questão, a fim de que os alunos compreendam que alguns dados já estão na tabela e que as operações que eles devem fazer são divisões para ir de um termo para o anterior, como inversas das multiplicações feitas de um termo para o seguinte, numa PG.*

Intervenção Pedagógica

Professor:

- *Nesta etapa, o estudante deve fazer as divisões diretamente pela aplicação da regra, sem recorrer à justificativa.*
- *A correção pode ser feita coletivamente, mas só no final, pois se o aluno conhecer o 1º termo da PG, poderá preencher a tabela com multiplicações e não com divisões, o objetivo desta etapa.*

Terceira Etapa

Fique por dentro!

Atividade • Compondo seleções.

Objetivo

Comparar agrupamentos como arranjos, combinações ou permutações.

Descrição da atividade

Cada grupo vai montar um quebra-cabeça muito simples, que serve para que eles copiem exemplos de agrupamentos, chamados de arranjos ou combinações ou permutações.

A opção por dar exemplos desses agrupamentos ao invés de suas definições tem o objetivo de evitar alguma eventual diferença no enunciado das definições entre as que se deem aqui e aquelas utilizadas pelo professor no curso regular. Embora os enunciados digam a mesma coisa, o fato de dizerem de um modo diferente pode atrapalhar o aluno que está vendo o assunto pela primeira vez.

Quebra-cabeça

Você e seus colegas de grupo vão analisar agora alguns tipos de agrupamentos que precisam ser contados e que apresentam certos aspectos em comum.

Serão usados exemplos numéricos, em que a distinção entre os diversos agrupamentos é bem natural.

É fácil: basta juntar as figuras que completam o retângulo a seguir e vocês terão o nome que se dá a cada tipo desses agrupamentos.

Para você guardar melhor essa distinção e poder consultar mais tarde estas anotações, assim que seu grupo consiga montar os 3 retângulos, copie as definições aqui no seu encarte.

Considere todos os números de 6 algarismos distintos dois a dois, que podem ser escritos usando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.	**PERMUTAÇÕES de 6 elementos.**

Considere todos os números de 3 algarismos distintos dois a dois, que podem ser escritos usando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.	**ARRANJOS de 6 elementos, 3 a 3.**

Numa cartela com 6 números, você pode apostar em 3. Considere todas as apostas distintas em pelo menos 1 número.	**COMBINAÇÕES de 6 elementos, 3 a 3.**

Questão

Agora, vocês têm condições de classificar cada uma das situações a seguir em arranjos (A), combinações (C) ou permutações (P).

Mãos à obra!

SITUAÇÕES	TIPO DOS AGRUPAMENTOS
O técnico de basquete do seu time dispõe de 5 Pivôs e pretende usar 2 em cada formação. Quantas formações ele pode armar trocando, pelo menos, 1 pivô?	(C) combinações de 5, 2 a 2.
O professor de futebol está com 11 candidatos e pretende testar esses meninos em todas as posições possíveis. Para isso, vai fazer um rodízio jogando com esses 11 meninos, em todas as posições. Quantos times terá formado se considerar times distintos aqueles em que, haja, pelo menos, 1 troca de posições?	(P) permutações de 11 elementos.
No treino de amanhã, o técnico da seleção de vôlei de Calculândia quer treinar seus 8 jogadores nas posições de Ataque direita, Ataque centro e Ataque esquerda. Quantos trios ele vai formar considerando como diferentes, trios que tenham, pelo menos, 1 posição ocupada por 1 jogador diferente?	(A) arranjos de 8 elementos, tomados 3 a 3.
Num campeonato de xadrez entre 10 jogadores, cada jogador vai jogar uma única partida com cada um dos adversários. Para contar essas partidas, devo calcular permutações de 10, combinações de 10, 2 a 2 ou arranjos de 10, 2 a 2?	(C) combinações de 10 elementos, tomados 2 a 2.
A turma 1102 vai participar de um campeonato de queimada com 10 jogadores de cada lado. A turma tem 25 alunos e todos querem participar. O professor de Educação Física pediu que eles contem quantas equipes pode formar, considerando diferentes 2 equipes em que haja, pelo menos, 1 jogador diferente. Que tipo de agrupamentos eles devem calcular?	(C) combinações de 25 elementos, tomados 10 a 10.

Recursos necessários:

- Encarte do aluno
- Peças dos quebra – cabeças, disponíveis para recorte em anexo.

Procedimentos Operacionais

- *As peças dos quebra-cabeças foram previstas para que cada grupo receba um conjunto com as peças de 3 retângulos. É conveniente que esse recorte seja feito com antecedência.*
- *Se os alunos tiverem muita dificuldade em analisar os diferentes tipos de agrupamentos ao responder à questão desta etapa, vale a pena fazer uma discussão coletiva no final.*

Professor

Professor:

- *Os problemas de contagem podem ser resolvidos, em geral, pelo uso dos Princípios Multiplicativo e Aditivo. Essa nomenclatura, entretanto, é muito utilizada em concursos e o uso das fórmulas pode agilizar a solução de vários problemas.*
- *Vale a pena salientar as diferenças entre esses vários agrupamentos: o caso das permutações é mais evidente, pois o número de elementos em cada agrupamento é o total de elementos considerados. Além disso, como os agrupamentos possuem os mesmos elementos, a única distinção fica por conta da ordem em que eles se encontram. Já no caso dos arranjos e combinações, cada agrupamento não contém todos os elementos. Então a diferença entre eles pode ser na ordem em que eles se encontram ou num ou noutro elemento distinto. Se a ordem ou elementos diferentes tornam o agrupamento diferente, tais agrupamentos se denominam arranjos. Se a ordem não distingue, ou seja, somente elementos diferentes é que tornam os agrupamentos diferentes, então, tais agrupamentos se denominam combinações.*
- *Quanto às fórmulas de cálculo, a contagem de permutações ou de arranjos segue diretamente do Princípio Multiplicativo. O caso das combinações é mais complicado, pois usa um quociente que pode não ser tão natural para o estudante. Talvez seja preciso que ele trabalhe com vários exemplos antes de analisar o caso geral.*

Quarta Etapa
Quiz

10 MINUTOS

Questão (Saerjinho, 3º bimestre de 2011, 3ª série, adaptada)

Um técnico de futebol de salão quer testar todas as formações possíveis para seu time que dispõe de 7 jogadores de linha, que jogam em qualquer posição, e 1 goleiro. Para cada partida, o time é formado por 4 jogadores de linha, mantendo sempre o mesmo goleiro.

Quantas formações distintas esse técnico poderá testar, considerando distintas formações que tenham, pelo menos, 1 jogador diferente?

a. 24

b. 28

c. 35

d. 840

e. 5 040

Quinta Etapa
Análise das Respostas ao Quiz

Resposta

Se o goleiro é sempre o mesmo, ele não vai fazer diferença nesta contagem. Serão, portanto, 7 jogadores dos quais 4 fazem parte da formação, em qualquer posição. Como a distinção entre as formações só é feita pela troca de algum jogador, sem levar em conta a sua posição, este é um caso de combinações de 7 elementos, tomados 4 a 4. Para o aluno que conheça a fórmula

$$C_4^7 = \binom{7}{4} = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 7 \times 5 = 35$$

e **a opção correta é (c)**.

Lembramos que há um outro modo de escrever esta mesma fórmula:

$$C_4^7 = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!\times3!}$$

pois, completando o produto no numerador até 1, e compensando pela multiplicação do denominador por 4!, aparecem só fatoriais:

$$C_4^7 = \binom{7}{4} = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(4\times3\times2\times1)\times(3\times2\times1)} = \frac{7!}{4!\times3!} =$$

O *cálculo direto* é um pouco mais longo, mas é possível. Vamos numerar os jogadores de 1 a 7. Ora, com *o jogador 1 são possíveis as formações seguintes*:

FORMAÇÕES COM OS JOGADORES 1 E 2	1234 1235 1236 1237	1245 1246 1247	1256 1257	1267	**Total parcial: 10**
CONTAGEM	4	3	2	1	
FORMAÇÕES AINDA COM OS JOGADORES 1 E 3		1345 1346 1347	1356 1357	1367	**Total parcial: 6**
CONTAGEM		3	2	1	
FORMAÇÕES AINDA COM OS JOGADORES 1 E 4			1456 1457	1467	**Total parcial: 3**
CONTAGEM			2	1	

Professor

FORMAÇÕES AINDA COM OS JOGADORES 1 E 5				1567	**Total parcial: 1**
CONTAGEM				1	

Observe que não está contada a formação 1342, pois ela é a mesma que 1234 e assim com as demais, por isso o número de formações vai diminuindo. Não há, portanto, nenhuma outra formação com o jogador 1.

Com o jogador 2, ainda não foram contadas as seguintes formações:

FORMAÇÕES AINDA COM OS JOGADORES 2 E 3	2345 2346 2347	2356 2357	2367	**Total parcial: 6**
CONTAGEM	3	2	1	
FORMAÇÕES AINDA COM OS JOGADORES 2 E 4		2456 2457	2467	**Total parcial: 3**
CONTAGEM		2	1	
FORMAÇÕES AINDA COM OS JOGADORES 2 E 5			2567	**Total parcial: 1**
CONTAGEM			1	

Já foram contadas todas as formações com o jogador 2, mas ainda há outras com os outros jogadores:

FORMAÇÕES AINDA COM OS JOGADORES 3 E 4	3456 3457	3467	**Total parcial: 3**
CONTAGEM	2	1	
FORMAÇÕES AINDA COM OS JOGADORES 3 E 5		3457	**Total parcial: 1**
CONTAGEM		1	

A única formação que não foi contada ainda é 4567.

O total final é a soma dos totais parciais, que dá: $10 + 2 \times 6 + 3 \times 3 + 4 \times 1 = 10 + 12 + 9 + 4 = 35$, como se calculou diretamente da fórmula.

Distratores

- O aluno que tenha ouvido falar da ocorrência do fatorial em problemas de contagem, mas sem muito conhecimento, poderia calcular $4! = 24$ e marcaria a opção (a).
- *Alguns alunos costumam procurar a ligação entre os dados numéricos dos testes e as alternativas, nesse caso, a opção (b) seria a mais atrativa, pois é o produto de dois números da questão: $7 \times 4 = 28$.*

- *O aluno que saiba as fórmulas de cor, mas não tenha percebido que o problema se referia a combinações e não a arranjos, uma vez, que o técnico considerou que os jogadores poderiam ocupar qualquer posição, pode ter usado a fórmula de arranjos, obtendo*

$$A_4^7 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$

e ter marcado, portanto, a opção (d). Vale lembrar que esta fórmula também pode ser escrita só com fatoriais:

$$A_4^7 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1} = \frac{7!}{3!} = \frac{7!}{(7-4)!}$$

- *E, finalmente, o aluno que usou o fatorial, mas foi mais adiante calculando 7!, obteve 5040 e optou pela letra (e).*

Etapa Flex

Para saber +

1. Vale observar que as fórmulas para o cálculo desses agrupamentos podem ser obtidas do Princípio Multiplicativo. No caso dos arranjos e permutações, a aplicação é direta, pois as escolhas são feitas em ordem. Ao analisar a situação, fica até bem claro que as permutações são casos particulares de arranjos, em que os agrupamentos são formados por todos os elementos.

   O caso das combinações, é um pouco mais delicado e o Princípio Multiplicativo é aplicado 2 vezes. No caso da questão do Quiz desta dinâmica, é possível verificar o que acontece e o raciocínio no caso geral não difere muito do que é feito neste caso. Senão, vejamos: formados todos os agrupamentos possíveis com 4 elementos distintos entre os 7 jogadores, seriam 7 possibilidades para escolha do 1º jogador, 6 para escolha do 2º, 5 para escolha do 3º e 4 para escolha do 4º jogador, o que dá um total de $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ escolhas dos jogadores nessa ordem. Mas, por exemplo, o grupo dos 4 primeiros jogadores aparece em outras escolhas como 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, ... 2134, 2143, ... ou seja, aparece $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$ vezes e isso acontece com qualquer um dos grupos. Ou seja, como os jogadores podem ficar em qualquer posição, cada formação estaria contada 24 vezes e o número final seria, então, $840 \div 24 = 35$, como foi obtido anteriormente.

2. Para uma revisão deste assunto, num outro contexto, você pode acessar o *site*

- http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1083

onde está disponível um vídeo cuja sinopse é a seguinte:

Professor

Raquel está prestes a sair de viagem e não consegue colocar todas as roupas que precisa na sua mala. Com a ajuda de um funcionário da empresa aérea, através de conceitos combinatórios, Raquel tentará resolver o problema da sua mala. Neste vídeo, eles usam a sigla PFC, Princípio Fundamental de Contagem, para o que é chamado no Currículo Mínimo de Princípio Multiplicativo.

3. Em

- http://www.uff.br/sintoniamatematica/grandestemaseproblemas/grandestemaseproblemas-html/audio-caixeiro-br.html

você vai conhecer o Problema do Caixeiro Viajante e em

- **http://www.ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/i-ermac/anais/mini-cursos/mc2.pdf**

você encontra um outro problema sobre caminhos. São os passeios aleatórios da Mônica que levam ao cálculo de probabilidades, mas envolvem a contagem de caminhos que vão da casa da Mônica à casa de cada um de seus amigos.

Agora, é com você!

1. Acompanhe o diálogo entre 2 estudantes que acabaram de estudar a divisão de números racionais na forma de frações.

Joca: *Hoje, vimos como se faz a divisão de frações. E sabe o que percebi? Que posso dividir 8 por um número e obter 12.*

Kadu: *Acho que você está enganado. Quando você divide, o resultado tem que ser menor. Afinal você dividiu, ou não?*

E, agora, você decide: quem está com a razão? Será que você consegue refazer o cálculo que Joca fez?

Resposta

Ora, pela definição de divisão, $8 \div x = 12$ se, e só se: $12x = 8$. Mas então: $x = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. Daí, ele conferiu: $8 \div \frac{2}{3} = \frac{8}{1} \div \frac{2}{3} = \frac{8}{1} \times \frac{3}{2} = \frac{24}{2} = 12$.

• • • • •

E como você pode explicar ao Kadu que uma divisão pode mesmo ter quociente (= resultado da divisão) maior do que o dividendo (= número que está sendo dividido)? Pense em dividir 8 litros de água em garrafinhas de $\frac{2}{3}$ de litro.

Resposta

Um exemplo que nos acompanha em muitas circunstâncias é o de dividir água em vasilhas menores. Por exemplo, se você for dividir 8 litros de água em garrafinhas que tenham $\frac{2}{3}$ de litro, é claro que você vai poder encher mais que 8 garrafinhas, certo? Pelos cálculos do Joca, você vai poder encher 12 garrafinhas. E, veja, por que isso aconteceu? Porque você estava dividindo 8 litros por um número que não chegava a 1. E isso é um fato geral, quando você faz uma divisão por um número menor do que 1, o resultado é maior do que o dividendo.

O mito de que o quociente seja sempre menor do que o dividendo resulta do fato de que, nos números naturais, só dividimos por 1 ou por números maiores do que 1. Não há divisor menor do que 1 nos naturais, pois não se divide por 0. Então, nos números naturais o quociente é igual ao dividendo quando o divisor é 1 ou menor do que o dividendo nos demais casos. Já nos racionais a história é outra!

• • • • •

E a conversa continua:

Kadu*: Eu não havia percebido tal modificação. Foi bom você me ensinar. Mas ... agora vejo que, então, é possível dividir qualquer número por qualquer número, não?*

Joca: *Aí já não sei. Talvez você esteja exagerando.*

Kadu: *Você tem razão, não dá mesmo para dividir por 0, mesmo considerando todos os números. Mas se o divisor não for 0, você pode dividir qualquer número racional por outro racional não nulo.*

Joca: *Será?*

Como você pode resolver essa dúvida levantada por Kadu?

Resposta

Ora, pelo que foi visto, considere 2 frações quaisquer, tendo o cuidado de que a segunda não seja 0. Por exemplo, vamos considerar as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, em que b e d não são nulos, pois são denominadores e c também é diferente de 0 porque não queremos que a segunda fração seja 0. Vamos tentar fazer a divisão:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

e $\frac{ad}{bc}$ *é um número racional, pois o denominador bc não é nulo por ser o produto de 2 números não nulos. Pronto, é possível, sim, fazer a divisão de qualquer número racional por um racional não nulo.*

Isso vale mesmo para os números irracionais, mas isso já é uma outra conversa.

É claro que não se espera do aluno uma argumentação nesse nível. O importante é que ele pense no assunto.

• • • • •

Joca ainda não está satisfeito e pergunta:

Joca: *Então você sabe me dizer qual o número que multiplicado por* $\frac{5}{7}$ dá $\frac{2}{9}$ *?*

Kadu: *Claro Joca, como a divisão e a multiplicação são operações inversas, basta você dividir* $\frac{2}{9}$ *por* $\frac{5}{7}$ *e vai obter a resposta.*

Você pode fazer o cálculo que Kadu fez e descobrir como Joca fez a verificação para se convencer de que Kadu estava certo?

Resposta

O cálculo que Kadu fez foi a divisão $\frac{2}{9} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{9} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{45}$ *e Joca, desconfiado, fez a multiplicação:* $\frac{14}{45} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \times 7 \times 5}{9 \times 5 \times 7} = \frac{2}{9}$.

• • • • •

2. Que tal agora praticar um pouco mais? No link a seguir você poderá encontrar diversos exercícios *on line* sobre a divisão de frações:

- http://www.estudamos.com.br/fracao/exercicios_dividir_fracoes_1.php

Bom estudo!

$\frac{2}{3} \div \frac{5}{4} =$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} =$	$\frac{8}{15}$ porque	$\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{5}{4}$	$= \frac{2}{3}.$
$\frac{2}{5} \div \frac{3}{2} =$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} =$	$\frac{4}{15}$ porque	$\frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 3} \cdot \frac{3}{2}$	$= \frac{2}{5}.$
$\frac{3}{2} \div \frac{4}{5} =$	$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} =$	$\frac{15}{8}$ porque	$\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4}{5}$	$= \frac{3}{2}.$
$\frac{5}{2} \div \frac{3}{4} =$	$\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} =$	$\frac{20}{6}$ porque	$\frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3}{4}$	$= \frac{5}{2}.$
$\frac{4}{3} \div \frac{7}{2} =$	$\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{7} =$	$\frac{8}{21}$ porque	$\frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 7} \cdot \frac{7}{2}$	$= \frac{4}{3}.$

Considere todos os números de 6 algarismos distintos dois a dois, que podem ser escritos usando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

PERMUTAÇÕES de 6 elementos.

Considere todos os números de 3 algarismos distintos dois a dois, que podem ser escritos usando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

ARRANJOS de 6 elementos, 3 a 3.

Numa cartela com 6 números, você pode apostar em 3. Considere todas as apostas distintas em pelo menos 1 número.

COMBINAÇÕES de 6 elementos, 3 a 3.

Considere todos os números de 6 algarismos distintos dois a dois, que podem ser escritos usando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.	**PERMUTAÇÕES de 6 elementos.**
Considere todos os números de 3 algarismos distintos dois a dois, que podem ser escritos usando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.	**ARRANJOS de 6 elementos, 3 a 3.**
Numa cartela com 6 números, você pode apostar em 3. Considere todas as apostas distintas em pelo menos 1 número.	**COMBINAÇÕES de 6 elementos, 3 a 3.**

Anexo I

Considere todos os números de 6 algarismos distintos dois a dois, que podem ser escritos usando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.	**PERMUTAÇÕES de 6 elementos.**
Considere todos os números de 3 algarismos distintos dois a dois, que podem ser escritos usando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.	**ARRANJOS de 6 elementos, 3 a 3.**
Numa cartela com 6 números, você pode apostar em 3. Considere todas as apostas distintas em pelo menos 1 número.	**COMBINAÇÕES de 6 elementos, 3 a 3.**

Considere todos os números de 6 algarismos distintos dois a dois, que podem ser escritos usando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.	**PERMUTAÇÕES de 6 elementos.**
Considere todos os números de 3 algarismos distintos dois a dois, que podem ser escritos usando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.	**ARRANJOS de 6 elementos, 3 a 3.**
Numa cartela com 6 números, você pode apostar em 3. Considere todas as apostas distintas em pelo menos 1 número.	**COMBINAÇÕES de 6 elementos, 3 a 3.**

Anexo I

Considere todos os números de 6 algarismos distintos dois a dois, que podem ser escritos usando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.	**PERMUTAÇÕES de 6 elementos.**
Considere todos os números de 3 algarismos distintos dois a dois, que podem ser escritos usando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.	**ARRANJOS de 6 elementos, 3 a 3.**
Numa cartela com 6 números, você pode apostar em 3. Considere todas as apostas distintas em pelo menos 1 número.	**COMBINAÇÕES de 6 elementos, 3 a 3.**

Anexo I

Considere todos os números de 6 algarismos distintos dois a dois, que podem ser escritos usando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

PERMUTAÇÕES de 6 elementos.

Considere todos os números de 3 algarismos distintos dois a dois, que podem ser escritos usando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

ARRANJOS de 6 elementos, 3 a 3.

Numa cartela com 6 números, você pode apostar em 3. Considere todas as apostas distintas em pelo menos 1 número.

COMBINAÇÕES de 6 elementos, 3 a 3.