Formação Continuada em MATEMÁTICA
Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ

Sistemas Lineares

Matemática 2° Ano – 4° Bimestre/2014
Tarefa 1
Grupo 1

Elaboração do plano de trabalho 1
Cursista: Maria Delfina Ribas Ferreira
Tutora: Susi Cristine Britto Ferreira

Introdução

A finalidade da aplicação de Sistemas Equações Lineares é encontrar as possíveis soluções que o problema oferece, sejam elas uma única solução ou infinitas soluções. Para Dante (2008, p. 832), “Resolver um sistema linear significa descobrir o seu conjunto solução S, formado por todas as soluções do sistema”. Ou seja, as possíveis soluções de Sistemas de Equações Lineares são classificadas de três maneiras: ele pode ser um sistema possível e determinado, com apenas uma única solução; pode ser um sistema impossível, ou seja, sem nenhuma solução; ou ainda ser um sistema possível e indeterminado, com infinitas soluções.

O sistema linear sem duvida é utilizado no nosso cotidiano, nas profissões, em técnicas para se resolver problemas. Como:cálculo de estrutura de (pontes, torres, edifícios), No Planejamento de produção (quando e o que produzir), na robótica, o posicionamento das juntas de um robô é feito através da resolução de sistemas lineares, na estatística,

Na prática redes elétricas com centenas ou milhares desses elementos são resolvidos usando sistemas lineares. em computação gráfica , na geração de imagem digital ,entre outros.

Exemplo: Uma companhia de navegação tem três tipos de recipientes A, B e C, que carrega cargas em container de três tipos I, II e III. As capacidades dos recipientes são dadas pela matriz:

Tipo do Recipiente	I	II	III
A	4	3	2
B	5	2	3
C	2	2	3

Quais são os números de recipientes x_1, x_2 e x_3 de cada categoria A, B e C, se a companhia deve transportar 42 containeres do tipo I, 27 do tipo II e 33 do tipo III?

Montagem do sistema linear

$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 42 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 27 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 33 \end{aligned}$$

Arthur Cayley (1821-1895): Matemático inglês nascido em Richmond, diplomou-se no Trinity College de Cambridge. Na sua vida, Cayley encontrou rivais em Euler e Cauchy sendo eles os três maiores produtores de materiais no campo da Matemática. Em 1858, Cayley apresentou representações por matrizes. Segundo ele, as matrizes são desenvolvidas a partir da noção de determinante, isto é, a partir do exame de sistemas de equações, que ele denominou: *o sistema*. Cayley desenvolveu uma Álgebra das matrizes quadradas em termos de transformações lineares homogêneas.

Desenvolvimento

Atividade 1

Habilidade relacionada:

Identificar os sistemas lineares como modelos matemáticos que traduzem situações problemas para a linguagem matemática.

Resolver problemas utilizando sistemas lineares.

Pré-requisitos:

- Operações com matrizes.
- Sistemas de equações de 1º grau.

***Tempo de duração: 2**00 minutos*

Recursos educacionais utilizados:

http://www.youtube.com/watch?v=PpH-bJ8Wrik

http://www.youtube.com/watch?v=K04lGRuZtuU

http://www.youtube.com/watch?v=Lh0o8_Zai6E

http://www.gilmaths.mat.br/page_32.html

http://m3.ime.unicamp.br/recursos/search:sistemas+lineares

Equação linear

É uma equação da forma

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

onde

- $x_1, x_2, \dots, x_n$ são as incógnitas;
- $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ são os coeficientes (reais ou complexos);
- b_1 é o termo independente (número real ou complexo).

Exemplos de equações lineares

1. $4x + 3y - 2z = 0$
2. $2x - 3y + 0z - w = -3$
3. $x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 1$
4. $4i\,x + 3y - 2z = 2-5i$

Notação: Usamos R[x] para a raiz quadrada de $x \geq 0$.

Exemplos de equações não-lineares

1. 3 x + 3y R[x] = -4
2. $x^2 + y = 9$
3. x + 2 y - 3 z w = 0
4. $x^2 + y^2 = -9$

Solução de uma equação linear

Uma seqüência de números reais (r_1,r_2,r_3,r_4) é solução da equação linear

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1$$

se trocarmos cada x_i por r_i na equação e este fato implicar que o membro da esquerda é identicamente igual ao membro da direita, isto é:

$$a_{11}r_1 + a_{12}r_2 + a_{13}r_3 + a_{14}r_4 = b_1$$

Exemplo: A seqüência (5, 6, 7) é uma solução da equação 2x + 3y - 2z = 14 pois, tomando x = 5, y = 6 e z = 7 na equação dada, teremos:

$$2 \times 5 + 3 \times 6 - 2 \times 7 = 14$$

Sistemas de equações lineares

Um sistema de equações lineares ou sistema linear é um conjunto formado por duas ou mais equações lineares. Um sistema linear pode ser representado na forma:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 +...+ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 +...+ a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{gathered}$$

onde

- $x_1, x_2, ..., x_n$ são as incógnitas;
- $a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn}$ são os coeficientes;
- $b_1, b_2, ..., b_m$ são os termos independentes.

Solução de um sistema de equações lineares

Uma seqüência de números (r_1, r_2, ..., r_n) é solução do sistema linear:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{array}$$

se satisfaz identicamente a *todas* as equações desse sistema linear.

Exemplo: O par ordenado (2,0) é uma solução do sistema linear:

$$\begin{array}{c} 2x + y = 4 \\ x + 3y = 2 \\ x + 5y = 2 \end{array}$$

pois satisfaz identicamente a todas as equações do mesmo, isto é, se substituirmos $x = 2$ e $y = 0$, os dois membros de cada igualdade serão iguais em todas as equações.

Operações elementares sobre sistemas lineares

Existem três tipos de operações elementares que podem ser realizadas sobre um sistema linear de equações de forma a transformá-lo em outro sistema equivalente mais simples que o anterior. Na seqüência trabalharemos com um exemplo para mostrar como funcionam essas operações elementares sobre linhas. O segundo sistema (o que aparece à direita) já mostra o resultado da ação da operação elementar. Nas linhas iniciais de cada tabela, você encontra a operação que foi realizada.

1. Troca de posição de duas equações do sistema

Troca a Linha 1 com a Linha 3		
$x + 2y - z = 2$ $2x - 3y + 2z = 0$ $4x + y - 5z = 9$	~	$4x + y - 5z = 9$ $2x - 3y + 2z = 0$ $x + 2y - z = 2$

2. Multiplicação de uma equação por um número não nulo

Multiplica a Linha 1 pelo número 3		
$x + 2y - z = 2$ $2x - 3y + 2z = 0$ $4x + y - 5z = 9$	~	$3x + 6y - 3z = 6$ $2x - 3y + 2z = 0$ $4x + y - 5z = 9$
A equação resultante fica na linha 1		

3. Adição de duas equações do sistema

Adição da Linha 2 com a Linha 3		
$x + 2y - z = 2$ $2x - 3y + 2z = 0$ $4x + y - 5z = 9$	~	$3x + 6y - 3z = 6$ $2x - 3y + 2z = 0$ $6x - 2y - 3z = 9$
A equação resultante fica na linha 3		

Resolução de sistemas lineares por escalonamento

Com o auxílio das três Operações Elementares sobre linhas, podemos resolver sistemas lineares. Vamos mostrar como funciona este processo através de um exemplo.

Exemplo: Consideremos o sistema com 3 equações e 3 incógnitas.

3x + y + z = 20 2x - y - z = -15 -4x + y - 5z = -41

Observação: Usamos Li + Lj - > Lj para indicar a soma da linha i com a linha j com o resultado na linha j. Usamos k Li - > Li, para indicar que multiplicamos a linha i pela constante k e o resultado ficou na linha i.

Passo 1: L1 - L2 - > L1		
3x + 1y + 1z = 20 2x - 1y - 1z = -15 -4x + 1y - 5z = -41	~	1x + 2y + 2z = 35 2x - 1y - 1z = -15 -4x + 1y - 5z = -41

Passo 2: L2 - 2.L1 - > L2		
1x + 2y + 2z = 35 2x - 1y - 1z = -15 -4x + 1y - 5z = -41	~	1x + 2y + 2z = 35 0x - 5y - 5z = -85 -4x + 1y - 5z = -41

Passo 3: L3+4.L1->L3		
1x + 2y + 2z = 35 0x - 5y - 5z = -85 -4x + 1y - 5z = -41	~	1x + 2y + 2z = 35 0x - 5y - 5z = -85 0x + 9y + 3z = 99

Passo 4:(-1/5)L2->L2,(1/3)L3->L3		
1x + 2y + 2z = 35 0x - 5y - 5z = -85 0x + 9y + 3z = 99	~	1x + 2y + 2z = 35 0x + 1y + 1z = 17 0x + 3y + 1z = 33

Passo 5: L3-3.L2->L3		
1x + 2y + 2z = 35 0x + 1y + 1z = 17 0x + 3y + 1z = 33	~	1x + 2y + 2z = 35 0x + 1y + 1z = 17 0x + 0y - 2z = -18

Passo 6: (-1/2)L3->L3		
1x + 2y + 2z = 35 0x + 1y + 1z = 17 0x + 0y - 2z = -18	~	1x + 2y + 2z = 35 0x + 1y + 1z = 17 0x + 0y + 1z = 9

Passo 7: L2-L3->L2		
1x + 2y + 2z = 35 0x + 1y + 1z = 17 0x + 0y + 1z = 9	~	1x + 2y + 2z = 35 0x + 1y + 0z = 8 0x + 0y + 1z = 9

Passo 8: L1-2.L2-2.L3->L1		
1x + 2y + 2z = 35 0x + 1y + 0z = 8 0x + 0y + 1z = 9	~	1x + 0y + 0z = 1 0x + 1y + 0z = 8 0x + 0y + 1z = 9

Passo 9: Simplificar coeficientes		
1x + 0y + 0z = 1 0x + 1y + 0z = 8 0x + 0y + 1z = 9	~	x = 1 y = 8 z = 9

Após o escalonamento, observamos que a solução obtida é exatamente fornecida pelo último sistema.

Regra de Cramer

Esta regra depende basicamente sobre o uso de determinantes. Para indicar o determinante de uma matriz X, escreveremos det(X).

Seja um sistema linear com n equações e n incógnitas:

$$
\begin{matrix}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\dots \dots \dots \dots \\
a_{n1}x_n + a_{n2}x_n + \dots + a_{nj}x_j + \dots + a_{nn}x_n = b_n
\end{matrix}
$$

A este sistema podemos associar algumas matrizes:

- Matriz dos coeficientes: Formada pelos coeficientes das incógnitas do sistema, aqui indicada pela letra A.

Matriz dos coeficientes
$a_{11} a_{12} \dots a_{1j} \dots a_{1n}$ $a_{21} a_{22} \dots a_{2j} \dots a_{2n}$ $\dots \dots \dots \dots \dots \dots$ $a_{n1} a_{n2} \dots a_{nj} \dots a_{nn}$

- Matriz Aumentada do sistema: Formada todos os coeficientes das incógnitas do sistema e também pelos termos independentes.

Matriz Aumentada
$a_{11} a_{12} \dots a_{1j} \dots a_{1n} b_1$ $a_{21} a_{22} \dots a_{2j} \dots a_{2n} b_2$ $\dots \dots \dots \dots \dots \dots$ $a_{n1} a_{n2} \dots a_{nj} \dots a_{nn} b_n$

- Matriz da incógnita x_j: É a matriz A_j obtida ao substituirmos a coluna j (1 < j < n) da matriz A, pelos termos independentes das equações do sistema.

Matriz da incógnita x_j
$a_{11}a_{12}$ ... b_1 ... a_{1n} $a_{21}a_{22}$ ... b_2 ... a_{2n} ... ... $a_{n1}a_{n2}$ ... b_n ... a_{nn}

Quando as posições j = 1, 2, 3 estão relacionadas com x_1, x_2 e x_3 e substituídas pelas incógnitas x, y e z, é comum escrever A_x, A_y e A_z.

Se det (A) é diferente de zero, é possível obter cada solução x_j(j = 1, ..., n), dividindo det (A_j) por det (A), isto é:

$$x_j = \det(A_j) / \det(A)$$

Se det (A) = 0, o sistema ainda poderá ser consistente, se todos os determinantes n x n da matriz aumentada do sistema forem iguais a zero.

Atividade 2

Habilidade relacionada:

Classificação de sistema linear

Pré-requisitos:

- Operações com matrizes.
- Sistemas de equações de 1º grau.

Tempo de duração: 100 minutos

Recursos educacionais utilizados:

http://www.youtube.com/watch?v=3ZGQAqBIxLY

http://www.youtube.com/watch?v=Sc0S41BW080

http://www.youtube.com/watch?v=A_nwodENZV4

Consistência de Sistemas Lineares

O número de soluções de um sistema linear determina a sua classificação de duas maneiras com relação à sua consistência:

Sistema possível ou consistente: Quando tem pelo menos uma solução.

a. Se tem uma única solução, o sistema é determinado.

b. Se tem mais que uma solução, o sistema é indeterminado.

Sistema impossível ou inconsistente: Se não admite qualquer solução.

Exemplos de sistemas com respeito às suas soluções

Sistema com uma única solução: As equações lineares abaixo representam duas retas no plano cartesiano que têm o ponto (3, -2) como interseção.

$$\begin{array}{c} x + 2y = -1 \\ 2x - y = 8 \end{array}$$

Sistema com infinitas soluções: As equações lineares representam retas paralelas sobrepostas no plano cartesiano, logo existem infinitos pontos que satisfazem a ambas as equações (pertencem a ambas as retas).

$$\begin{array}{c} 4x + 2y = 100 \\ 8x + 4y = 200 \end{array}$$

Sistema que não tem solução: As equações lineares representam retas paralelas no plano cartesiano, logo, não existem pontos que pertençam às duas retas.

$$\begin{array}{c} x + 3y = 4 \\ x + 3y = 5 \end{array}$$

Sistemas equivalentes

Dois sistemas são equivalentes se admitem a mesma solução.

Exemplo: São equivalentes os sistemas S1 e S2 indicados abaixo:

S1	3x + 6y = 42 2x - 4y = 12	S2	1x + 2y = 14 1x - 2y = 6

Pois eles admitem a mesma solução x = 10 e y = 2.

Notação: Quando dois sistemas S1 e S2 são equivalentes, usamos a notação S1~S2.

Sistemas lineares homogêneos

Um sistema linear é homogêneo quando os termos independentes de todas as equações são nulos. Todo sistema linear homogêneo admite pelo menos a solução trivial, que é a solução identicamente nula. Assim, todo sistema linear homogêneo é possível. Este tipo de sistema poderá ser determinado se admitir somente a solução trivial ou indeterminado se admitir outras soluções além da trivial.

Exemplo: O sistema

$$\begin{array}{c} 2x - y + 3z = 0 \\ 4x + 2y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{array}$$

é determinado, pois possui a solução x = 0, y = 0 e z = 0.

Um sistema impossível: Seja o sistema

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 27 \\ 1x - 2y + 3z &= 15 \\ 3x + 1y + 7z &= 40 \end{aligned}$$

A matriz A e a matriz aumentada Au do sistema estão mostradas abaixo.

2	3	4
1	-2	3
3	1	7

2	3	4	27
1	-2	3	15
3	1	7	40

Como det(A) = 0, devemos verificar se todos os determinantes das sub-matrizes 3 × 3 da matriz aumentada são nulos. Se existir pelo menos um deles não nulo, o sistema será impossível e este é o caso pois é não nulo o determinante da sub-matriz 3 x 3 formada pelas colunas 1, 2 e 4 da matriz aumentada:

2	3	27
1	-2	15
3	1	40

Um sistema indeterminado: Consideremos agora o sistema (Quase igual ao anterior: trocamos 40 por 42 na última linha!)

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 27 \\ 1x - 2y + 3z &= 15 \\ 3x + 1y + 7z &= 42 \end{aligned}$$

A matriz A e a matriz aumentada Au do sistema, estão abaixo:

2	3	4
1	-2	3
3	1	7

2	3	4	27
1	-2	3	15
3	1	7	42

Aqui, tanto det(A)=0 como todos os determinantes das sub-matrizes 3×3 da matriz aumentada são nulos, então o sistema é possível e indeterminado. Neste caso, observamos que a última linha é a soma das duas primeiras e como estas duas primeiras dependem de x, y e z, você poderá encontrar as soluções, por exemplo, de x e y em função de z.

Um sistema com solução única: Seja o sistema

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 27 \\ 1x - 2y + 3z &= 15 \\ 3x + 1y + 6z &= 40 \end{aligned}$$

A matriz A e a matriz dos termos independentes do sistema estão indicados abaixo.

2	3	4	27
1	-2	3	15
3	1	6	40

Como det(A)=7, o sistema admite uma única solução que depende dos determinantes das matrizes A_x, A_y e A_z, e tais matrizes são obtidas pela substituição 1a., 2a. e 3a. colunas da matriz A pelos termos independentes das três equações, temos:

Ax=	27	3	4
	15	-2	3
	40	1	6

Ay=	2	27	4
	1	15	3
	3	40	6

Az=	2	3	27
	1	-2	15
	3	1	40

Como det(A_x)=65, det(A_y)=1 e det(A_z)=14, a solução do sistema é dada por:

x = det(Ax)/det(A) = 65/7
y = det(Ay)/det(A) = 1/7
z = det(Az)/det(A) = 14/7

Avaliação

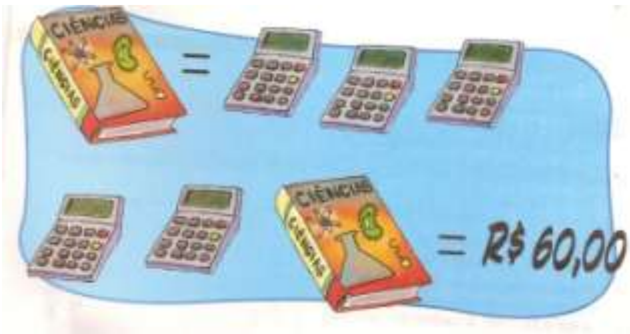
Colégio Estadual Olavo Josino de Salles

Rio de Janeiro, _______ de ______________ de 2014.

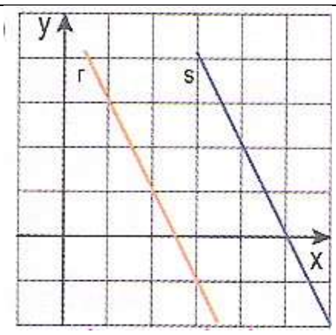
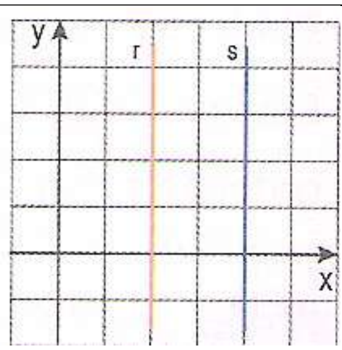
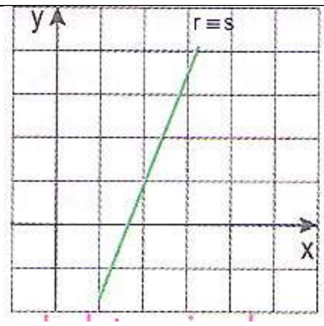
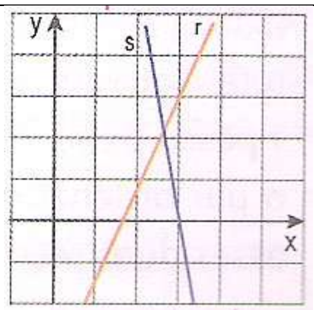
Prova de MATEMÁTICA - 4º Bimestre **Professor: DELFINA**

Nome do aluno (a):___________________________Nº_______ Turma:_________

1- Com base nas igualdades mostradas nas figuras, determine o preço do livro e o preço da calculadora***.(1,0 ponto)***



2- As retas r e s são representações gráficas das equações de um sistema. Classifique esses sistemas em determinado, indeterminado ou impossível. ***.(1,0 ponto)***

<table>
<tr><td>a) 
</td><td>c) 
</td></tr>
<tr><td>b) 
</td><td>d) 
</td></tr>
</table>

3- Demonstre se o par ordenado (-1, 5) é ou não solução do sistema $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -2x + 2y = 7 \end{cases}$. ***.(1,0 ponto)***

4- (VUNESP) Uma pessoa quer trocar duas cédulas de 100 reais por cédulas de 5, 10 e 50 reais, recebendo cédulas de todos esses valores e o maior número possível de cédulas de 50 reais. Nessas condições, qual é o número mínimo de cédulas que ela poderá receber? ***.(1,0 ponto)***

a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

5- Na feira, uma das barracas de frutas estava vendendo embalagens com 10 peras, 5 maçãs e 4 mangas por 11 reais; outra barraca vendia um pacote contendo 8 peras, 6 maçãs e 4 mangas por 10 reais, e uma terceira vendia 6 peras e 12 maçãs por 9 reais. Sabendo-se que o preço de cada espécie de fruta era mesmo nas três barracas, qual o preço a se pagar por 3 peras, 2 maçãs e 2 mangas em qualquer dessas barracas? ***.(1,0 ponto)***

Fontes de Pesquisa

Referências Bibliográficas

BARRETO FILHO, B. e SILVA, C. X. da. MATEMÁTICA AULA POR AULA. In: ___________. **Sistemas Lineares**, 1° ed. São Paulo, v. 2. Editora FTD, 2003. p. 162-180

IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D., PÉRIGO, R. e ALMEIDA, N. de. MATEMÁTICA ciência e aplicações. In: _______________________ **Sistemas Lineares**, 6° Ed. v.2 Editora Saraiva, 2010 p. 104-130. cap. 7

EDITORA MODERNA. Conexões com a Matemática. Editora responsável: Juliane Matsubara Barroso. **Sistemas Lineares,**v. 2 São Paulo. Editora Moderna, 2010 p. 268-296. cap. 9

PAIVA, M. Matemática. In: ______________________. **Sistemas Lineares**, 1° Ed. v. 2. Editora Moderna, 2009 p. 125-136 cap. 8.

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO. Currículo Mínimo Matemática, 2013

SMOLE, K. S. & DINIZ, M. I. MATEMÁTICA ensino médio. In: ______________ **Sistemas Lineares.** v. 2 6° ed. São Paulo, Editora Saraiva, 2010 p. 319-329 unid. 12.

Endereços eletrônicos acessados e citados ao longo do trabalho

NOÉ, Marcos. **Sistemas Lineares**. Equipe Brasil Escola. Disponível em < http://www.brasilescola.com/matematica/sistemas-lineares.htm>. Acesso em: 16 out 2014.

UNICAMP. Matemática Multimídia. **Sistemas Lineares**. Disponível em < http://m3.ime.unicamp.br/recursos/search:Sistemas+lineares>. Acesso em: 16 out 2014.

VICENTE L.EMANUELLE e SODRÉ, U. **Sistemas Lineares** Disponível em: < http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/matrizes/sistemas.htm>. Acesso em 16 out 2014

SILVA,JAIRO LUIS DA. **Sistemas Lineares** .Disponível em<¸http://www.youtube.com/watch?v=PpH-bJ8Wrik>.Acesso em: 16 out 2014.

VICENTE L.EMANUELLE e SODRÉ, U. **Sistemas Lineares** Disponível em: < http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/matrizes/sistemas.htm>. Acesso em 17 out 2014

GUI **Sistemas Lineares/Escalonamento** Disponível em: < http://www.youtube.com/watch?v=K04lGRuZtuU>. Acesso em 17 out 2014

GUI. **Sistemas Lineares/Regra de Cramer.** Disponível em: < http://www.youtube.com/watch?v=Lh0o8_Zai6E>. Acesso em 17 out 2014

BONATTO,GILMAR **Sistemas Lineares/Revisão** Disponível em: < http://www.gilmaths.mat.br/page_32.html>. Acesso em 18 out 2014

MARMONTEL,JOSÉ **Classificação de Sistemas Lineares** Disponível em: < http://www.youtube.com/watch?v=3ZGQAqBIxLY>. Acesso em 18 out 2014

DANI **Classificação e Discussão de Sistemas Lineares** Disponível em: < http://www.youtube.com/watch?v=Sc0S41BW080>. Acesso em 18 out 2014

GUI.**Discussão de Sistemas Lineares** Disponível em: < http://www.youtube.com/watch?v=A_nwodENZV4>. Acesso em 18 out 2014