Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ

Formação Continuada em Matemática

Tarefa 2: Plano de Trabalho

Matemática 1° Ano - 4º Bimestre/2014

Trigonometria na circunferência

Cursista: Soraya de Oliveira Coelho

Tutor: Rodolfo Gregorio de Moraes

S u m á r i o

1. Introdução

Esse Plano de Trabalho tem por objetivo fazer com que os alunos representem o seno, o cosseno e a tangente de um arco qualquer no ciclo trigonométrico, resolvam equações trigonométricas simples, com soluções na primeira volta e identifiquem gráficos de funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente.

Já sabemos que o círculo trigonométrico é um circulo de raio unitário, e que o sentido positivo é o anti-horário. Aprendemos também sobre as razões trigonométricas seno e cosseno. Agora faremos o estudo das funções trigonométricas.

Será necessário relembrar alguns conceitos que já foram trabalhados sobre as razões trigonométricas para calcular o valor do seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis e também sobre conversão de grau para radiano e vice-versa.

Esse Plano de Trabalho foi elaborado com atividades para serem desenvolvidas em duas semanas de aula, onde tenho 6 tempos de aula por semana, com 50 min cada.

2. Desenvolvimento

2.1 - 1ª Semana de aula

Conteúdo

- Seno e cosseno no círculo trigonométrico.
- Tangente no círculo trigonométrico.
- Relação fundamental da trigonometria.

Objetivos

- Representar o seno, o cosseno e a tangente de um arco qualquer no ciclo trigonométrico.
- Resolver problemas utilizando a relação fundamental da trigonometria.

Pré-requisitos

- Razões trigonométricas.
- Conversão de medida de um arco de grau para radiano e vice-versa.

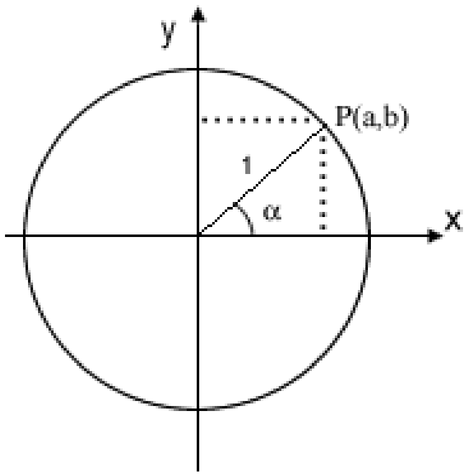
Recursos didáticos

- Folha de exercícios.

2.1.1 - Seno e cosseno no círculo trigonométrico

Vamos representar no círculo trigonométrico o seno e o cosseno como funções trigonométricas.

Se tomarmos uma semirreta com origem em (0,0), para qualquer que seja o ângulo α e como o raio do círculo é 1 temos um ponto P de coordenadas (a, b) , intersecção da semirreta com a circunferência, que nos dará a projeção de a no eixo dos x e b no eixo dos y.



Já que estamos falando de seno e cosseno, vamos lembrar dessas fórmulas já conhecidas:

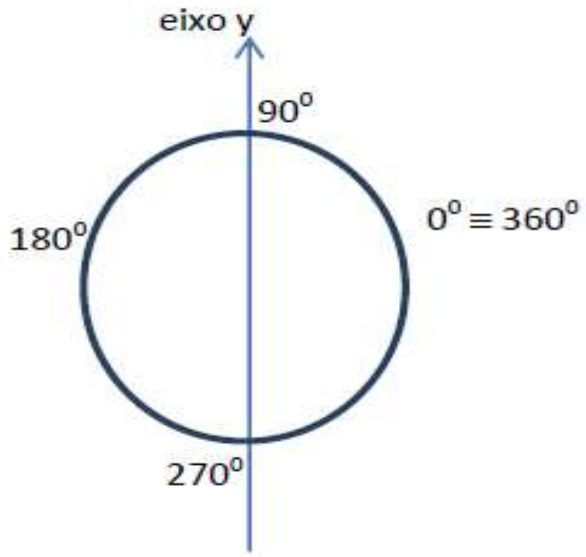
$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} \quad \text{e} \quad cos\ \alpha = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$

Vamos tentar relacioná-los!
Quando trabalhamos com seno, teremos para valores do seno o cateto oposto, ou seja, os valores do seno só podem estar no eixo y.
E quando trabalhamos com cosseno, teremos para valores do cosseno o cateto adjacente, ou seja, os valores do cosseno estarão no eixo x.

Obs: Vale lembrar o seguinte macete: Quando se trabalha com seno, fica-se sem sono (e sem sono ficamos em pé - eixo y) e quando se trabalha com cosseno, fica-se com sono (e com sono ficamos deitados – eixo x)

Assim, valores de seno (sem sono – em pé) só existirão no eixo y e valores de cosseno (com sono – deitado) só existirão no eixo x.

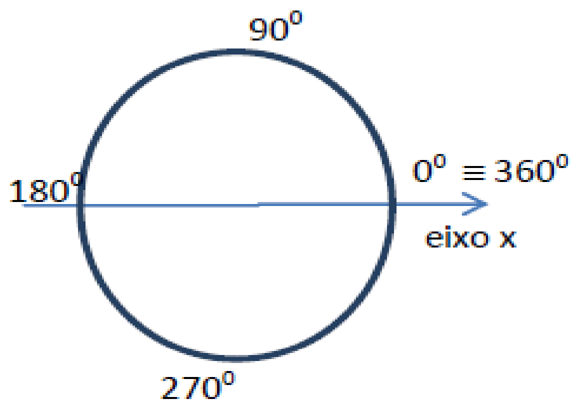
- *Eixo dos senos*



Repare que para os valores de 0° e 180° que não há o eixo dos senos. Assim, os valores de seno somente existirão para 90° e 270°. Então:

- sen 90° = 1
- sen 270° = -1
- sen 0° = 0
- sen 180° = 0

- *Eixo dos cossenos*



Observe que para os valores de 90° e 270° que não há o eixo dos cossenos. Assim, os valores de cosseno somente existirão para 0° e 180°. Teremos então:

- cos 90°= 0
- cos 270° = 0
- cos 0° = 1
- cos 180° = -1

Observe a tabela com os valores do círculo trigonométrico para seno e cosseno.

	0°	**90°**	**180°**	**270°**	**360°**
Seno	0	1	0	-1	0
Cosseno	1	0	-1	0	1

2.1.2 - Crescimento e decrescimento

Você pode perceber que o seno começa valendo zero, cresce até a unidade, depois decresce até -1 e por fim volta ao zero. Sobre o crescimento e decrescimento podemos dizer que:

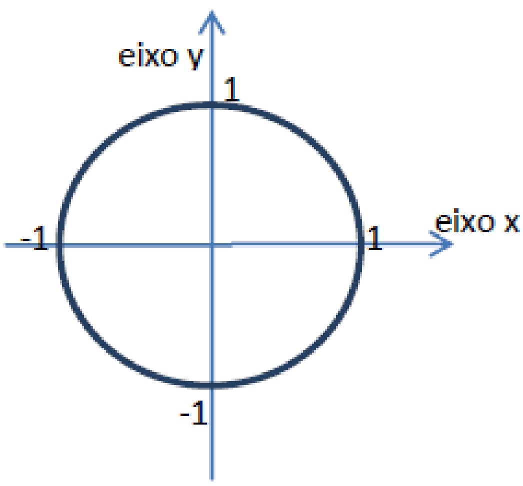
Função seno

I quadrante	**II quadrante**	**III quadrante**	**IV quadrante**
Decresce	Decresce	Cresce	Cresce

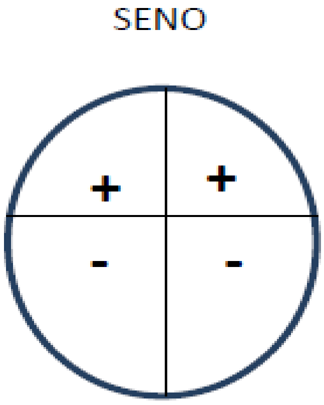
Função Cosseno

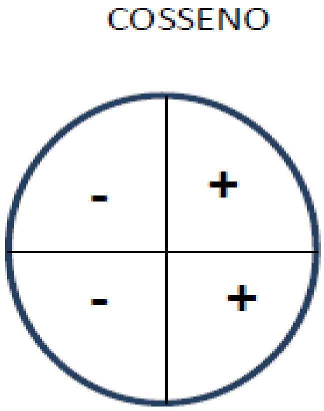
I quadrante	**II quadrante**	**III quadrante**	**IV quadrante**
Cresce	Decresce	Decresce	Cresce

Como já vimos o seno é a projeção do raio definido pela abertura do arco sobre o eixo das ordenadas, enquanto o cosseno é a projeção sobre o eixo das abscissas.



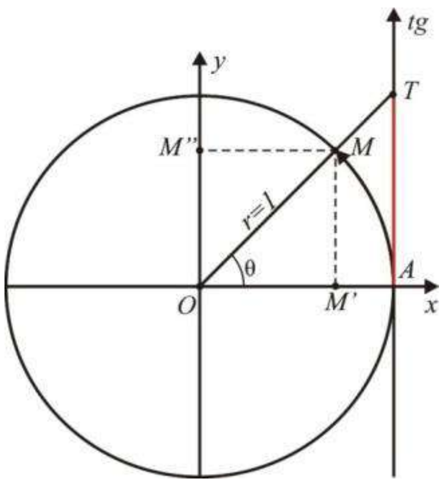
Note que os valores representados nos eixos correspondem ao raio da circunferência, assim podemos definir o sinal de seno e cosseno da seguinte forma:





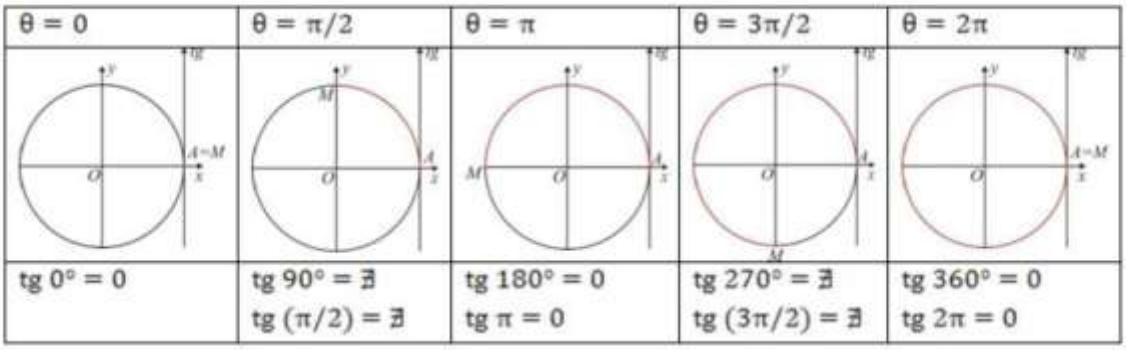
2.1.3 - Tangente no círculo trigonométrico

Vamos trabalhar o conceito de tangente no círculo trigonométrico. Observe o círculo abaixo, de raio unitário, r = 1, note que o ponto T é a intersecção da reta OM com o eixo das tangentes (reta perpendicular ao eixo *x*, que passa pelo ponto A).



O sinal da tangente vai depender da orientação que tomamos para o seu cálculo. Como a tangente é medida verticalmente, valores medidos acima do zero serão considerados **positivos** e valores medidos abaixo do zero são considerados **negativos**.

Observe o quadro abaixo e verifique o que ocorre com o arco e com a reta tangente ao mesmo tempo.



$\theta = 0$	$\theta = \pi/2$	$\theta = \pi$	$\theta = 3\pi/2$	$\theta = 2\pi$
tg 0° = 0	tg 90° = ∄ tg ($\pi/2$) = ∄	tg 180° = 0 tg π = 0	tg 270° = ∄ tg ($3\pi/2$) = ∄	tg 360° = 0 tg 2π = 0

Observe que para 0°, 180° e 360°, o segmento *AT* tem valor igual a zero.

2.1.4 - Relação fundamental da trigonometria

Há ainda uma importante relação entre seno e cosseno é a Relação Fundamental da Trigonometria que indica:

$$sen^2x + cos^2x = 1$$

Exemplo

Verifique a sentença $sen^2x + cos^2x = 1$ para o ângulo de 90°

Resolução:

Sabemos que $sen\,90° = 1$ e $\cos 90° = 0$. Aplicando esses valores na relação fundamental, temos:

$$sen^2x + cos^2x = 1$$

$$sen^2 90° + \; cos^2 90° = 1$$

$$1^2 + 0^2 = 1$$

Logo, podemos verificar que a sentença é verdadeira.

2.2 - 2ª semana de aula

Conteúdo

- Gráfico das funções trigonométricas (seno, cosseno e tangente).
- Construção de gráficos.

Objetivos

- Identificar gráficos de funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente.
- Construir gráficos de funções trigonométricas.

Pré-requisitos

- Representar seno, cosseno e tangente de um arco qualquer no ciclo trigonométrico.

Recursos didáticos

- Folha de exercícios.
- Datashow para mostrar os gráficos das funções.

2.2.1 - Gráfico das funções trigonométricas

Agora vamos aprender a representar graficamente as funções seno cosseno e tangente. Isto significa mostrar no plano cartesiano o comportamento destas funções em um período que corresponde a 2π, ou seja, uma volta completa na circunferência. Para isto vamos observar a tabela abaixo que contém os valores dos principais arcos

Arco	Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
0	0^0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	30^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45^0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90^0	1	0	Não definida
π	180^0	0	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	270^0	-1	0	Não definida
2π	360^0	0	1	0

2.2.2 - Gráfico da função seno (senóide)

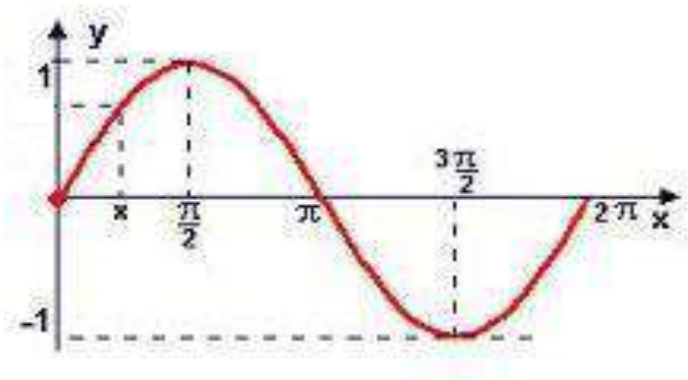
Sabemos que uma volta completa na circunferência mede 360° ou 2π em radianos. Na função seno, temos uma volta completa na circunferência vai de 0° a 360° ou de 0 rad a 2π. Isto significa que a função nesse intervalo realiza um ciclo completo, ao que chamamos de período da função trigonométrica.

Dada a função $y = sen\ x$, vamos definir seu gráfico.

Pela tabela, teremos os pontos:

(0, 0); $(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$; $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e assim por diante.

Representando os pontos no plano cartesiano, temos:



Observe o comportamento da curva. Quando $x = 0$, teremos $y = sen\ 0 = 0$.

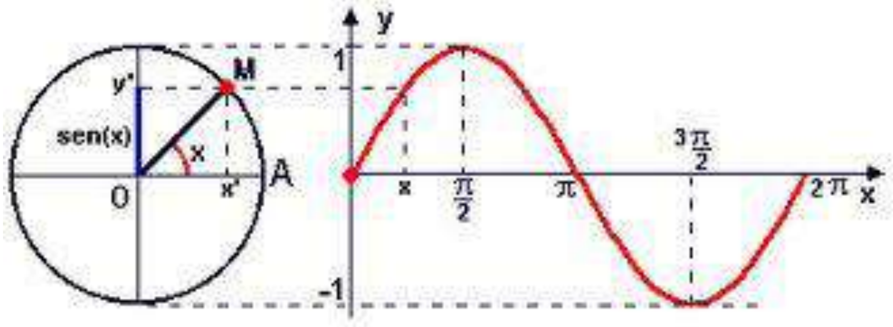
No primeiro quadrante, isto é, de 0 a $\frac{\pi}{2}$ a função é crescente e atinge seu ponto máximo, ou seja, $y = 1$.

No segundo quadrante é decrescente e volta $y = 0$.

No terceiro quadrante continua decrescendo e alcança seu menor valor, ou seja, $y = -1$.

No quarto quadrante volta a crescer até assumir o valor zero novamente.

Estas variações dependem da abertura do ângulo formado pelo segmento OM, conforme a representação.

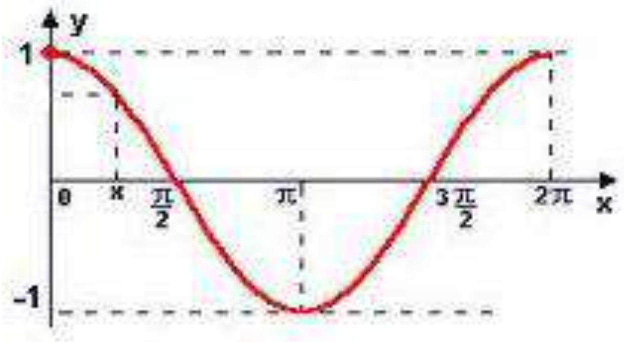


2.2.3 - Gráfico da função cosseno (cossenóide)

Agora vamos construir o gráfico da função cosseno.

Seja a função $y = \cos x$. Vamos marcar os pares ordenados definidos por (x, cos x). Na função cosseno o período é o mesmo da função seno, isto é, de 0 rad a 2π rad ou 0° a 360°.

Representando os pontos de acordo com os valores contidos na tabela, teremos:

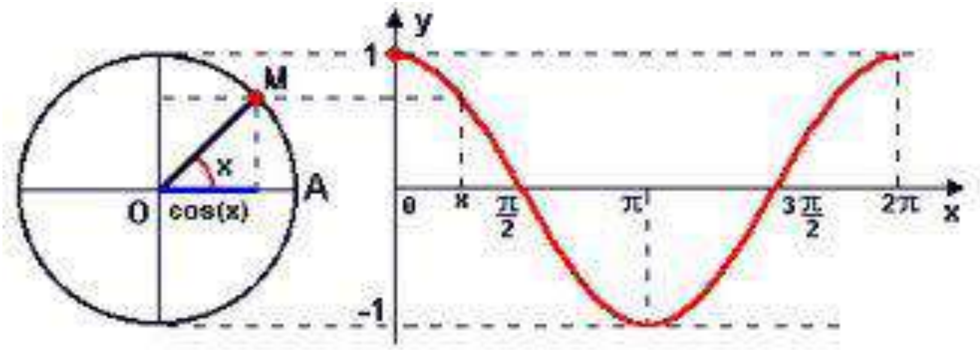


Quando x = 0, cos x = 1, no primeiro quadrante, a função decresce, conforme variamos x, os valores de y também variam de 1 até zero.

No segundo quadrante, a função continua decrescendo, neste quadrante, assume valores negativos, chegando ao seu ponto mínimo que é y = -1.

No terceiro quadrante, a função é crescente, pois sai do menor valor, $y = 0$ quando $x = \pi$ e alcança $y = 0$ quando $x = \frac{3\pi}{2}$.

No quarto quadrante, a função continua crescendo, alcançando seu ponto máximo, isto é, $y = 0$ quando $x = 2\pi$. Observe o gráfico construído a partir da variação do ângulo x, ocasionando abertura do arco AOM no círculo trigonométrico.



2.2.4 - Gráfico da função tangente (tangentóide)

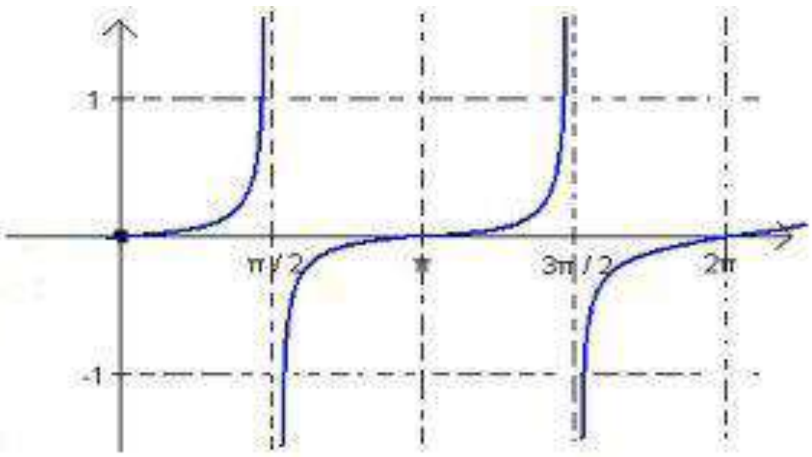
A construção do gráfico da função tangente obedece o mesmo critério na construção do gráfico da função seno e da função cosseno. Ou seja, são feitas as marcações dos pares ordenados (x, tg x).

Vamos lembrar que a função tangente não é definida para x = 90° e x = 270°.

Já vimos anteriormente que a função tangente é crescente em todos os quadrantes. Assim, no primeiro quadrante, isto é, de 0 a $\frac{\pi}{2}\ rad$, de acordo com a tabela quando $x = 0$, teremos $tg\ x = 0$, isto nos dá o ponto (0, 0). A partir desse ponto a tangente assume valores cada vez maiores descolando-se para o infinito, visto que em $\frac{\pi}{2}$, ou seja, 90°, a tangente não é definida.

No segundo quadrante e terceiro quadrante, há uma variação de valores desde $-\infty$ até $+\infty$. Passando por $y = 0$ quando $x =\ \pi$, ou seja, $tg\ \pi = 0$.

No quarto quadrante, a tangente mais uma vez é crescente, refazendo o mesmo ciclo ocasionado para os valores do segundo quadrante.



2.2.5 - Construção de gráficos

Agora vamos aprender como construir outros gráficos de função trigonométrica. Para isto, vamos analisar alguns exemplos:

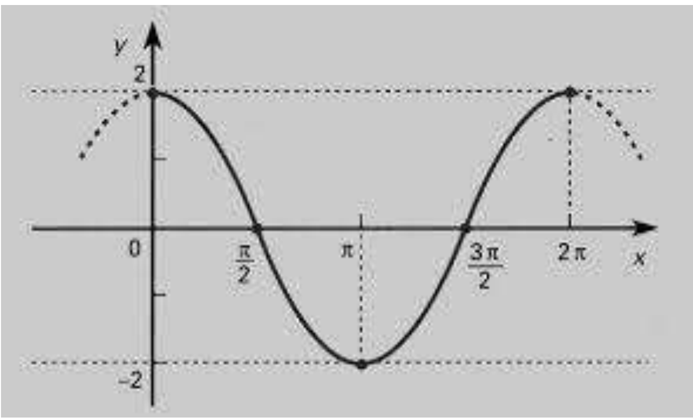
Exemplo 1: Construir o gráfico da função $y = 2\ sen\ x$.

Resolução:

Para iniciar, precisamos construir uma tabela, definida no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$.

x	sen x	2.sen x	Ponto
0	0	0	(0,0)
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	1	$(\frac{\pi}{6}, 1)$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	$(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3})$
$\frac{\pi}{2}$	1	2	$(\frac{\pi}{2}, 2)$
π	0	0	(π , 0)
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-2	$(\frac{3\pi}{2}, -2)$
2π	0	0	(2π , 0)

Vamos agora representar estes pontos no plano cartesiano e traçar uma senóide.



Podemos utilizar este mesmo método para construir outros gráficos de funções trigonométricas.

3- Avaliação

A avaliação do processo de ensino e aprendizagem é contínua. Durante todo o ano letivo observo o aluno e constato quais objetivos foram alcançados por ele, verificando a cada bimestre se há necessidade de recuperar algum conteúdo que não foi aprendido.

Vários instrumentos de avaliação são utilizados: trabalhos individuais e em grupo, exercícios resolvidos em sala de aula, resolução de exercícios de provas do “SAERJINHO” e SAERJ, testes e provas, conceito para alunos que frequentam o Reforço Escolar, conceito por assiduidade e participação nas aulas, notas no “SAERJINHO”.

Neste Plano de Trabalho, a avaliação foi feita levando-se em conta a participação do aluno na aula, na execução das atividades propostas e no cumprimento das tarefas da lista de exercícios.

Algumas atividades deste Plano foram realizadas em grupo de 2 ou 3 alunos, pois acho importante a troca de ideias entre eles, a fim de aprimorarem seus conhecimentos. Enquanto os alunos discutem a resolução de exercícios, eu vou visitando os grupos e fazendo as intervenções que julgo necessárias.

4. Referências Bibliográficas

FILHO, B. B. e DA SILVA, C. X. Matemática Aula Por Aula. São Paulo: Ed.: FTD, 2003.

RIO DE JANEIRO. SECRETARIA ESTADUAL DE EDUCAÇÃO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO. Cadernos de Atividades Pedagógicas de Aprendizagem Autorregulada - 04. Rio de Janeiro: SEEDUC-RJ, 2012.

Anexo I

1- Complete a tabela abaixo com os valores que você já conhece para seno e cosseno de um ângulo:

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
Sen α								
Cos α								

2- Da tabela acima retire dois valores e teste para a Relação Fundamental da Trigonometria

3- Verifique se a expressão $sen^2x + cos^2x = 1$, para o ângulo de 30°.

4- Verifique em qual quadrante se encontra o seno de 1800°.

5- Complete a tabela abaixo com os valores que você já conhece para a tangente:

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Tang								

6- Uma relação existente relativa à tangente é: $tg\alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\alpha}$. Assim, verifique dois valores da tabela acima, utilizando essa relação.

7- Determine o valor das expressões:

a) $sen30 + cos45° - tg180°$
b) $cos60° + cos30° - tg45°$

8- Esboçar o gráfico das funções e identificar o conjunto imagem e o período:

a) $y = 2\ senx$
b) $y = 3sen\ x$
c) $y = sen\ \frac{x}{2}$
d) $y = 2\cos x$
e) $y = cos\frac{x}{2}$