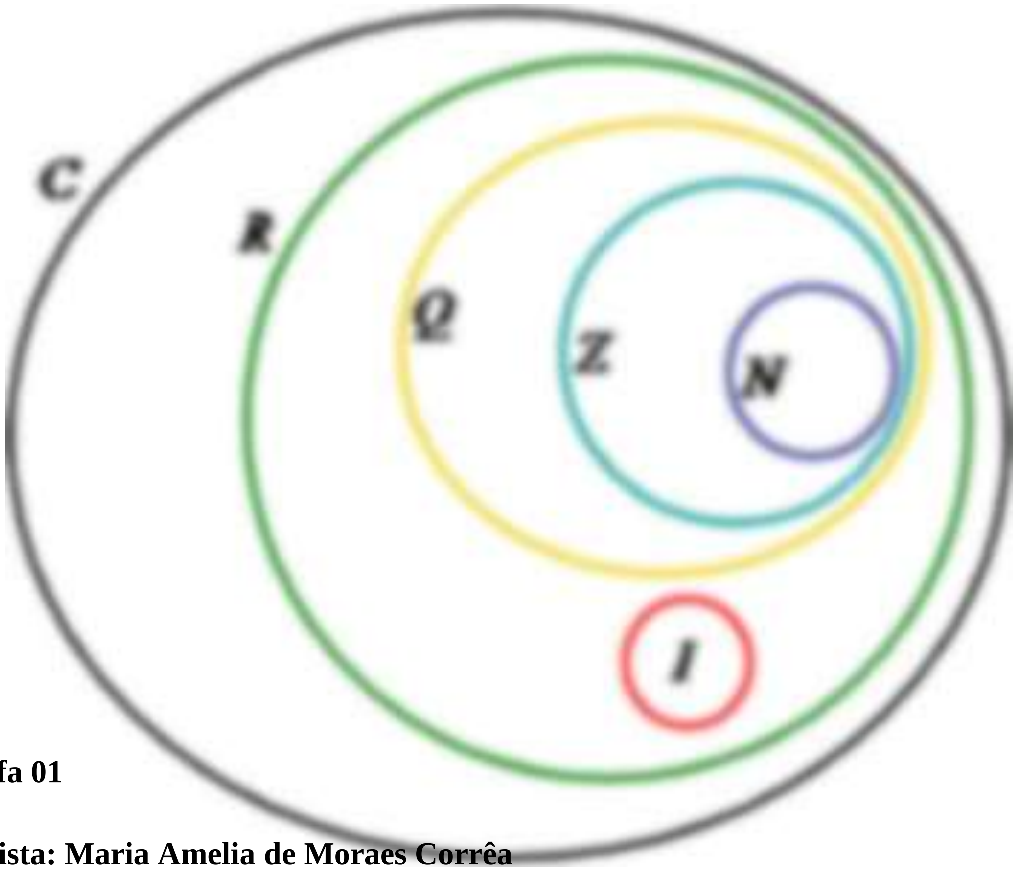
Formação continuada em Matemática

Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ

Matemática 3º ano

Números Complexos



Tarefa 01

Cursista: Maria Amelia de Moraes Corrêa

Tutora: Maria Cláudia Padilha Tostes

S u m á r i o

Introdução

Este plano de trabalho visa organizar atividades para que os alunos consigam enxergar a importância da utilização dos números complexos em nosso cotidiano.

A ideia inicial é propor que os alunos sintam a necessidade da extração da raiz quadrada de um número negativo, e que operando com esses números, eles cheguem a respostas reais.

Este plano de trabalho apresenta atividades, que visam apresentar aos alunos as representações gráficas dos números complexos, via forma algébrica e forma trigonométrica no plano de Argand-Gauss. Enriquecendo desta forma o aprendizado e a percepção dos alunos acerca das propriedades geométricas envolvidas em tais representações.

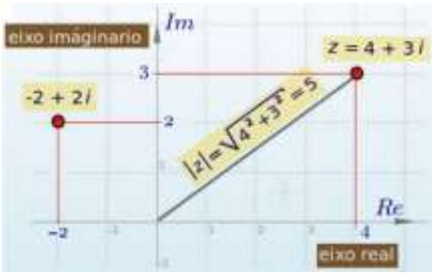
Levando o aluno a compreender que, para passarem da forma algébrica para a forma polar, basta utilizar como artifício algo que eles já conhecem: as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Outro aspecto abordado é a relação entre o par ordenado, o raio e o ângulo associado a um número complexo dado.

É importante, que os discentes compreendam e fixem de forma simples e dinâmica o assunto aqui abordado.

DESENVOLVIMENTO

Atividade 1

- HABILIDADE RELACIONADA: Identificar com precisão um número complexo; distinguir parte real e parte imaginária de um número complexo; conjugado; potência de i e operações na forma algébrica.
  H46 - Reconhecer números reais em diferentes contextos.
- PRÉ-REQUISITOS: Operações elementares com números reais; identificação de raízes de uma função a partir da sua representação gráfica; determinação das raízes de uma função a partir da sua representação algébrica; produtos notáveis.
- TEMPO DE DURAÇÃO: 150 minutos
- RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Vídeos e Livro didático.
- ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.
- OBJETIVOS: Apresentar os números complexos como mais uma ferramenta matemática.
- METODOLOGIA ADOTADA:



1. Números complexos

1.1. História dos Números Complexos:

Apresentar os vídeos para os alunos com o objetivo de informar todos os aspectos do tema que será tratado, no caso, Números Complexos. Após isso, abordar os tópicos escritos abaixo.

1.2. A álgebra dos complexos:

Embora historicamente a necessidade de estudar os números complexos tenha surgido junto com o estudo de equações do terceiro grau, para compreender esta necessidade basta considerarmos a solução de equações do tipo:

$$X^2+1=0. \tag{1}$$

Para obter uma solução definimos $\sqrt{-1} = i$, a que damos o nome de unidade imaginária. Como consequência desta definição as raízes da equação 1 são i e $-i$ pois

$$i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1; (-i)^2 = -1.$$

Um número complexo é um número na forma $a + i\,b$, possuindo, portanto, uma parte real a e uma parte imaginária b. O conjunto dos complexos é

$$\mathbf{C=\{x + iy;\ x, y \in R\}.}$$

Um número complexo qualquer, $z = x + i\ y$ é composto de parte real e parte imaginária, respectivamente.

$$\boxed{\mathrm{Re}(z) = x,}$$

$$\boxed{\mathrm{Im}(z) = y.}$$

Unidade imaginária: define-se a unidade imaginária, representada pela letra i, como sendo a raiz quadrada de -1. Pode-se escrever então: i = $\sqrt{-1}$

Observe que a partir dessa definição, passam a ter sentido certas operações com números reais , a exemplo das raízes quadradas de números negativos .

Ex: $\sqrt{-16} = \sqrt{16}.\sqrt{-1} = 4.i = 4i$

- ***NOTAS:***

a) *diz-se que z = a + bi é a forma binômia ou algébrica do complexo z .*

b) *dado o número complexo z = a + bi, a é denominada parte real e b parte imaginária.*

Escreve-se: a = Re(z); b = Im(z).

c) *se em z = a + bi tivermos a = 0 e b diferente de zero, dizemos que z é um imaginário puro.*

Ex: z = 3i

d) *se em z = a + bi tivermos b = 0, dizemos que z é um número real .*

Exemplo: z = 5 = 5 + 0i.

e) *do item (c) acima concluímos que todo número real é complexo, ou seja, o conjunto dos números reais é um subconjunto do conjunto dos números complexos.*

f) *um número complexo z = a + bi pode também ser representado como um par ordenado*

z = (a,b) .

1.3. Potências de i:

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \,.\, i = -i$

$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

$i^5 = i^4 .\, i = 1.i = i$

$i^6 = i^5 .\, i = i.\, i = i^2 = -1$

$i^7 = i^6 .\, i = -i$, etc.

Percebe-se que os valores das potências de i se repetem no ciclo 1, i, -1, -i , de quatro em quatro a partir do expoente zero. Portanto, para se calcular qualquer potência inteira de i , basta eleva-lo ao resto da divisão do expoente por 4. Assim, podemos resumir:

$i^{4n} = i^r$ onde r = 0 , 1 , 2 ou 3. (r é o resto da divisão de n por 4).

Exemplo: Calcule i^{2001}

Ora, dividindo 2001 por 4, obtemos resto igual a 1. Logo $i^{2001} = i^1 = i$.

1.4. Conjugado de um número complexo

Dado um número complexo z = a + bi , chama-se conjugado de z e representa-se por $\bar{z}$, a um outro número complexo que possui a mesma parte real de z e a parte imaginária o simétrico aditivo da parte imaginária de z .

z = a + bi □ $\bar{z}$ = a - bi

Ex: z = 3 + 5i ; $\bar{z}$ = 3 - 5i

1.5. Adição e subtração dos números complexos na forma algébrica:

Para adicionar e subtrair números complexos na forma algébrica, basta ter em conta as regras habituais para operar com números reais e a igualdade $i^2=-1$.

Assim, sendo $z_{1=}x_1 + y_1 i \; e \; z_{2=}x_2 + y_2 i \; com \; x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$ tem-se:

- $z_1 + z_{2=} (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$

- $z_1 - z_{2=} (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$

Exemplos

Sendo z_1=3+i e z_2=1+2i, temos:

- $z_1 + z_{2=} (3 + i) + (1 + 2i) = 4 + 3i$

- $z_1 - z_{2=} (3 + i) - (1 + 2i) = 2 - i$

1.6. Multiplicação e divisão dos números complexos na forma algébrica:

Para multiplicar e dividir números complexos na forma algébrica basta ter em conta as regras habituais para operar com números reais e a relação $i^2=-1$.

Assim, se $z=a+ib$ e $w=c+id$, tem-se:

- $z \cdot w=(ac-bd)+i(ad+bc)$

- $z/w=a+ib/c+id=(a+ib)(c-id)/(c+id)(c-id)=(ac+bd)+i(bc-ad)/c^2+d^2$, se $w \neq 0$

2. Exercícios:

Utilizar exercícios do livro didático para fixação da identificação dos números complexos e suas operações.

Atividade 2

- HABILIDADE RELACIONADA: Identificar com precisão um número complexo; distinguir parte real e parte imaginária de um número complexo; conjugado; potência de i e operações na forma algébrica.
- PRÉ-REQUISITOS: Operações elementares com números reais; identificação de raízes de uma função a partir da sua representação gráfica; determinação das raízes de uma função a partir da sua representação algébrica; produtos notáveis.
- TEMPO DE DURAÇÃO: 25 minutos
- RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático para consulta.
- ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.
- OBJETIVOS: Revisão e fixação através de atividades de avaliações.
- METODOLOGIA ADOTADA:
  Uma lista de exercícios extra para a melhor fixação da atividade 01.

<u>Lista de exercícios de fixação</u>

1) (FAAP) Calcular o quociente: $\frac{1+i}{2-i}$

Gabarito $\frac{1+3i}{5}$

2) (VUNESP) Sendo i a unidade imaginária, o valor de $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4$ é:

a) -1

b) –i

c) 2i

d) i

e) 1

Gabarito E

3) (MACK) O número $(1+i)^{10}$ é igual a:

a) 32i

b) -32i

c) 32 + 10i

d) 32-10i

e) 10i

Gabarito A

4) O valor de $\frac{i^{246}+i^{121}}{i^{34}}$ é:

a) i

b) 2i

c) -1

d) 1 – i

e) 2

Gabarito D

5) (MACK) A solução da equação $|Z| + Z = 2 + i$ é um número complexo de módulo:

a) 5/4

b) $\sqrt{5}$

c) 1

d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

e) 5/2

Gabarito A

6) O número complexo 2z, tal que $5z + \overline{Z} = 12 + 6i$ é:

Gabarito $Z = 4 + 3i$

7) Calcule $[(1+i)^{80} + (1+i)^{82}] : i^{96}.2^{40}$

Gabarito : 1+2i

8) (UFES) O valor da expressão $E = x^{-1} + x^2$, para $x = 1 - i$, é:

a)-3i

b)1-i

c) 5/2 + (5/2)i

d) 5/2 - (3/2)i

e) 1/2 - (3/2)i

Gabarito B

9) Qual é o valor de m para que o produto de $(2 + mi).(3 + i)$ seja imaginário puro?

a) 5

b) 6

c) 7

d) 8

e) 10

Gabarito B

10) Encontre os números reais x e y de modo que $(3x + 4yi) + (5 + 6i) = 11 + 18i$.

Gabarito: $x = 2$ e $y = 3$

Atividade 3

- HABILIDADE RELACIONADA: Identificar os números complexos nas suas diversas formas; transformar números complexos para a forma trigonométrica.
  H36 – Efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica.
- PRÉ-REQUISITOS: Representação algébrica dos números complexos; plano cartesiano; razões trigonométricas no triângulo retângulo; razões trigonométricas na circunferência; Teorema de Pitágoras.
- TEMPO DE DURAÇÃO: 150 minutos
- RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático.
- ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.
- OBJETIVOS: Apresentar o plano de Argand-Gauss e a representação polar dos números complexos.
- METODOLOGIA ADOTADA:

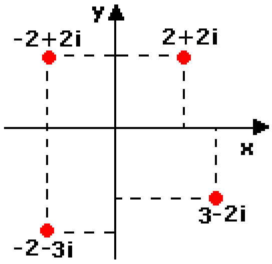
1. **O plano complexo:**

Podemos interpretar os números complexos como sendo pontos do plano cartesiano. Um número complexo z=a+bi pode ser representado pelo par ordenado (a,b) de números reais, portanto corresponde a um ponto P do plano cartesiano R^2 com coordenadas a e b.

Exemplos

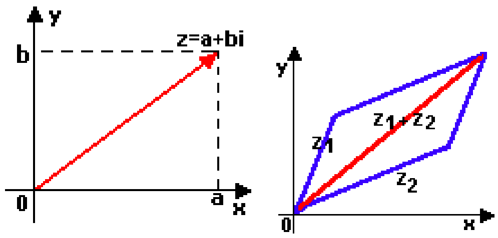
a) z=2+2i é representado pelo ponto (2,2)
b) z=-2+2i é representado pelo ponto (-2,2)
c) z=3-2i é representado pelo ponto (3,-2)
d) z=-2-3i é representado pelo ponto (-2,-3)

Estes números estão representados no gráfico:



2. Interpretação vetorial dos números complexos:

Um número complexo z=a+bi pode ser considerado como um vetor OP onde a origem deste vetor é a origem do plano cartesiano O=(0,0) e a extremidade é o ponto P=(a,b), desse modo o vetor tem coordenadas a e b.



As regras do paralelogramo para a soma e subtração de vetores também se aplicam para soma e subtração de números complexos.

3. Valor absoluto de um número complexo:

O módulo ou valor absoluto de um número complexo z=a+bi é definido com sendo o número real não negativo.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- *<u>Propriedades gerais do Valor absoluto</u>*

Se z e w são números complexos, então:

a) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

b) $|z| \geq 0$

c) $|z| = 0$ se, e somente se, $z=0$

d) $|z.w| = |z|.|w|$

e) $|z/w|= |z|/|w|$ se w # 0

f) $z.\bar{z} = |z|^2$

g) $|z+w| \leq |z|+|w|$, (des.triangular)

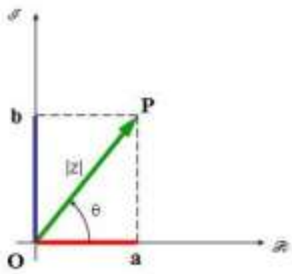
h) $|z-w| \leq |z|+|w|$, (des.triangular)

i) $|z|-|w| \leq |z-w|$, (des.triangular)

j) $|Re(z)| \leq |z|$

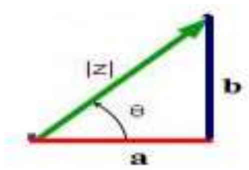
k) $|Im(z)| \leq |z|$

4. Argumento de um número complexo:



O segmento de reta OP é chamado de módulo do número complexo. O arco formado entre o eixo horizontal positivo e o segmento OP, no sentido anti-horário, é chamado de argumento de z.

Observe a figura abaixo para determinarmos as características do argumento de z.



No triângulo retângulo formado, podemos afirmar que:

$$sen\ \theta = \frac{b}{|z|}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|}$$

Exemplo 1. Dado o número complexo z = 2 + 2i, determine o módulo e o argumento de z.

Solução: Pelo número complexo z = 2 + 2i, sabemos que a = 2 e b = 2. Segue que:

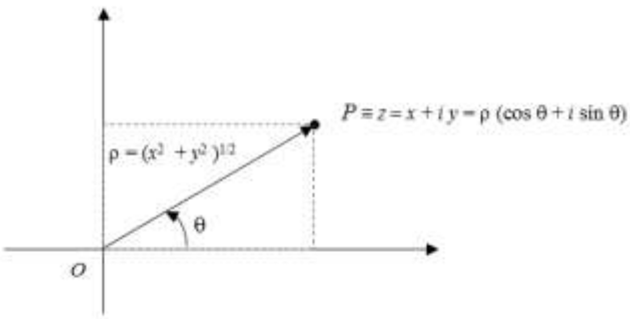
$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$sen\ \theta = \frac{b}{|Z|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Com os valores de seno e cosseno percebemos que $\boldsymbol{\theta}$ é um arco notável, assim, podemos afirmar que $\boldsymbol{\theta} = 45°$ou $\frac{\pi}{4}$.

5. Forma trigonométrica dos números complexos:



Os números complexos também possuem uma forma trigonométrica ou polar, que será demonstrada com base no argumento de z (para z ≠ 0).

Considere o número complexo z = a + bi, em que z ≠ 0, dessa forma temos que: cos Θ = $\frac{a}{p}$ e sen Θ = $\frac{b}{p}$. Essas relações podem ser escritas de outra forma, acompanhe:

cosΘ = $\frac{a}{p}$ **→ a = p.cosΘ**

senΘ = $\frac{b}{p}$ **→ b = p.senΘ**

Vamos substituir os valores de a e b no complexo z = a + bi.

$\boxed{z = p.\cos\Theta + p.sen\Theta i \rightarrow z = p.(\cos\Theta + i.sen\Theta)}$

Essa forma trigonométrica é de grande utilidade nos cálculos envolvendo potenciações e radiciações.

- **Operações na forma trigonométrica:**

a) **Multiplicação:**

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]}$$

b) **Divisão:**

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]}$$

c) **Potenciação:**

$$\boxed{z^n = \rho^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]}$$

d) **Radiciação:**

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{\rho} \{\cos[(\theta + 2k\pi) / n] + i \operatorname{sen}[(\theta + 2k\pi) / n]\}}$$

Vejamos alguns exemplos para melhor compreensão:

Escreva cada um dos seguintes números complexos na forma trigonométrica

Exemplo 1: ***z = 1 + i***

Solução: *Pela forma algébrica, temos que: a = 1 e b = 1*

Segue que:

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Assim, obtemos:

$$sen\,\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como o ponto (a, b) = (1, 1) está no primeiro quadrante, podemos afirmar que o ângulo θ que apresenta os valores de seno e cosseno indicados acima é $\theta = 45^o$*. Dessa maneira, a forma trigonométrica do número complexo será:* $z = \sqrt{2}\,(\cos 45^o + i \cdot sen\ 45^o)$

Exemplo 2: ***z = -1 + i√3***

Solução: *A partir da forma algébrica, obtemos: a = -1 e b = √3*

O módulo de z será dado por:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

Segue que:

$$sen\,\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{1}{2}$$

Como o ponto (a, b) = (-1,√3) pertence ao <u>*segundo*</u> *quadrante, podemos afirmar que o ângulo θ que apresenta os valores de seno e cosseno indicados é θ = 120o. Logo, a forma trigonométrica ou polar do número complexo será:* $z = 2(\cos 120^o + i \cdot sen\ 120^o)$.

Exemplo 3: Obtenha a forma algébrica do número complexo: $z = 6(\cos 270^o + i \cdot sen\ 270^o)$

Solução: *Da trigonometria no ciclo, temos que:*

$\cos 270^o = 0$ *e* $sen\ 270^o = -1$

Assim, obtemos:

$z = 6(cos270^o + i \cdot sen\ 270^o) = 6[0+i \cdot (-1)] = -6i$

Portanto, a forma algébrica de z é z = – 6i

Atividade 4

- HABILIDADE RELACIONADA: Identificar os números complexos nas suas diversas formas; transformar números complexos para a forma trigonométrica.
  H36 – Efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica.
- PRÉ-REQUISITOS: Representação algébrica dos números complexos; plano cartesiano; razões trigonométricas no triângulo retângulo; razões trigonométricas na circunferência; Teorema de Pitágoras.
- TEMPO DE DURAÇÃO: 25 minutos
- RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático.
- ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.
- OBJETIVOS: Fixação e revisão dos conteúdos abordados na atividade anterior.
- METODOLOGIA ADOTADA:

Uma lista de exercícios para a melhor fixação da atividade 03. Com base no livro didático adotado pela escola, os exercícios serão das páginas 157, 158 e 159 do livro "Matemática Ciência e Aplicações – Volume 03".

CESD

Professora: Maria Amelia **Data: __/__/__** **Turma: 3001**

Aluno(a):____ **Nº: __________**

Avaliação de Matemática

QUESTÃO 01

O triângulo ABC cujos vértices são os números complexos $A = 3 + 2i,\ B = -2 + 3i\ e\ C = A + B$ é um triângulo:

(A) Equilátero

(B) Escaleno

(C) Isósceles

(D) Retângulo e escaleno

(E) Retângulo e isósceles

RESPOSTA: E

QUESTÃO 02

Assinale a alternativa que apresenta o número z = 1 + i escrito corretamente na forma trigonométrica.

A) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$

B) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$

C) $\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$

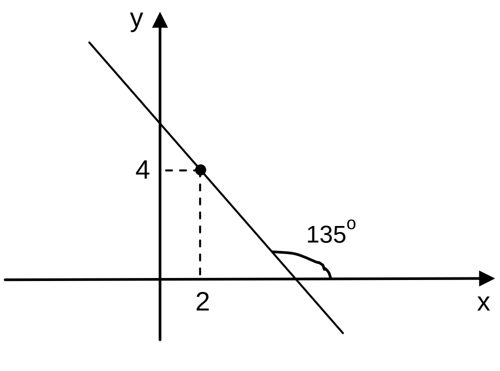
D) $\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$

E) $\sqrt{2}\left(\text{sen}\,\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4}\right)$

RESPOSTA: A

QUESTÃO 03

O gráfico a seguir é uma reta (r) cuja equação é escrita por $y = mx + n$.



O número complexo *z* que possui argumento igual ao ângulo de inclinação da reta (r) e módulo igual a *n* é

RESPOSTA: A

QUESTÃO 04

Os afixos *A*, *B* e *C*, dos respectivos números complexos $z = -1 + 3i$, $w = 3 + i$ e $v = -\frac{3}{2} - 3i$ formam, no plano de Argand-Gauss, o triângulo *ABC*.

(A) **ESCREVA** a equação da reta suporte que contém a altura do triângulo *ABC* relativa ao lado *AB*.

(B) **DETERMINE** a área do triângulo *ABC*.

RESPOSTAS: (A) 2x – y = 0 (B) 12,5 u.a.

QUESTÃO 05

De forma simplificada, centro de massa de um corpo é o ponto onde se considera concentrada toda a massa do corpo. Em Física, muitas vezes, estuda-se o centro de massa de um corpo, aproximadamente plano, inserindo-o num plano complexo. Assim, define-se o centro de massa de um conjunto de materiais de massas $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ localizadas, respectivamente, nos afixos dos números complexos $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ como sendo o afixo do número complexo *z* dado por:

$$z = \frac{z_1 m_1 + z_2 m_2 + z_3 m_3 + \dots + z_n m_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}$$

Considere quatro pontos materiais de massas $m_1 = 2\,\text{kg}$, $m_2 = 3\,\text{kg}$, $m_3 = 4\,\text{kg}$ e $m_4 = 5\,\text{kg}$, afixos dos números complexos $z_1 = 3$, $z_2 = 4 + 5i$, $z_3 = 6i$ e $z_4 = -2 + 2i$.

DETERMINE o número complexo *z* cujo afixo é o centro de massa desses pontos materiais.

RESPOSTA: $z = \frac{4}{7} + \frac{49}{14} i$

AVALIAÇÃO

A avaliação envolve aluno e professor e deve ser realizada de maneira que ambos possam avaliar o quanto se desenvolveu cada uma das competências relacionadas aos temas estudados. As tarefas feitas nas atividades 2 e 4, feitas individualmente com consulta em 50 minutos, servirão para o docente observar se os alunos entenderam o assunto.

É apropriado verificar os acertos dos alunos nas questões relacionadas com o tema que constarão no SAERJINHO. Este será outro método de avaliação. Porem, nele o professor poderá verificar a aprendizagem não apenas no assunto que norteou este plano de trabalho, mas também em conteúdos estudados no bimestre anterior.

Aplicação de uma avaliação escrita individual, teste sem consulta, (100 minutos) para investigação da capacidade de utilização de conhecimentos adquiridos para a resolução das questões envolvendo números complexos e suas operações nas suas diversas formas.

Neste plano de trabalho procurei utilizar os novos conhecimentos que obtive com os planos de ação da formação continuada. As aulas se tornaram mais dinâmicas por conta do vídeo que inicia o tema abordado, despertando o interesse dos alunos pelo mesmo.

Apesar de não ter a possibilidade de apresenta-los o Geogebra, pedi para aqueles que tivessem a curiosidade em aprender pesquisar mais sobre o programa e tirarem as dúvidas comigo.

- ***OBSERVAÇÕES IMPORTANTES SOBRE ESTE PLANO DE TRABALHO***

Ele foi preparado levando em consideração o tempo disponível de aulas para a turma 3001 do Colégio Estadual Santos Dias no ano letivo em curso (2013) e o grau de conhecimento dos alunos. Há detalhes e atividades interessantes que poderão ser acrescentados caso o tempo permita, que podem prender a atenção dos alunos e mostrar ainda mais a aplicabilidade do tema.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Iezzi, Gelson. Matemática: Ciências e Aplicações. 6ª edição. São Paulo: Saraiva, 2010.

Paiva, Manoel. Matemática: volume único. 1ª edição. São Paulo: Moderna, 2005.

ROTEIROS DE ACÃO – Números Complexos – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 3º bimestre/2013 http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ acessado em 25/08/2013.

Endereços eletrônicos acessados de 20/08/2013 a 27/08/2013, citados ao longo do trabalho:

https://www.youtube.com/watch?v=M_wA023mnhI

https://www.youtube.com/watch?v=UG0xVl_NNNA

http://www.algosobre.com.br/matematica/numeros-complexos-ii.html

http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/mario_servelli_rosa.pdf