Pirâmides
e
Cones

Tarefa 2- 2º Ano – 3º Bimestre/2014

Tutor: Susi Cristine Britto Ferreira

Cursista: Simone Nascimento de Albuquerque

Índice

INTRODUÇÃO

Este plano de trabalho tem por objetivo mostrar que os conceitos ligados à geometria espacial (Pirâmide e Cones) não são apenas blocos determinados de informações, assim fugindo de como o assunto é trabalhado de forma tradicional, (conteúdos sequenciados, carregados de fórmulas e que são apresentados pelo professor e quase sempre sem significado para o aluno).

Além disso, as atividades propostas são dinâmicas, sendo mais fácil para o aluno conhecer os conceitos relativos à geometria espacial, trazendo uma visão diferente e bem mais motivadora do que a tradicional.

Para a totalização do plano, serão necessários doze tempos de cinquenta minutos para desenvolvimento dos conteúdos mais dois tempos para avaliação da aprendizagem, feitas em sala.

Atividade 1: Que Sólidos são esses?

Duração Prevista: 100 minutos

Área De Conhecimento: Matemática

Assunto: Geometria Espacial – Prismas, Cilindros, pirâmides e cones.

Objetivos: Apresentar os sólidos geométricos, mostrando suas principais características.

Pré-Requisitos: O Conceito de volume de sólidos geométricos.

Material Necessário: Algum tipo de "latinha" no formato de cilindro, barbante, régua, calculadora, água ou pedrinhas de piscina e medidor de volume e material disponibilizado para escola pelo projeto da Firjan.

Organização Da Classe: Turma disposta em duplas, propiciando trabalho organizado e colaborativo.

Descritores Associados:

H04 – Reconhecer prismas, pirâmides, cones, cilindros ou esferas por meio de suas principais características.

Metodologia Adotada:

a) O professor deverá pedir que os alunos meçam o diâmetro da circunferência da base de suas latinhas com régua e com a ajuda do barbante o comprimento das circunferência das mesmas. Dividindo o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro, deve-se chegar a um valor próximo de 3,14. Deve-se fazer o aluno concluir que este valor é o da constante PI.

b) O aluno deverá medir a altura da latinha, e dividir o diâmetro da circunferência por 2 para a determinação do raio, dessa forma poderá ser calculado o volume desse cilindro.

c) Com o auxilio do material da Firjan (sólidos geométricos em acrílico) é possível demonstrar o volume de alguns sólidos fazendo comparações de prismas e pirâmides de mesma base e altura assim como cilindros e cones. O professor poderá usar água ou pedrinhas de piscina para encher os sólidos, e quando retirar esse material colocar nos recipientes de medir volume para as devidas comparações.

Atividade 2: Um pouquinho de teoria.

Duração: 200 minutos.

Assunto: Geometria Espacial - Pirâmides

Objetivos: Apresentar o conteúdo através da interpretação de enunciados e generalização de situações para resolver problemas.

Pré-requisitos: Conhecer os sólidos geométricos.

Material necessário: Livro didático e exemplos adicionais.

Organização da classe: Turma disposta em duplas, propiciando trabalho organizado e colaborativo.

Descritores associados:

H 24 - Resolver problemas envolvendo a medida da área total e/ou lateral de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

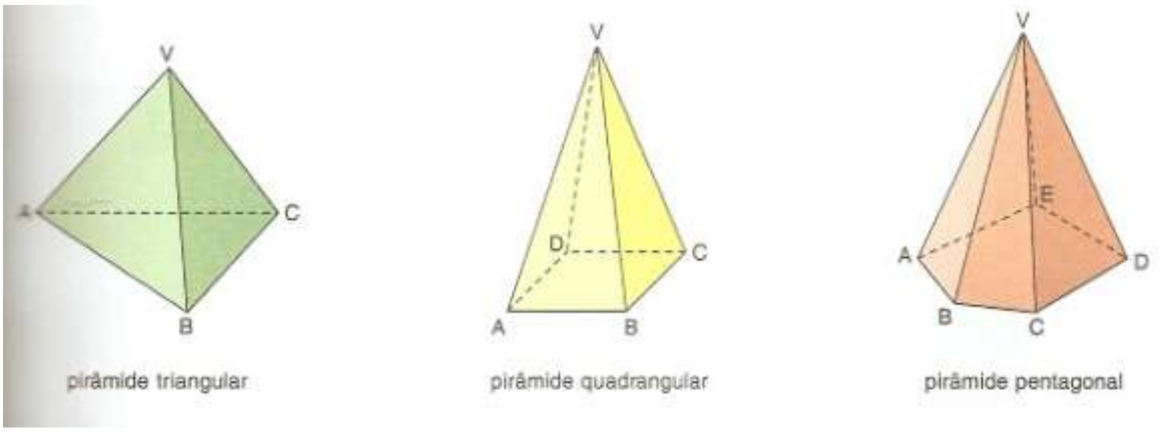
H 25 - Resolver problemas envolvendo noções de volume.

A PIRÂMIDE

Relembrando: dados um plano α, um polígono P contido em α e um ponto V que não pertence a α temos:

A figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade no ponto V e a outra num ponto do polígono P denomina-se pirâmide.

Exemplos:



(figura 9)

5.1- Área da superfície de uma pirâmide

Uma pirâmide é formada por uma base e suas faces laterais. Dessa maneira a área da superfície de uma pirâmide fica assim determinada:

$$S_{total} = S_{base} + S_{lateral}$$

Numa pirâmide regular (pirâmide em que a base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base), se o polígono da base possui n lados, a área lateral pode ser calculada multiplicando por n a área de cada face lateral.

5.1.1- Área do tetraedro regular

Como as faces do tetraedro regular são triângulos equiláteros de lado a, a área total do tetraedro regular é igual a quatro vezes a área de uma face

$$S_t = 4.S_{triângulo} = 4.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$$

Exemplo:

Uma folha de papel colorido, com forma de um retângulo de 12 cm de largura e 15 cm de comprimento, será usada para cobrir todas as faces e a base de uma pirâmide quadrangular regular cuja aresta da base mede 8 cm e cuja altura mede 3 cm. Levando em conta que não deve haver desperdício de papel, quanto sobrará de papel colorido?

Resolução:

Desenhando a pirâmide temos: $m = \frac{l}{2} \Rightarrow m = \frac{8}{2} = 4$ Cálculo do apótema da pirâmide (g):

Como o ΔVOM é retângulo, aplicando Pitágoras, temos;

$$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow g^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow g = 5$$

Cálculo da áreas da base:

$$S_b = l^2 \Rightarrow S_b = 8^2 \therefore S_b = 64cm^2$$

Cálculo da área lateral:

$$S_{face} = \frac{l \cdot g}{2} = \frac{8 \cdot 5}{2} \Rightarrow S_{face} = 20cm^2$$

$$S_l = 4 \cdot S_{face} = 4 \cdot 20 = 80cm^2$$

Cálculo da área total:

$$S_t = S_l + S_b \Rightarrow S_t = 80 + 64 = 144cm^2$$

Cálculo da área da folha de papel:

$$S = 15 \cdot 12 \therefore S = 180cm^2$$

Sobra de papel:

$$P = S - S_t = 180 - 144 \therefore P = 36cm^2$$

Portanto, sobrarão 36cm^2 de papel.

5.2- O volume da pirâmide

Teorema1: duas pirâmides de mesma base e mesma altura têm mesmo volume.

Teorema 2: O volume de uma pirâmide triangular é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

Teorema 3: o volume de qualquer pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

Volume da pirâmide= $\frac{1}{3}$(área da base) x (altura)

Exemplo:

A base de uma pirâmide é um quadrado de lado 3 cm. Sabendo-se que a altura da pirâmide mede 10 cm, calcular o volume dessa pirâmide.

<u>*Resolução:*</u>

Como $V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h$, temos:

Cálculo da área da base:

A base é quadrado; logo:

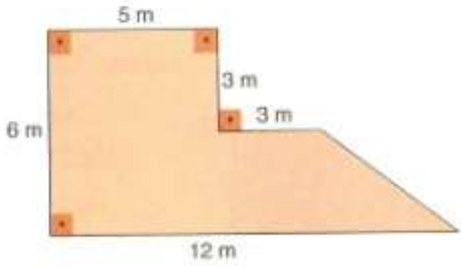
$$S_b = l^2 \Rightarrow S_b = 3^2 = 9 \therefore S_b = 9cm^2$$

Cálculo do volume:

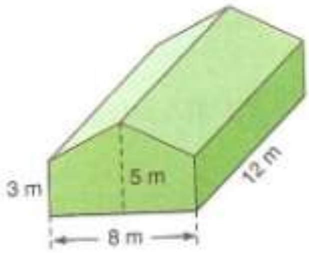
$$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 10 \therefore V = 30cm^3$$

EXERCÍCIOS

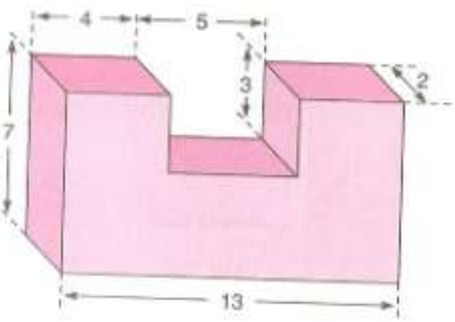
1. Um prisma reto com 1,5 m de altura tem seção transversal como mostra a figura. Determine a área total desse prisma.



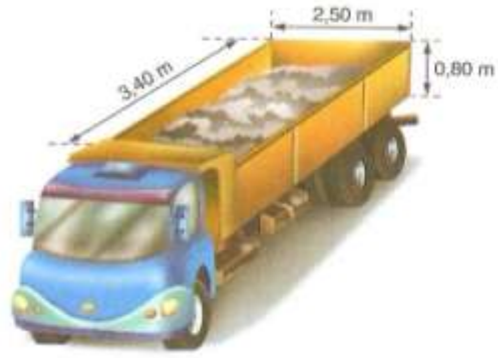
2. Calcule o volume de ar contido em um galpão com a forma e as dimensões dadas pela figura.



3. Calcule a área total do solido indicado na figura.

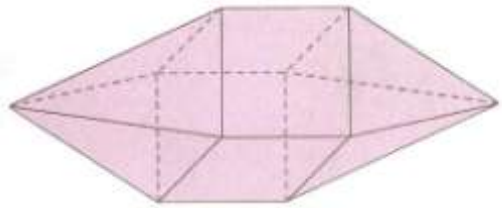


4. Um caminhão basculante tem a carroceria com as dimensões indicadas na figura.

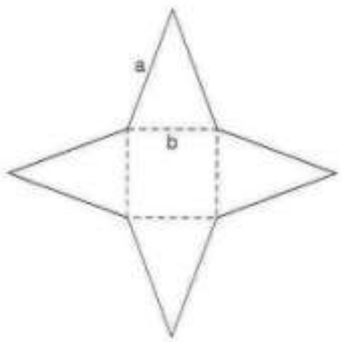


Calcule quantas viagens deverá fazer para transportar 136 m^3 de areia.

5. A figura abaixo mostra duas pirâmides regulares cujas bases coincidem com duas faces de um cubo de aresta a. Sabe-se que as alturas das pirâmides são iguais à diagonal do cubo. Determine a área total do sólido formado pelas pirâmides.



6. A figura abaixo ilustra a planificação de uma pirâmide de base quadrada com lado medindo b e faces laterais formadas por triângulos isósceles com um lado medindo b e os outros dois medindo a.



Analise as afirmações:

a) A área da superfície da pirâmide é $b^2 + 2b\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$

b) O volume da pirâmide é $\frac{1}{3}b^2 a$

Atividade 3: E mais teoria.

Duração: 200 minutos.

Assunto: Geometria Espacial - Cones

Objetivos: Apresentar o conteúdo através da interpretação de enunciados e generalização de situações para resolver problemas**.**

Pré-requisitos: Conhecer os sólidos geométricos.

Material necessário: Livro didático e exemplos adicionais.

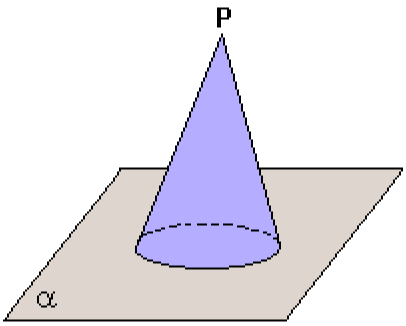
Organização da classe: Turma disposta em duplas, propiciando trabalho organizado e colaborativo.

Descritores associados:

H 24 - Resolver problemas envolvendo a medida da área total e/ou lateral de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

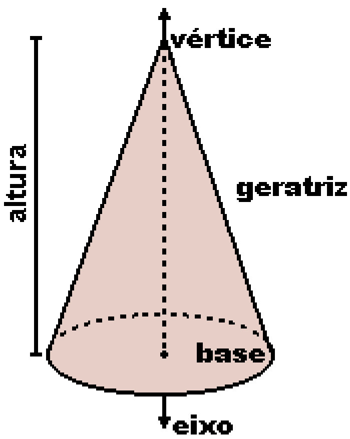
H 25 - Resolver problemas envolvendo noções de volume.

O conceito de cone



Considere uma região plana limitada por uma curva suave (sem quinas), fechada e um ponto P fora desse plano. Chamamos de cone ao sólido formado pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade em P e a outra num ponto qualquer da região.

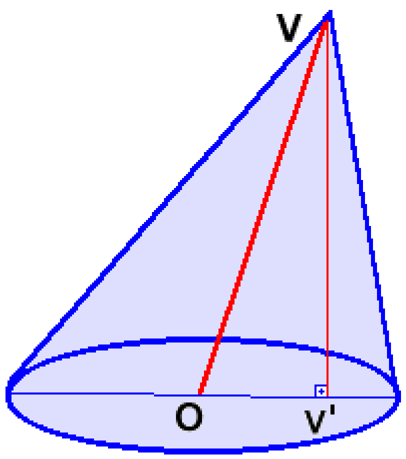
Elementos do cone



- **Base**: A base do cone é a região plana contida no interior da curva, inclusive a própria curva.
- **Vértice**: O vértice do cone é o ponto P.
- **Eixo**: Quando a base do cone é uma região que possui centro, o eixo é o segmento de reta que passa pelo vértice P e pelo centro da base.
- **Geratriz**: Qualquer segmento que tenha uma extremidade no vértice do cone e a outra na curva que envolve a base.
- **Altura**: Distância do vértice do cone ao plano da base.

- **Superfície lateral**: A superfície lateral do cone é a reunião de todos os segmentos de reta que tem uma extremidade em P e a outra na curva que envolve a base.
- **Superfície do cone**: A superfície do cone é a reunião da superfície lateral com a base do cone que é o círculo.
- **Seção meridiana**: A seção meridiana de um cone é uma região triangular obtida pela interseção do cone com um plano que contem o eixo do mesmo.

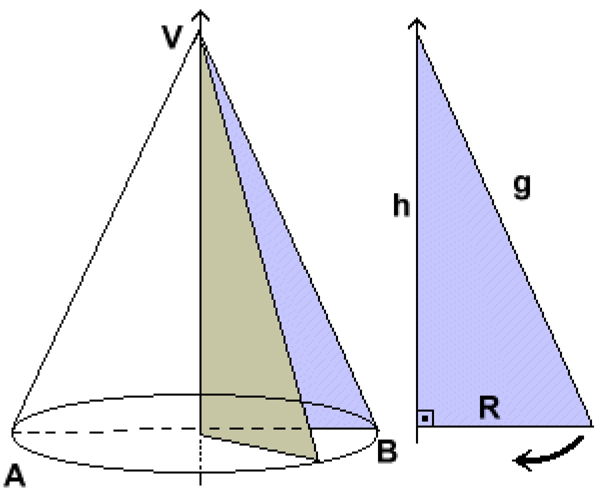
Classificação do cone



Quando observamos a posição relativa do eixo em relação à base, os cones podem ser classificados como retos ou oblíquos. Um cone é dito **reto**quando o eixo é perpendicular ao plano da base e é **oblíquo** quando não é um cone reto. Ao lado apresentamos um cone oblíquo.

Observação: Para efeito de aplicações, os cones mais importantes são os cones retos. Em função das bases, os cones recebem nomes especiais. Por exemplo, um cone é dito circular se a base é um círculo e é dito elíptico se a base é uma região elíptica.

Observações sobre um cone circular reto



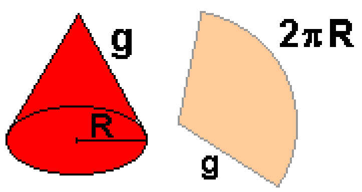
1.Um cone circular reto é chamado **cone de revolução** por ser obtido pela rotação (revolução) de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos

2. A seção meridiana do cone circular reto é a interseção do cone com um plano que contem o eixo do cone. No caso acima, a seção meridiana é a região triangular limitada pelo triângulo isósceles VAB.

3. Em um cone circular reto, todas as geratrizes são congruentes entre si. Se g é a medida de cada geratriz então, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$\mathbf{g^2 = h^2 + R^2}$$

4. A **Área Lateral** de um cone circular reto pode ser obtida em função de g (medida da geratriz) e R (raio da base do cone):

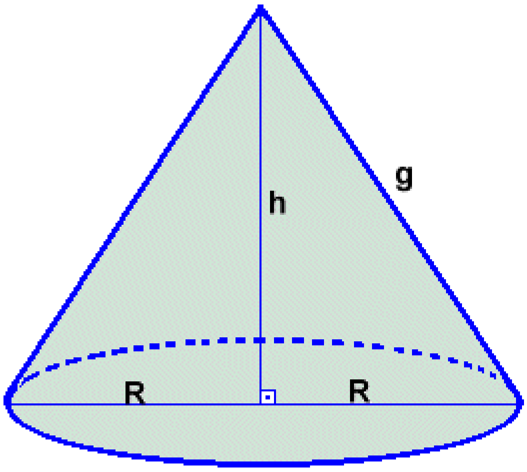


$$\mathbf{A_{Lat} = \pi\, R\, g}$$

5. A **Área total** de um cone circular reto pode ser obtida em função de g (medida da geratriz) e R (raio da base do cone):

$$\mathbf{A_{Total} = \pi\, R\, g + \pi\, R^2}$$

Cones Equiláteros



Um cone circular reto é um cone equilátero se a sua seção meridiana é uma região triangular equilátera e neste caso a medida da geratriz é igual à medida do diâmetro da base.
A área da base do cone é dada por:

$$\mathbf{A_{Base} = \pi R^2}$$

Pelo Teorema de Pitágoras temos:

$$(2R)^2 = h^2 + R^2$$
$$h^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$$

Assim:

$$\mathbf{h = R\sqrt{3}}$$

Como o volume do cone é obtido por 1/3 do produto da área da base pela altura, então:

$$\mathbf{V = (1/3)\ \pi \sqrt{3}\, R^3}$$

Como a área lateral pode ser obtida por:

$$\mathbf{A_{Lat} = \pi\ R\ g = \pi\ R\ 2R = 2\ \pi\ R^2}$$

então a área total será dada por:

$$\mathbf{A_{Total} = 3\ \pi\ R^2}$$

Exercícios

1. Uma torneira enche um funil cônico à razão de $100cm^3/s$, enquanto outra torneira o esvazia a razão de $28cm^3/s$. Sendo 6 cm o raio da boca do funil e 12 cm a sua altura, o tempo, em segundos, necessários para que o funil fique completamente cheio é correspondente a:

a) 2 x b) 3 c) 4 d) 5

2. Num cone reto, a altura é 3m e o diâmetro da base é 8m. Então, a área total, em metros quadrados, vale:

a) 36π x b) 52π c) 16π d) 20π

3. Uma ampulheta pode ser considerada como formada por 2 cones retos idênticos, unidos pelo vértice, inscritos em um cilindro reto. A razão entre o volume do cilindro e o volume de um dos cones é:

a) 3 b) 5 c) 6 x d) 7 e) 8

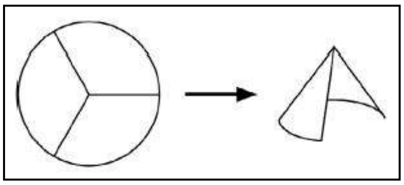
4) Calcule o volume de um cone reto, sabendo que sua superfície lateral planificada é um setor circular de raio e ângulo central respectivamente medindo 24cm e 45º.

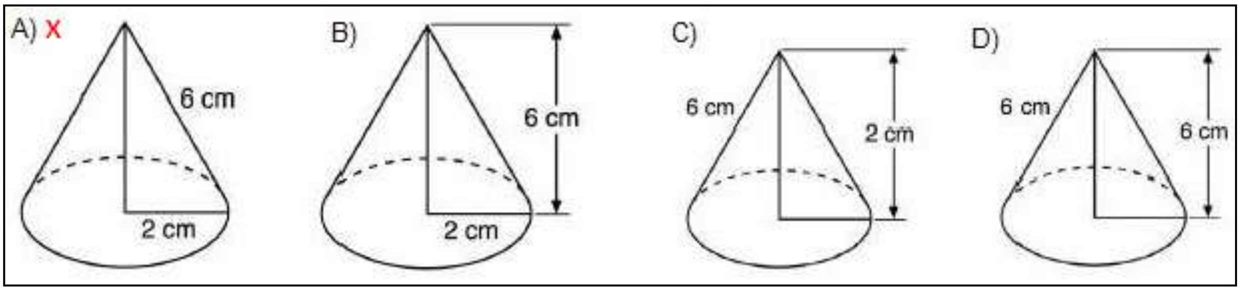
a) $27\sqrt{5}\pi\ cm^3$ b) $27\sqrt{7}\pi\ cm^3$ x c) $25\sqrt{7}\pi\ cm^3$ d) $27\pi\ cm^3$

5. Calcule a área da superfície lateral e a capacidade de um cone de revolução de altura 9cm, sabendo que sua área lateral vale o dobro da área da sua base.

a) $50\pi\ cm^2\ \ e\ \ 80\pi\ cm^3$ b) $54\pi\ cm^2\ \ e\ \ 80\pi\ cm^3$ c) $52\pi\ cm^2\ \ e\ \ 81\pi\ cm^3$ d) $54\pi\ cm^2\ \ e\ \ 81\pi\ cm^3$ x

6. Construa um copo de papel! Recorte um círculo de papel de diâmetro igual a 12cm. Divida-o em três partes iguais e cole cada parte, conforme indicado na figura. Pronto! Você fez três copos de papel! Qual das ilustrações a seguir melhor representa as dimensões dos copos construídos seguindo as instruções acima?





7. O raio da base de um cone circular reto é igual à média aritmética da altura e a geratriz do cone. Sabendo-se que o volume do cone é 128□m³, temos que o raio da base e a altura do cone medem, respectivamente, em metros:

a) 9 e 8 b) 8 e 6 x c) 8 e 7 d) 9 e 6 e) 10 e 8

8. A base de um cone equilátero foi pintada com 10 latas de tinta, cada uma contendo 1,8 litros de tinta.
Nessas condições, para pintar a área lateral desse cone a quantidade de tinta necessária, em litros, é igual a:

a) 18 b) 27 c) 30 d) 36 x e) 40

9. Considere o triângulo isósceles OAB, com lados OA e OB de comprimento $R\sqrt{2}$ e lado AB de comprimento 2R. O volume do sólido, obtido pela rotação deste triângulo em torno da reta que passa por O e é paralela ao lado AB, é igual a:

a) $\frac{\pi}{2}R^3$ b) πR^3 c) $\frac{4\pi}{3}R^3$ x d) $\sqrt{2}\pi R^3$ e) $\sqrt{3}\pi R^3$

Atividade 4: Descobrindo as áreas da pirâmide e do cone

Duração Prevista: 100 minutos

Área De Conhecimento: Matemática

Assunto: Geometria Espacial - Pirâmides e cones

Objetivos: Trabalhar o conceito de área da pirâmide e do cone

Pré-Requisitos: Área das figuras planas

Material Necessário: Folha de atividades, lápis, folhas com as cópias das planificações, régua, tesoura.

Organização Da Classe: Turma disposta em duplas, propiciando trabalho organizado e colaborativo.

Descritores Associados:

H04 – Reconhecer prismas, pirâmides, cones, cilindros ou esferas por meio de suas principais características.

H07 – Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações.

H24 – Resolver problemas, envolvendo a medida da área total e/ou lateral de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

1ª parte – Áreas da Pirâmide

1. Observe a planificação que você recebeu de seu professor. Recorte na parte pontilhada e monte-a.

2. Que sólido geométrico você obteve após a montagem?

3. Quanto de papel seu professor deve ter utilizado apenas para construir a superfície desta pirâmide? Discuta com seu colega e dê um palpite!

4. Vamos começar, medindo a altura e a base de um dos triângulos da lateral da pirâmide triangular. Com estas informações, calcule sua área. Que valor encontrou? Compare seu resultado com os de seus colegas.

5. Quantos triângulos congruentes compõem a lateral desta pirâmide? Então, podemos com a medida da base e da altura de um único triângulo dessa lateral calcular sua área e multiplicá-la por para obtermos a área lateral.

6. Calcule a área lateral dessa pirâmide.

7. Meça a altura e a base do triângulo da base da pirâmide triangular e calcule sua área.

8. Agora que já sabemos qual é a área lateral da pirâmide triangular e a área de sua base, podemos determinar a área total dessa pirâmide. Desconsiderando as abas para colagem, quantos *cm2* de papel foram gastos na construção deste sólido? Este resultado está próximo de sua estimativa?

9. Observe a nova planificação entregue pelo seu professor. Você também deverá recortá-la e montá-la. Após fazer isso, Leia a observação a seguir e complete a Tabela.

Alguns polígonos planos recebem nomes em função da quantidade de lados ou ângulos. Por exemplo, os que têm três ângulos são chamados de triângulos, pois o radical tri é relativo à quantidade três. Os que têm quatro lados são chamados de quadriláteros, pois o radical "quadri" refere-se à quantidade quatro e "látero" a lados.

Base com	Pirâmide
3 lados	Triangular
4 lados	
5 Lados	
6 Lados	

10. Que tipo de pirâmide você construiu?

11. Tente calcular a área lateral da pirâmide quadrangular que você construiu. Não esqueça que ela possui 4 triângulos. Que valor você encontrou?

12. Agora é a vez de calcular a área da base da pirâmide. Para isso, você irá medir com a régua o lado do quadrado que forma esta base e em seguida, calcular a área.

13. Com os dados obtidos nos itens anteriores, preencha a tabela abaixo.

Pirâmide	Área Lateral	Área da Base	Área Total
Triangular			
Quadrangular			

2ª parte – Áreas do Cone

1. Observe a nova planificação que você recebeu. Recorte-a e monte-a. Que sólido você construiu?

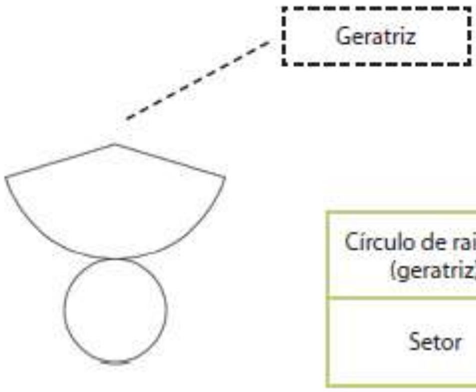
2. Que tal descobrirmos quantos cm^2 de papel foram gastos na construção do cone? Mas antes, dê um palpite e compare sua resposta com a de seu colega.

3. Veja que a planificação é formada por uma base, que é um círculo, e por um setor circular. Para calcular a área de superfície dessa figura geométrica, precisamos calcular suas áreas. Que tal

começarmos, calculando a área da base? Para isso, com o auxílio de uma régua, meça o raio do círculo da base que está em destaque pontilhado e calcule sua área, e seu comprimento, considerando π=3,14. Que valores você encontrou? Compare com a resposta do seu colega.

4. Chegou a vez de calcularmos a área do setor circular, que chamaremos de Área Lateral. Mas antes, vamos pensar na seguinte questão: Qual é o comprimento deste setor? **Dica**: você já o calculou. Compare o antes e depois do cone montado. Leia a observação a seguir, converse com seu professor e registre o valor desse comprimento!

5. Com as informações obtidas no item 3, a medida da geratriz e uma regra de três simples, complete a tabela a seguir e encontre a área sA do setor circular. Se tiver alguma dúvida, além do professor, a Tabela do item 6 a seguir pode lhe ajudar!



	Comprimento	Área
Círculo de raio "g" (geratriz)		
Setor		A_s

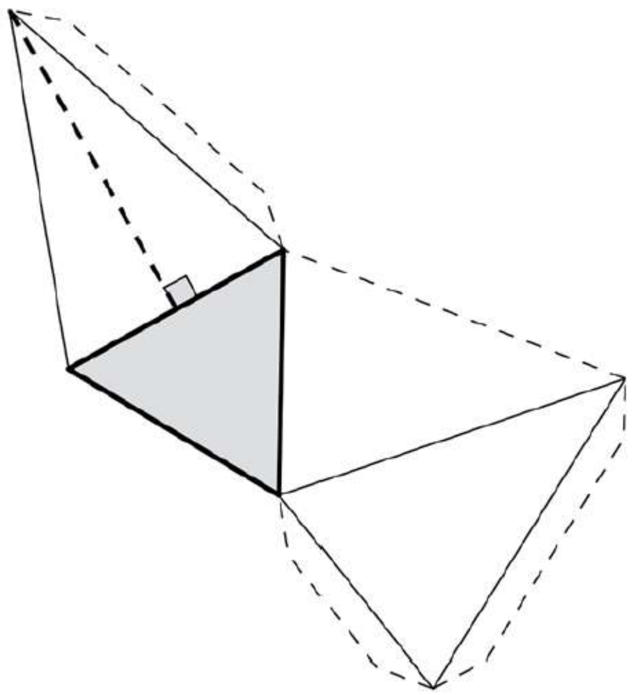
Resposta do Item 3

6. Repita esta conta com os dados literais constantes da Tabela a seguir e encontre uma fórmula para a área lateral de um cone com raio da base medindo *r* e geratriz medindo *g*.

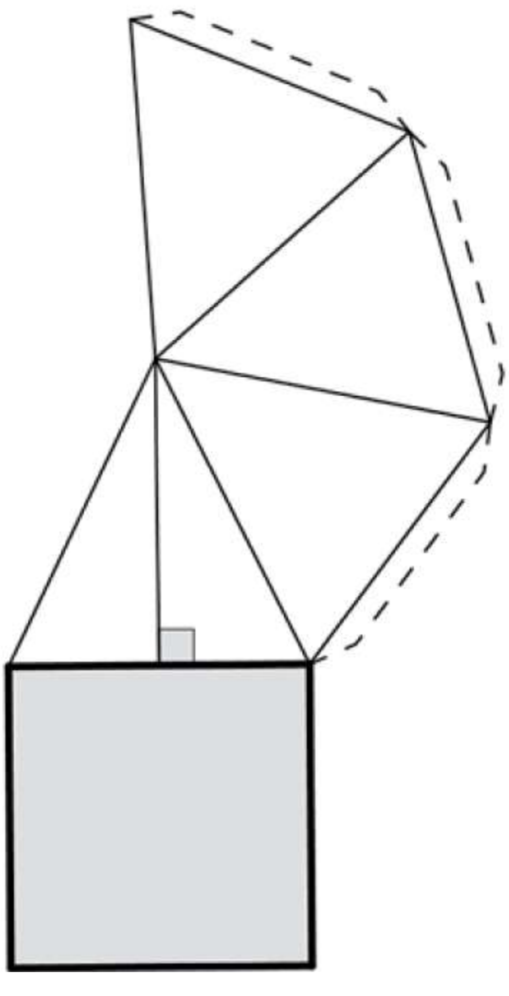
	Comprimento	Área
Círculo	$2\pi R$	πR^2
Arco	C	A_s

7. Descobriu quanto de papel seu professor gastou na planificação? Esse resultado é próximo de sua estimativa? Comente com seus colegas o seu resultado e faça um resumo do que você aprendeu, e revisou com esta atividade.

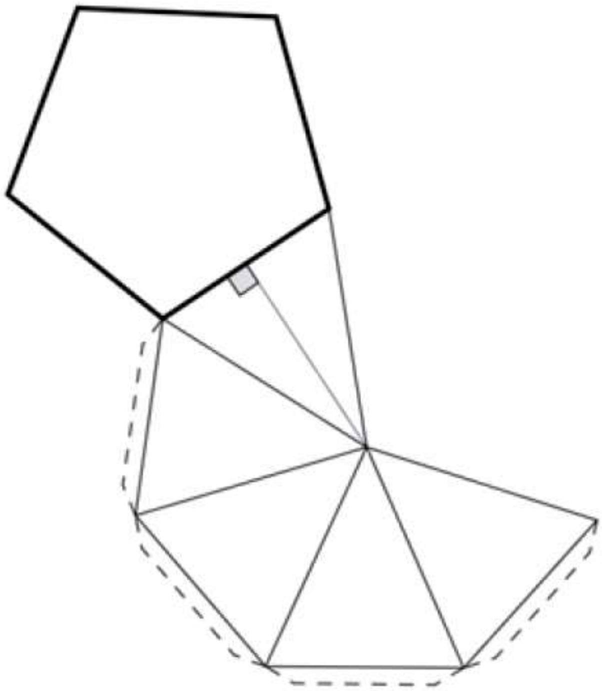
Sólido 1



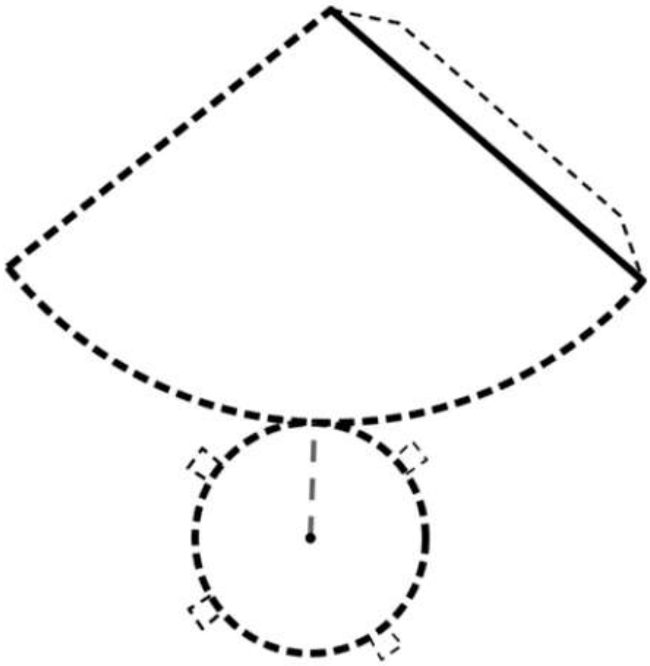
Sólido 2



Sólido 3



Sólido 4



AVALIAÇÃO

A avaliação envolve aluno e professor e deve ser realizada de maneira que ambos possam avaliar o quanto se desenvolveu cada uma das competências relacionadas aos temas estudados.

O maior objetivo desse plano de trabalho foi mostrar que o conceito geometria espacial não está pautado apenas nas técnicas de resolução e sim mostrar que o conteúdo já faz parte de nossas vidas e às vezes nem sabemos que estamos utilizando esse conceito matemático. Dessa forma todas as atividades sugeridas nesse plano de trabalho serão avaliadas. Os exercícios apresentados nas páginas 08, 09, 12, 13, 14, 15 e 16 deverão ser feitos em sala, como trabalhos, já as outras atividades também deverão ser pontuadas, mas de forma qualitativa, pois o importante nessas atividades são a participação e a cooperação entre os alunos.

Este plano de trabalho foi aplicado na turma 2010 do Colégio Estadual Professora Vilma Atanázio, e nessa instituição o professor pode decidir como será o critério de avaliação do aluno desde que siga os critérios abaixo.

Critério de pontuação referente ao assunto:

Avaliação bimestral	5 pontos
Saerj	1 ponto
Trabalhos	2 pontos
Avaliação qualitativa	2 pontos

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CECIERJ, Roteiros de Ação 3. <http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/> Acesso em: 01/08/2014.

CECIERJ, Roteiros de Ação 4. <http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/> Acesso em: 01/08/2014.

PROFESSOR WALTER TADEU. Disponível em: <www.professorwaltertadeu.mat.br> Acesso em: dia 07/08/14.

ALGO SOBRE VESTIBULAR, Geometria Espacial, Cone. Disponível em: <http://www.algosobre.com.br/matematica/geometria-espacial-cone.html> Acesso em: dia 07/08/14.

GIOVANNI, J. R., BONJORNO, J. R., GIOVANNI Jr, J. R. Matemática Fundamental. São Paulo: Editora FTD Ltda, 1994.