CECIERJ

Tarefa 3 – Plano de Trabalho 1 – Regularidades Numéricas: Sequências e Matemática Financeira

2º ano do Ensino Médio da Rede Pública

do Rio de Janeiro

Formação Continuada

Matemática - 2ºb - 2s

Grupo 1

Tutor: Claudio Rocha de Jesus

Isabel Cristina da Silva

Rio de Janeiro, 2013.

INTRODUÇÃO

A Matemática é uma disciplina considerada difícil, complicada e pouco valorizada no cotidiano do aluno, sendo, frequentemente, ministrada utilizando-se de metodologias tradicionais que seguem basicamente a mesma estrutura, a saber: apresentação do conteúdo, memorização de conceitos, resolução repetitiva de exercícios e prova. O fator a que isso se deve é bastante questionável: seria devido à resistência e/ou acomodação por parte dos professores? Ou desinteresse e apatia por parte dos alunos? O fato é que, no Ensino Médio, a tendência tecnicista de ensino, a qual segundo Fiorentini (1995, p. 15) concebe a matemática como um conjunto de técnicas, regra, algoritmos, ainda persiste com o intuito de diminuir tal tendência nesse nível de ensino.

Do ponto de vista do Ensino Médio Público, precisa-se, ao menos, dar um motivo concreto para os alunos se desenvolverem, visto que, segundo Martins (2012), "(...) é necessário que os alunos descubram os seus próprios caminhos. Quanto mais 'pronto' é o conhecimento que lhes chega, menos estarão desenvolvendo a própria capacidade de buscar esses conhecimentos, de 'aprender a aprender' (...)". Mesmo existindo turmas que o aluno já chega na escola dizendo que não gosta de Matemática... e se tranca. Entretanto, segundo Martins (2012), "Temos que evitar cair no pólo oposto: que as aulas aconteçam sem um objetivo concreto, como um barco que ficasse ao sabor do vento que soprar mais forte, sem um porto de destino".

Conceituar intuitivamente sequência, mostrando algumas aplicações no cotidiano: lista de chamada, código de barras, ordem alfabética das palavras em um dicionário, ordem crescente na numeração das páginas de um livro, etc., tem um efeito rápido no entendimento do aluno, porque estas situações ele vivencia a todo o momento. Por este motivo, a comparação de preços de alguns produtos do mercado e da padaria local onde os alunos trabalham, também é uma estratégia interessante, pois não irão se esquecer deste momento tão próximo da sua realidade.

Neste plano de trabalho, as novas tecnologias serão limitadas à um projetor com data show para acessar vídeos do youtube, utilizando o modem 3G Oi que recebemos do Estado, no intuito de elucidar algumas dúvidas pendentes de um modo mais atraente. Gostaria de levá-los à sala de informática, mas encontra-se desativada e a rede wireless não funciona. O modem também não tem um bom sinal, às vezes não carrega a página da web.

OBJETIVOS

Gerais

- Utilizar metodologias simples, mas diferenciadas que possibilitem despertar no aluno o senso investigativo, proporcionando prazer com o aprendizado.
- Promover uma aprendizagem mais significativa dos conceitos matemáticos de Regularidades numéricas: Sequências e Matemática Financeira.

Específicos:

- Desenvolver o senso de investigação do aluno;
- Proporcionar cooperação para realização da atividade;
- Enfatizar a importância da Matemática para a formação do aluno;
- Despertar o interesse pela Matemática ante a sua aplicabilidade;
- Melhorar a apreensão dos conceitos matemáticos de Regularidades numéricas: Sequências e Matemática Financeira;

DESENVOLVIMENTO

As atividades foram elaboradas com metodologias diferenciadas no intuito de estimular a participação do aluno na construção do seu saber. O estudo de Progressões Aritméticas e Geométricas precisa estar vinculado à regras e fórmulas que serão aplicadas em exercícios contextualizados. Com o data show, colocarei vídeos do youtube, acessado com o modem 3G da oi disponibilizado pelo Estado, para ajudar a sanar algumas dúvidas pendentes sobre PA e PG. Quanto à Matemática Financeira, os alunos irão realizar uma pesquisa de preços no mercado e padaria com o acompanhamento do professor, para que haja mais segurança no desenvolvimento do trabalho. Ao retornar à escola, os alunos deverão comparar os preços dos produtos selecionados por eles e criar uma tabela comparativa para calcular a variação de preços com cálculos de porcentagem. Em seguida, farão um gráfico de setores para apresentar os resultados.

Os recursos foram os seguintes: Quadro, giz, apagador, retroprojetor, livro didático, projetor multimídia, internet móvel (modem), cartolina, tesoura, caneta hidrográfica e cola.

Os planos de aula estão anexados no apêndice e cada aula tem duração máxima de 100 minutos. Os alunos farão tarefas em folha separada como tarefa em dupla, caso tenha tempo disponível.

AVALIAÇÃO DOS ALUNOS

Os alunos serão avaliados de forma global, incluindo trabalhos realizados em sala de aula, pesquisa de campo com coleta de dados para o assunto de matemática financeira, colaboração e respeito entre componentes do grupo, apresentação dos resultados graficamente para a escola. Haverá aplicação de testes em dupla e prova individual. Pedirei ao grupo que realize uma autoavaliação para obter um feedback deste Plano de Trabalho e do relacionamento entre eles durante a aplicação, para melhorar as estratégias nas próximas atividades curriculares..

Finalizando, temos as Referências bibliográficas e os Apêndices contendo os planos de aula com os links para acesso dos vídeos do youtube.

REFERÊNCIAS

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva.** Vol. 2 do ensino médio, ed. Moderna; São Paulo, 2009

DANTE, LuisR.**Matemática: contextos e aplicações**. Vol. Único do ensino médio, ed. Ática; São Paulo, 2009.

GIOVANNI, José R.; BONJORNO, José R.**Matemática completa.** 2ª serie do ensino médio. Ed. Renovada; FTD. São Paulo, 2009.

MARTINS, Lenise A. G. **O desenvolvimento de competências e Habilidades.** Disponível em <http://www.educacao.es.gov.br/download/roteiro1_competenciasehabilidades.pdf> Acessado em novembro/2012.

www.professorwaltertadeu.mat.br- Colégio Pedro II, exercícios

http://pt.wikipedia.org/wiki/Progress%C3%A3o_geom%C3%A9tricaProgressão geométrica

http://pt.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1tica_financeira Matemática Financeira

APÊNDICES

PLANO DE AULA I

Duração prevista: 100 minutos

Assunto: Sequências e Progressão Aritmética (PA)

Objetivos: Identificar a diferença entre uma sequência e uma PA; Apresentar os conceitos elementares de progressão aritmética; Conceituar progressões aritméticas; Expressar e calcular o termo geral de uma PA e a soma dos seus termos.

Pré-requisitos: Operações matemáticas básicas

Material necessário: Quadro de giz, lap top e data show..

1- **Sequências**

Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, retratado em 1200, foi um Matemático italiano que viveu de 1180 a 1250, aproximadamente. Em 1202 ele propôs em sua obra *LiberAbaci*(Livro dos Cálculos) o problema a seguir, de grande repercussão por ter aplicações em várias áreas do conhecimento, como economia, biologia, física e etc.

"Admitindo-se que cada casal de coelhos só procrie pela primeira vez aos dois meses, exatamente, após o seu nascimento e que, a partir de então, gere um casal a cada mês, quantos casais haverá ao final de doze meses, partindo-se de um único casal de coelhos recém-nascidos?"

A sequência formada pelo número de coelhos em cada mês ficou conhecida como *sequência de Fibonacci.*
Agora em grupo resolva os itens abaixo.

a) Representem os doze primeiros termos da sequência de Fibonacci.
b) Considerando infinita a sequência de Fibonacci, dê sua lei de formação.
(Na sequência *an* de Fibonacci, a razão $\frac{a_n + 1}{a_n}$ tende ao número 1,61803..., quando n aumenta indefinidamente.
Esse número é conhecido como número de ouro.)

2- **Progressão Aritmética**

Definição

Consideremos a sequência (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16).

Observamos que, a partir do segundo termo, a diferença entre qualquer termo e seu antecessor é sempre a mesma:

$$4 - 2 = 6 - 4 = 10 - 8 = 14 - 12 = 16 - 14 = \mathbf{2}$$

Sequências como esta são denominadas **progressões aritméticas (PA)**.A diferença constante é chamada de **razão** da progressão e costuma ser representada por **r**. Na PA dada temos r = 2.

Podemos, então, dizer que:

Progressão aritmética é a sequência numérica onde, a partir do primeiro termo, todos são obtidos **somando** uma constante chamada **razão.**

São exemplos de PA:

- (5, 10, 15, 20, 25, 30) é uma PA de razão r = 5
- (12, 9, 6, 3, 0, -3) é uma PA de razão r = -3
- (2, 2, 2, 2, 2,...) é uma PA de razão r = 0

Notação

PA(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n)

Onde:
a_1= primeiro termo
r = razão
n = número de termos(se for uma PA finita)
a_n = último termo, termo geral ou n-ésimo termo

Exemplo: PA (5, 9, 13, 17, 21, 25)

$a_1 = 5$ $r = 4$ $n = 6$ $a_n = a_6 = 25$

Classificação quanto a razão:

- (5, 10, 15, 20, 25, 30) é uma PA de razão r = 5.
Toda PA de razão positiva (r > 0) é **crescente.**

- (12, 9, 6, 3, 0, -3) é uma PA de razão r = -3
Toda PA de razão negativa (r < 0) é **decrescente.**

- (2, 2, 2, 2, 2,...) é uma PA de razão r = 0
Toda PA de razão nula (r = 0) é **constante ou estacionária.**

Quanto ao número de termos:

- (5, 15, 25, 35, 45, 55) é uma PA de 6 termos e razão r = 10.

Toda PA de n° de termos finito é **limitada.**

- (12, 10, 8, 6, 4, 2,...) é uma PA de infinitos termos e razão r = -2,Toda PA de n° de termos infinito é **ilimitada.**

Propriedades

P1:Três termos consecutivos

Numa PA, qualquer termo, a partir do segundo, é a **média aritmética** do seu antecessor e do seu sucessor.

Exemplo:

Consideremos a PA(4, 8, 12, 16, 20, 24, 28) e escolhamos três termos consecutivos quaisquer: 4, 8, 12 ou 8, 12, 16 ou ... 20, 24, 28.

Observemos que o termo médio é sempre a média aritmética dos outros dois termos:

$$\frac{4+12}{2}=8,\frac{8+16}{2}=12,...,\frac{20+28}{2}=24$$

seja a PA

(a_1, a_2, a_3) temos que:

$$a_2=\frac{a_1+a_3}{2}$$

Exemplo1:Determine x para que a sequencia (3, x+3, 15) seja uma PA

X+3 =(3 + 15) / 2 => x+3 =9 => x= 6 (3, 6+3 , 15) => (3, 9 , 15)

Exemplo2: Determinar x para que a sequência (3+x,5x,2x+11) seja PA

resolvendo essa equação obtém- $5x=\frac{(3+x)+(2x+11)}{2}$ se x=2

P2: Termo Médio

Numa PA qualquer de número ímpar de termos, o termo do meio(médio) é a **média aritmética** do primeiro termo e do último termo**.**

Exemplo: Consideremos a PA(3, 6, 9, **12**, 15, 18, 21) e o termo médio é **12**. Observemos que o termo médio é sempre a média aritmética do primeiro e do último.

$$\frac{3+21}{2}=12$$

Representação genérica de uma PA de três termos

Para a resolução de certos problemas (envolvendo soma ou produto dos termos da PA). É de grande utilidade representar uma PA nas seguintes formas: (x, x+r,x+2r) ou (x-r ,x, x+r) onde "r" e a razão da PA.

Exemplo Determinar a PAcrescente de três termos,sabendo que a soma desses termos é 3 e que o produto vale –8

Soma dos ermos x-r + x + x+r = 3=> 3x=3 => x = 1

Produto dos termos (1- r).(1).(1+r) = -8 => $1-r^2$ = - 8 => 1+8 = r^2 => r^2 = 9 r = +3 ou -3 como a PA é crescente temos que r = 3 resposta (-2,1,4)

P3: Termos Equidistantes

A soma de dois termos equidistantes dos extremos de uma PA finita é igual à soma dos extremos.

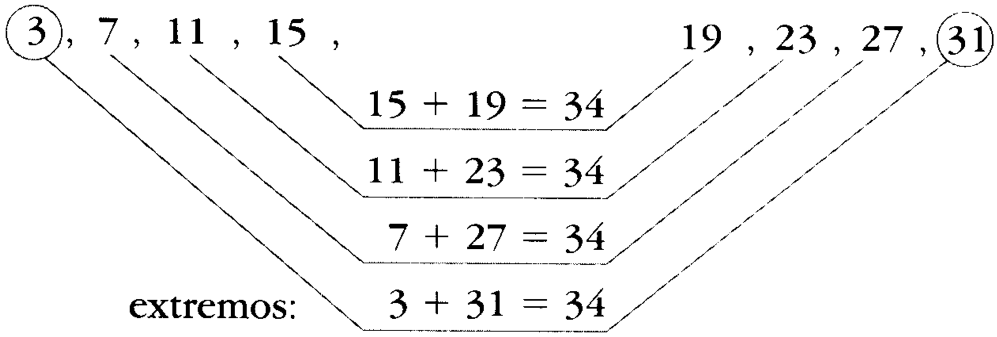
Exemplo:

Consideremos a PA(3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31).

7 e 27

11 e 23   são os termos equidistantes dos extremos 3 e 31

15 e 19



Termo Geral de uma PA

Uma PA de razão r pode ser escrita assim:PA(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., $a_{n-1}a_n$)

Aplicando a definição de PA, podemos escrevê-la de uma outra forma:

PA(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_{n-1} ,a_n)

+ r + r + r + r + r

PA(a_1, a_1+ r, a_1+ 2r, a_1+ 3r, a_1+ 4r, ..., **a_1+ (n-1)r**)

Portanto, o termo geral será:

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n-1)r,} \text{ para } n \in N^*$$

Exercícios Resolvidos

1. 1. Determineo quarto termo da PA(3, 9, 15,...).
Resolução:a_1=3 a_2=9 r = a_2 - a_1 = 9 – 3 = 6

(a_1, a_2, a_3, $a_{4,...}$)

+ r + r + r

Então: $a_4 = a_1 + r + r + r$=> $a_4 = a_1 + 3r$ =>$a_4 = 3 + 3.6$ => $a_4 = 3+$ **a_4 = 21**

2. 2. Determine ooitavo termo da PA na qual a_3 = 8 e r = -3.
Resolução: a_3 = 8 r = -3

(a_1, ...,a_3, a_4, a_5, $a_{6,}$ a_7, $a_{8,...}$)

+ r + r + r + r + r

Então:$a_8 = a_3 + r + r + r + r + r$ => $a_8 = a_3 + 5r$ => $a_8 = 8 + 5.-3$

$a_8 = 8 – 15$ =>**a_8 = - 7**

3. 3. Interpole 3 meios aritméticos entre 2 e 18.
Resolução:

Devemos formar a PA(2, ___, ___, ___, 18), em que:

a_1 = 2 $a_n = a_5$ = 18 n = 2 + 3 = 5

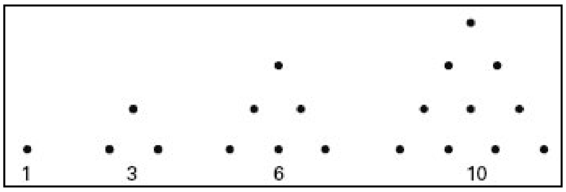
Para interpolarmos os três termos devemos determinar primeiramente a razão da PA. Então:

$a_5 = a_1 + r + r + r + r$ $a_5 = a_1 + 4r$

$18 = 2 + 4r$ $16 = 4r$ $r = 16/4$ $\mathbf{r = 4}$

Logo temosa PA(2, 6, 10, 14, 18)

3.4. . "Números triangulares" são números que podem ser representados por pontos arranjados na forma de triângulos equiláteros. E conveniente definir 1 como o primeiro numero triangular. Apresentamos a seguir os primeiros números triangulares. Se $\mathbf{T_n}$ representa o n-ésimo número triangular, então $\mathbf{T_1 = 1}$, $\mathbf{T_2 = 3}$, $\mathbf{T_3 = 6}$, $T_4 = 10$, e assim por diante. O valor de $\mathbf{T_{100}}$ é igual a:



a) 5.050 b) 4.950 c) 2.187

d) 1.458 e) 729

Solução. Esta progressão aritmética é chamada de 2ª ordem. Os termos 1, 3, 6, 10,... não forma uma progressão aritmética, mas a diferença entre os termos forma uma progressão aritmética.

$$\boxed{\begin{array}{l} 1, 3, 6, 10, ... \rightarrow \text{Não é PA.} \\ 3-1, 6-3, 10-6, ... = 2, 3, 4, ... \rightarrow \text{PA} \end{array}}.$$

De forma geral, podemos escrever essa situação da seguinte forma:

i) $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$: PA de 2ª ordem. ii) $b_1, b_2, ..., b_{n-1}$: PA de 1ª ordem.

$\mathbf{a_2 - a_1 = b_1}$

$\mathbf{a_3 - a_2 = b_2}$

$\mathbf{a_4 - a_3 = b_3}$

....

$\mathbf{a_n - a_{n-1} = b_{n-1}}$

Adicionando os dois membros entre si, observamos que os termos simétricos do 1º membro se anulam sobrando ($a_n - a_1$) e no 2º membro forma-se uma soma de PA. Escrevendo essa expressão, temos:

$$\boxed{a_n - a_1 = \frac{(b_1 + b_{n-1}).(n-1)}{2} \Rightarrow a_n = a_1 + \frac{(b_1 + b_{n-1}).(n-1)}{2}}.$$

No caso do exercício, temos:

$$\begin{cases} a_{100} = 1 + \dfrac{(2 + b_{100-1}).(100-1)}{2} = 1 + \dfrac{(2 + b_{99}).99}{2} \\ b_{99} = 2 + (99-1).1 = 2 + 98 = 100 \end{cases} \Rightarrow a_{100} = 1 + \dfrac{(2+100).99}{2} = 1 + \dfrac{(102).99}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = 1 + (51).(99) = 1 + 5049 = 5050$$

.

Soma dos Termos de uma PA finita

Para entender melhor o estudo da soma dos "n" primeiros termos de uma PA, analise o seguinte problema:

Consideremos a sequência (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20).

Trata-se de uma PA de razão 2. Suponhamos que se queira calcular a soma dos termos dessa sequência, isto é, a soma dos 10 termos da PA(2, 4, 6, 8, ..., 18,20).

Poderíamos obter esta soma manualmente, ou seja, 2+4+6+8+10+12+14+16+18+20 =110. Mas se tivéssemos de somar 100, 200, 500 ou 1000 termos? Manualmente seria muito demorado. Por isso precisamos de um modo mais prático para somarmos os termos de uma PA. Na PA(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20) observe:

$a_1+a_{10} = 2 + 20 = 22$ $a_2+a_9 = 4 + 18 = 22$ $a_3+a_8 = 6 + 16 = 22$

$a_4+a_7 = 8 + 14 = 22$ $a_5+a_6 = 10 + 12 = 22$

Note, que a soma dos termos equidistantes é constante (sempre 22) e apareceu exatamente 5 vezes (metade do número de termos da PA, porque somamos os termos dois a dois). Logo devemos ao invés de somarmos termo a termo, fazermos apenas 5 x 22 = 110, e assim, determinamos S_{10} = 110 (soma dos 10 termos).

E agora se fosse uma progressão de 100 termos como a PA(1, 2, 3, 4,...,100), Como faríamos?

Procederemos do mesmo modo. A soma do a_1 com a_{100}vale 101 e esta soma vai se repetir 50 vezes(metade de 100), portanto S_{100} = 101x50 = 5050.

Então para calcular a soma dos n termos de uma PA somamos o primeiro com o último termo e esta soma irá se repetir n/2 vezes. Assim podemos escrever:

$$S_n = (a_1 + a_n)\frac{n}{2}$$

Exercícios Resolvidos

1. 1. Calcule a soma dos 50 primeiros termos da PA(2, 6, 10,...).
Resolução:

$a_1 = 2$

$r = a_2 – a_1 = 6 – 2 = 4$

Para podemos achar a soma devemos determinar o a_n(ou seja, a_{50}):

$a_{50} = a_1 + 49r = 2 + 49.4 = 2 + 196 = 198$

Aplicando a fórmula temos:

$S_{50} = (a_1+a_n).n/2 = (2+198).50/2 = 200.25=5000$

2. Um ciclista percorre 20 km na primeira hora; 17 km na segunda hora, e assim por diante, em progressão aritmética. Quantos quilômetros percorrerá em 5 horas?

Resolução:

PA(20, 17,14,...)

$a_1 = 20$

$r = a_2 – a_1 = 17 - 20 = -3$

Para podemos achar quantos quilômetros ele percorrerá em 5 horas devemos somas os 5 primeiros termos da PA e para isto precisamos do a_n(ou seja, a_5):

$a_5 = a_1 + 4r = 20 + 4.-3 = 20 - 12 = 8$

Aplicando a fórmula temos:

$S_{50} = (a_1+a_n).n/2 = (20+8).5/2 = 14.5 = 70$

Logo ele percorreu em 5 horas 70 km.

Outras sugestões:

Vídeos paraelucidar uma sequência e uma PA: http://www.youtube.com/watch?v=4EEo59_2RV8 ;http://www.youtube.com/watch?v=T12BvedsPuk

PLANO DE AULA II

Duração prevista: 100 minutos

Assunto: Progressão Geométrica

Objetivos: Aplicar os conceitos elementares de Progressão geométrica;
Desenvolver as fórmulas a partir de situações do dia a dia;
Contextualizar os conceitos.

Pré-requisitos: Operações Matemáticas Básicas e Fatoração

Material necessário: Quadro de giz,lap top e data show..

Uma **progressão geométrica** é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante, chamada de **razão** da progressão geométrica.[1] A razão é indicada geralmente pela letra q (inicial da palavra "quociente").

Alguns exemplos de progressão geométrica:

- $(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, \ldots)$, em que $q = 2$;[1]
- $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \ldots\right)$, em que $q = \frac{1}{2}$;
- $(-3, 9, -27, 81, -243, 729, -2187, \ldots)$, em que $q = -3$;
- $(7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, \ldots)$, em que $q = 1$;
- $(3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$, em que $q = 0$.

Definição por recursão e fórmula do termo geral

Costuma-se denotar por a_n o n-ésimo termo de uma progressão geométrica. Assim, a progressão fica totalmente definida pelo valor de seu termo inicial a_1 e sua razão *q*.

A sucessão dos termos é obtida por recursão:

- $a_n = a_1, n = 1;$
- $a_{n+1} = q \cdot a_n, n = 2, 3, 4, \ldots.$

É fácil demonstrar por indução matemática que

$$a_n = a_1 . q^{n-1}.$$

Em alguns contextos (por exemplo, ao usar a linguagem de programação C), pode ser conveniente considerar que o termo inicial da PG tem índice zero (a_0). Neste caso, o termo geral torna-se

$$a_n = a_0\ q^n.$$

De modo geral, o n-ésimo termo pode ser calculado a partir do m-ésimo termo simplesmente por:

$$a_n = a_m\ q^{n-m}, \quad n > m.$$

Soma dos termos de uma P.G.

A soma dos termos de uma P.G., a partir do primeiro, é definida por

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_1 q^{i-1} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1}.$$

Caso $q \neq 1$, a soma pode ser descrita pela seguinte fórmula:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Demonstração

Essa fórmula pode ser explicada dessa maneira:

$$S_n = a_1 + a_1\ q + \ldots + a_1\ q^{n-1}.$$

Multiplica-se pela razão q :

$$q\ S_n = a_1\ q + a_1\ q^2 + \ldots + a_1\ q^n.$$

Subtrai-se a primeira da segunda, cancelando-se os termos repetidos:

$$q\ S_n - S_n = a_1\ q^n - a_1,$$

o que é equivalente (através de fatoração por fator comum) a

$$(q - 1)\, S_n = a_1\, (q^n - 1)\,.$$

Divide-se ambos os termos por $(q-1) \neq 0$ e o resultado segue.

Soma dos termos dentro de um intervalo da P.G.

A soma dos termos de uma progressão geométrica situada no intervalo fechado de a_p até a_q é calculada pela seguinte fórmula:

$$S_{(p,q)} = \frac{a_p(1 - q^{q-p+1})}{1 - q}.$$

Soma dos *infinitos* termos de uma progressão geométrica

A *soma* dos infinitos termos de uma P.G. é chamada série geométrica e está bem definida quando $|q| < 1$. Sua soma é:

$$S_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Se $q \geq 1$ e $a_1 > 0$ então sua soma é **mais infinito** e se $q \geq 1$ e $a_1 < 0$, sua soma é **menos infinito**.

$$S_\infty = \begin{cases} \frac{a_1}{1-q}, & |q| < 1 \\ +\infty, & q \geq 1, a_1 > 0 \\ -\infty, & q \geq 1, a_1 < 0 \\ 0, & a_1 = 0. \end{cases}$$

Obs.: Esta tabela não esgota todos os casos. Ver o caso $q \leq -1$, por exemplo. q pode ser um número complexo. O tratamento destas séries pode ser visto no artigo sobresséries.

Produto dos termos de uma progressão geométrica

O produto dos termos de uma progressão geométrica, a partir do primeiro, é dada por

$$P_n = a_1^n . q^{\frac{n.(n-1)}{2}},$$

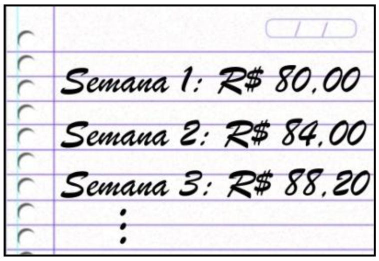
e também pode ser determinado sem o conhecimento da razão:

$$P_n = \prod_{i=1}^{n} a_i = (a_1 \times a_n)^{\frac{n}{2}},$$

sendo similar à forma do somatório de uma progressão aritmética.

EXERCÍCIOS

1. Dona Marta relacionou, desde o começo do ano, seus gastos semanais no supermercado, como mostra a o quadro, e assim por diante, durante as quatorze primeiras semanas do ano. Qual foi o total de gastos de dona Marta no período mencionado? (Use a aproximação $1{,}05^7 \cong 1{,}4$.)



2. Um carro, cujo preço à vista é R$ 24.000,00, pode ser adquirido dando-se uma entrada e o restante em 5 parcelas que se encontram em progressão geométrica. Um cliente que optou por esse plano, ao pagar a entrada, foi informado que a segunda parcela seria de R$ 4.000,00 e a quarta parcela de R$ 1.000,00. Quanto esse cliente pagou de entrada na aquisição desse carro?

3. Qual é o valor de:

   a) $20 + 10 + 5 + 2{,}5 + ...?$

   b) $90 + 9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + ...?$

   c) $10^{-3} + 10^{-4} + 10^{-5} + ...?$

   d) $-25 - 5 - 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{25} - ...?$

4. Considere um barbante de comprimento 1,44m e o seguinte procedimento: divide-se o barbante em duas partes cujas medidas estejam na razão de 2:1, a maior parte é deixada de lado e, com a menor parte, repete-se o procedimento. Se essa experiência puder ser repetida um número infinito de vezes, qual é o valor da soma dos comprimentos de todos os pedaços do barbante que foram deixados de lado?

PLANO DE AULA III

Duração prevista: 100 minutos

Assunto: Matemática financeira

Objetivos: Pesquisar preços no comércio local;
Trabalhar em equipe considerando as diferenças de cada um;
Calcular as amostras de dados da pesquisa aplicando o cálculo de porcentagem;
Calcular os valores para compor um gráfico de setores;
Criar um painel ilustrativo para expor os dados obtidos;
Aplicar os conceitos adquiridos no dia a dia, percebendo a diferença de preços antes de comprar um produto;
Contextualizar a Matemática com o cotidiano.

Pré-requisitos: Operações básicas; regra de três; noções de Estatística.

Material necessário: Cartolina, caneta hidrográfica e cola

A **matemática financeira** utiliza uma série de conceitos matemáticos aplicados à análise de dados financeiros em geral.

Os problemas clássicos de matemática financeira são ligados a questão do valor do dinheiro no tempo (juro e inflação) e como isso é aplicado a empréstimos, investimentos e avaliação financeira de projetos.

O tema também pode de ser aplicado a precificação de ações e de derivativos, mas esse tipo de aplicação não é tratada neste artigo.

Conceitos

- **Principal ou Capital ou Valor Presente:** Valor que está sendo emprestado ou investido.
- **Juro:** Compensação paga pelo tomador do empréstimo (ou receptor do investimento) para ter o direito de usar o dinheiro até o dia do pagamento. Pode ser expresso em valor monetário ($) ou como uma taxa de juro (%).
- **Saldo:** É a soma do Principal com o Juro em um determinado momento.
- **Parcela ou Pagamento:** Valor pago pelo tomador do empréstimo (ou receptor do investimento).

Juro é a remuneração cobrada pelo empréstimo de dinheiro. É expresso como um percentual sobre o valor emprestado (taxa de juro) e pode ser calculado de duas formas: juros simples ou juros compostos.

- O juro pode ser compreendido como uma espécie de "aluguel sobre o dinheiro". A taxa seria uma compensação paga pelo tomador do empréstimo para ter o direito de usar o dinheiro até o dia do pagamento. O credor, por outro lado, recebe uma compensação por não poder usar esse dinheiro até o dia do pagamento e por correr o risco de não receber o dinheiro de volta (risco de inadimplência).

Juros simples

No regime dos juros simples, a taxa de juros é aplicada sobre o principal (valor emprestado) de forma linear, ou seja, não considera que o saldo da dívida aumenta ou diminui conforme o passar do tempo. A fórmula de juros simples pode ser escrita da seguinte maneira:

$$FV = PV(1 + i \cdot n)$$

, onde

- FV : Valor Futuro (do inglês *Future Value*)
- PV : Valor Presente (do inglês *PresentValue*)
- i : Taxa de juros (do inglês *Interest Rate*)
- n : Número de períodos

Exemplo numérico

Uma pessoa toma emprestado \$100 ($PV = 100$) para pagar em 2 meses ($n = 2$) com taxa de juros de 10% ao mês ($i = 0,1$), calculados conforme o regime de juros simples. Depois de 2 meses essa pessoa irá pagar \$120, conforme a fórmula:

$$\begin{aligned} FV &= 100 \cdot (1 + 0,1 \cdot 2) \\ &= 100 \cdot (1 + 0,2) \\ &= 100 \cdot 1,2 \\ &= 120 \end{aligned}$$

Juros compostos

No regime de juros compostos, os juros de cada período são somados ao capital para o cálculo de novos juros nos períodos seguintes. Nesse caso, o valor da dívida é sempre corrigida e a taxa de juros é calculada sobre esse valor. A fórmula de juros compostos pode ser escrita da seguinte maneira:

$$V_F = V_P(1 + i)^n$$

, onde

- V_F : Valor Futuro
- V_P : Valor Presente
- i : Taxa de juros
- n : Número de períodos

Exemplo numérico

Uma pessoa toma emprestado R$100 ($V_P = 100$) para pagar em 2 meses ($n = 2$) com taxa de juros de 10% ao mês ($i = 0,1$), calculados conforme o regime de juros compostos. Depois de 2 meses essa pessoa irá pagar R$121, conforme a fórmula:

$$\begin{aligned} VF &= 100 \cdot (1 + 0,1)^2 \\ &= 100 \cdot (1,1)^2 \\ &= 100 \cdot 1,1 \cdot 1,1 \\ &= 110 \cdot 1,1 \\ &= 121 \end{aligned}$$

Para o caso mais geral, quando o juro é capitalizado mais de que uma vez por ano, a fórmula é

$$V_F = V_P \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}$$

onde,

- V_F : Futuro Valor
- V_P : Valor Presente
- i : taxa de juro anual nominal
- n : número de vezes que o juro é capitalizado por ano
- t : número de anos

Taxa de juros continuamente composta

O regime de juros compostos também pode ser expresso através da taxa de juros continuamente composta. Apesar de ter o mesmo funcionamento do regime de juros compostos, a taxa de juros continuamente composta apresenta uma fórmula de cálculo diferente. A fórmula da taxa de juros continuamente composta pode ser escrita da seguinte maneira:

$$V_F = V_P \cdot e^{r \cdot n}$$

, onde

- V_F : Valor Futuro
- V_P : Valor Presente
- r : Taxa de juros continuamente composta
- n : Número de períodos
- e : Número de Euler, que é equivalente a 2,718281828459...

O valor da taxa de juros r, que é continuamente composta, possui significado diferente do valor da taxa de juros i, usada na primeira fórmula. Porém, como ambas são usadas no regime de juros compostos, existe uma fórmula para fazer a "tradução" de uma taxa para outra:

$$i = e^r - 1$$

ou, invertendo os termos,

$$r = ln(i + 1)$$

Diferente da taxa de juros composta, a taxa de juros continuamente composta pode ser somada. Por exemplo, se a taxa de juros continuamente composta de janeiro é 3% e a de fevereiro é 4%, a taxa desse bimestre é 7% (esse cálculo não pode ser feito com taxas que não são continuamente compostas). Devido a essa propriedade, elas podem ser usadas para facilitar a interpretação e o tratamento de bases de dados, além de possibilitar que alguns tipos de modelos estatísticos sejam aplicados.

Apesar dessas vantagens, o uso da taxa continuamente composta está concentrado na área acadêmica e no mercado de capitais. Devido à dificuldade de interpretação e cálculo, essa taxa não é usada para divulgar empréstimos bancários ou alternativas de investimento para o público geral.

Exemplo numérico

Uma pessoa toma emprestado \$100 ($PV = 100$) para pagar em 2 meses ($n = 2$) com taxa de juros continuamente composta de 10% ao mês ($r = 0,1$). Depois de 2 meses essa pessoa irá pagar \$122,14, conforme a fórmula:

$$\begin{aligned} V_F &= 100 \cdot e^{0,1 \cdot 2} \\ &= 100 \cdot e^{0,2} \\ &= 100 \cdot 2,718281828459 \cdots^{0,2} \\ &= 100 \cdot 1,2214 \\ &= 122,14 \end{aligned}$$

Juros simples vs. compostos

Comportamento de juros compostos, num empréstimo de 100€ com taxa de juro anual de 5%. Ao final de 40 anos, o devedor deve cerca de sete vezes mais em comparação com o capital pedido inicialmente

A tabela abaixo mostra os valores de um empréstimo de 100 (Euros ou Reais) com taxa de juros de 10% ao período sob o regime de juros simples e juros compostos. Note que essa tabela apresenta três momentos diferentes:

- Para períodos inferiores a 1 ($n < 1$), o regime de juros simples apresenta valores superiores ao regime de juros compostos.
- No período 1, o valor é igual para ambos regimes.
- Para mais de um período, o regime de juros compostos apresenta valores superiores ao regime de juros simples.

n	**Juros Simples**	**Juros Compostos**
0,00	100,00	100,00
0,25	102,50	102,41
0,50	105,00	104,88
0,75	107,50	107,41

1,00	110,00	110,00
1,25	112,50	112,65
1,50	115,00	115,37
1,75	117,50	118,15
2,00	120,00	121,00
2,25	122,50	123,92

Enquanto que o juro simples obedece a uma progressão aritmética, que para o caso da tabela acima o capital devido é dado por:

$$C = 100 \times \left(1 + \frac{T_j}{100} \times n\right)$$

já o juro composto obedece a uma progressão geométrica, que para a tabela acima, o capital devido é:

$$C = 100 \times \left(1 + \frac{T_j}{100}\right)^n$$

Onde n normalmente representa o número de anos do empréstimo e T_j é a taxa de juro escrita em %.

EXERCÍCIOS

1. Na busca de solução para o problema da gravidez na adolescência, uma equipe de orientadores educacionais de uma instituição de ensino pesquisou um grupo de adolescentes de uma comunidade próxima a essa escola e obteve os seguintes dados mostrados. É correto afirmar, em relação às idades das adolescentes grávidas, que:

Idade (em anos)	Freqüência Absoluta de Adolescentes Grávidas
13	4
14	3
15	2
16	5
17	6

a) a média é 15 anos. b) a mediana é 15,3 anos.
c) a mediana 16,1 anos. d) a moda é 16 anos.
e) a média é 15,3 anos.

2 Em uma pesquisa, foram consultados 600 consumidores sobre sua satisfação em relação a certa marca de sabão em pó. Cada consumidor deu uma nota de 0 a 10 para o produto, e a média final das notas foi 8,5. O número mínimo de consumidores que devem ser consultados, além dos que já foram, para que essa média passe para 9, é igual a:

a) 250 b) 300 c) 350 d) 400
e) 450

3. (UFMG) Os 40 alunos de uma turma fizeram uma prova de Matemática valendo 100 pontos. A nota média da turma foi de 70 pontos e apenas 15 dos alunos conseguiram a nota máxima. Seja *M* a nota média dos alunos que não obtiveram a nota máxima. Então, é CORRETO afirmar que o valor de *M* é:

a) 53 b) 50 c) 51 d) 52