Formação Continuada para Professores de Matemática
Fundação CECIERJ/SEEDUC – RJ

Colégio: Colégio Estadual Jornalista Tim Lopes
Professora: Ana Cristina Farias Costa Matrícula: 00/0939102-0
Série: 1º ano – Ensino Médio
Tutora: Maria Tereza Menucci
Grupo 12

PLANO DE TRABALHO 2

TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

Ana Cristina Farias Costa

profanamat@hotmail.com

INTRODUÇÃO

Para dar continuidade a essa aula sobre Trigonometria na Circunferência primeiramente começarei fazendo uma abordagem sobre as transformações de arcos, dados no bimestre passado.

Como meu tempo é muito pequeno nesse bimestre, devido aos feriados e outras programações na escola tiveram que rever todo o meu planejamento em relação a esse conteúdo, pois não terei tempo de dar as funções trigonométricas (gráficos), por isso darei somente as expressões envolvendo os senos, cossenos, tangentes, cossecantes, secantes e cotangentes e também a trigonometria no triângulo retângulo e num triângulo qualquer.

Para facilitar o aprendizado e também para ficar mais fácil a visualização dos ângulos notáveis, faremos uma tabela com os valores do seno, cosseno e tangente e as principais fórmulas das funções trigonométricas como: secante, cossecante e cotangente de um arco x e a relação fundamental.

Com base nessas informações começarei a introduzir o conteúdo, usando alguns exemplos dos roteiros de ação.

Transmitirei mesmo em curto tempo assuntos dentro do conteúdo, que mostre situações do nosso dia a dia.

DESENVOLVIMENTO

Atividade 1

* **HABILIDADE RELACIONADA:** Definir função seno, cosseno , tangente, secante, cossecante e cotangente de uma arco x.

***TEMPO DE DURAÇÃO:** 6 tempos de aula (50min cada)

***RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:** Papel quadriculado (ou milimetrado), régua, caneta hidrocor (para esboçar o gráfico), caneta esferográfica, lápis , borracha e a tabela.

***ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Individual ou em dupla.

***OBJETIVOS:** Visualizar o seno e o cosseno num ciclo trigonométrico , substituir valores dos arcos nas expressões trigonométricas e também confeccionar os gráficos das funções seno, cosseno e tangente .

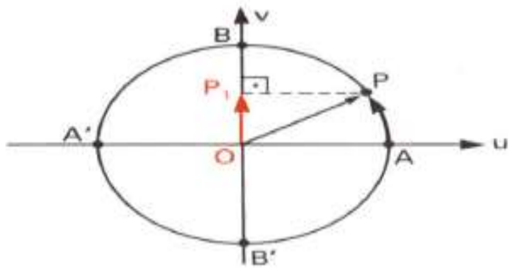
***METODOLOGIA ADOTADA:**

Primeiramente iremos fazer a introdução das funções circulares e em seguida elaborar uma tabela com todos os valores das funções trigonométricas que iremos usar.

Definição do seno de um arco

Definimos seno de x como a medida algébrica de $\overline{OP_1}$ e indicamos sen x = $\overline{OP_1}$.

O eixo vertical, suporte de $\overline{OP_1}$, é chamado eixo dos senos.



Função seno

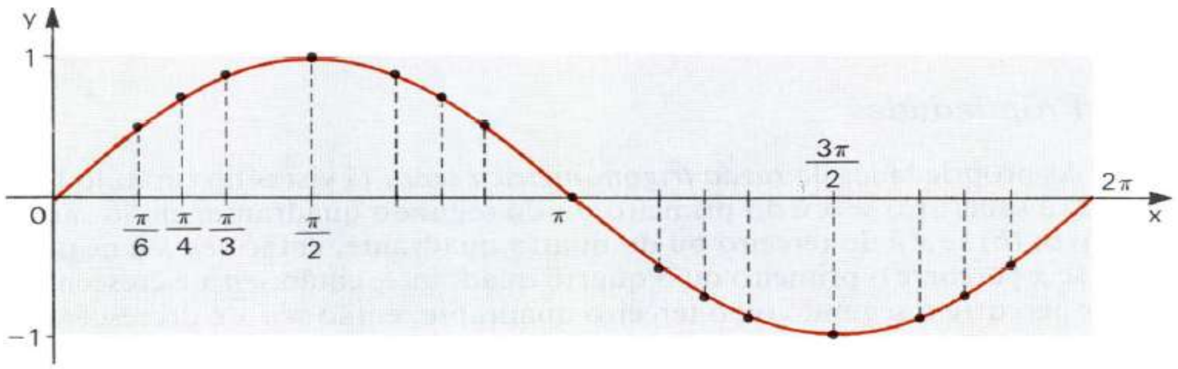
Todo número real x pode ser considerado como a medida, em radianos, de um determinado arco AC.

Para cada arco AC existe um único número real y que é o seu seno, ficando, portanto definida a função seno f: x $\rightarrow$y.

O domínio e o contradomínio dessa função são o conjunto IR. Ela é indicada por y = sen x ou f(x) = sen x.

Gráfico de y = sen x

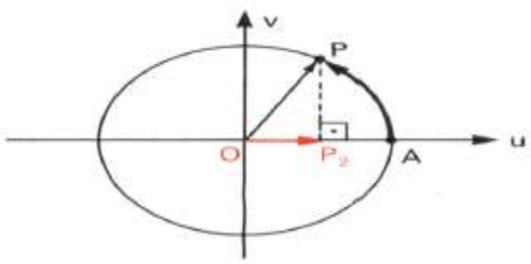
A curva construída chama-se senóide (forma de seno) e foi representada somente no intervalo $[0, 2\pi]$. Como o domínio é IR e não $[0, 2\pi]$, a curva continua à direita de 2π e à esquerda de zero.



Definição de cosseno de um arco

Definimos cosseno de um arco AC ou cosseno de x a medida algébrica de $\overline{OP_2}$ e indicamos cos x = $\overline{OP_2}$

O eixo horizontal, suporte de $\overline{OP_2}$, é chamado eixo dos cossenos.



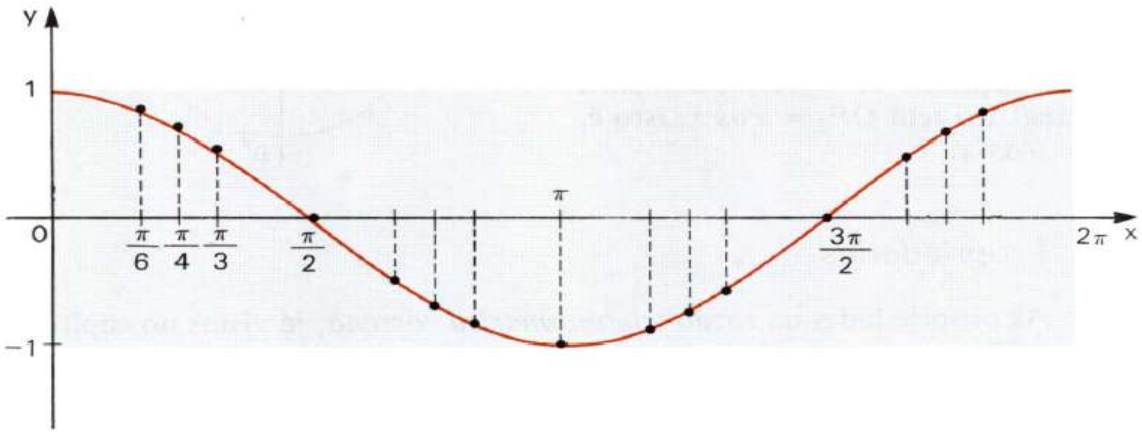
Função Cosseno

Para cada arco AC existe um único número real y que é o seu cosseno, ficando, portanto, definida a função cosseno f : x $\rightarrow$ y.

O domínio e o contradomínio dessa função são o conjunto IR. Ela é indicada por y = cos x ou f(x) = cos x.

Gráfico de y = cos x

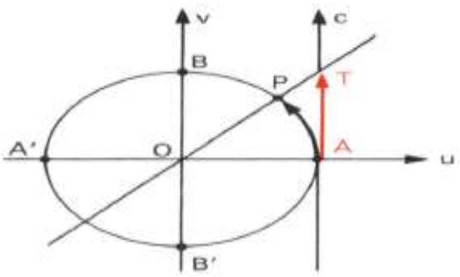
A curva construída chama-se cossenóide (forma do cosseno) e foi representada somente no intervalo [0, 2π]. Como o domínio é IR e não [0, 2π], a curva continua à direita de 2π e à esquerda de zero.



Definição de tangente de um arco

Definimos tangente do arco AC ou tangente de x como a medida algébrica de $\overline{AT}$ e indicamos tg x = $\overline{AT}$.

O eixo vertical, suporte de $\overline{AT}$, é chamado de eixo das tangentes.



Função tangente

Existe, para cada arco AC, com C não congruente a B e C não congruente B', um único número real y que é a sua tangente, ficando, portanto, definida a função tangente f : x $\rightarrow$ y.

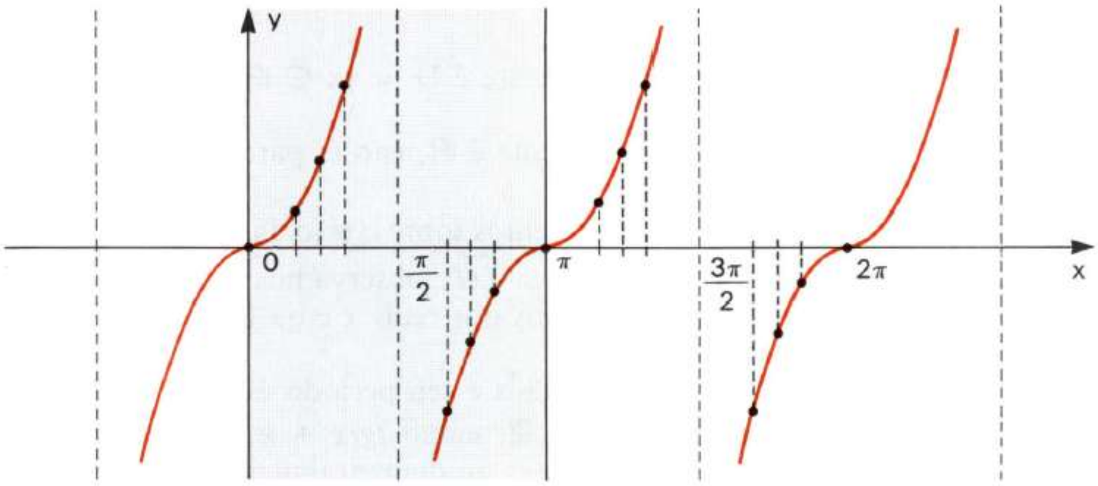
O domínio dessa função é D = $\{x / x \in IR$ e x $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in Z)\}$ e o contradomínio é o conjunto IR. Ela é indicada por y = tg x ou f(x) = tg x.

Gráfico de y = tg x

O gráfico construído chama-se tangentóide (forma tangente) e foi representado somente no intervalo [0, 2 π].

Como o domínio é D = $\{x / x \in IR$ e x $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in Z)\}$e não [0, 2 π], o gráfico continua à direita de 2 π e á esquerda de zero.

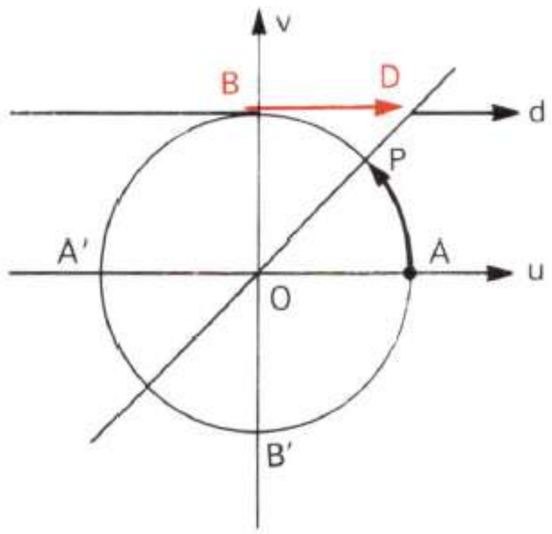
Nos pontos onde a tangente inexiste, ou seja, nos pontos para os quais x = $\frac{\pi}{2}$ + k π (k $\in$ IR) , representamos retas verticais tracejadas.



Para fazer esses gráficos os Roteiros de Ação sugeriu que usássemos o Geogebra, para facilitar, mas não tenho acesso a esse material, pois não posso instalar nenhum software nos computadores da escola, mas passei no Data show. Eles fizeram esses gráficos em folha milimetrada.

Cotangente de um arco.

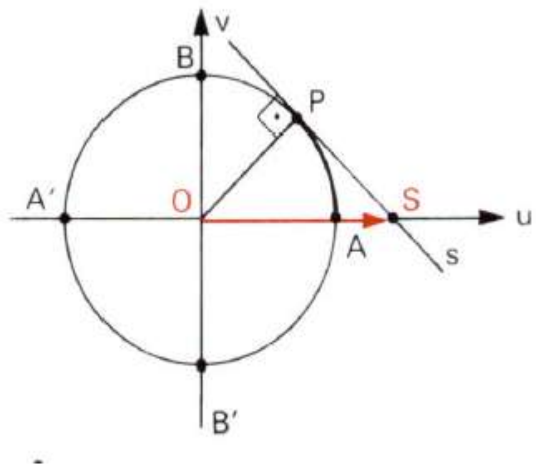
A cotangente de um arco é indicada na circunferência no eixo paralelo ao eixo das abscissas.



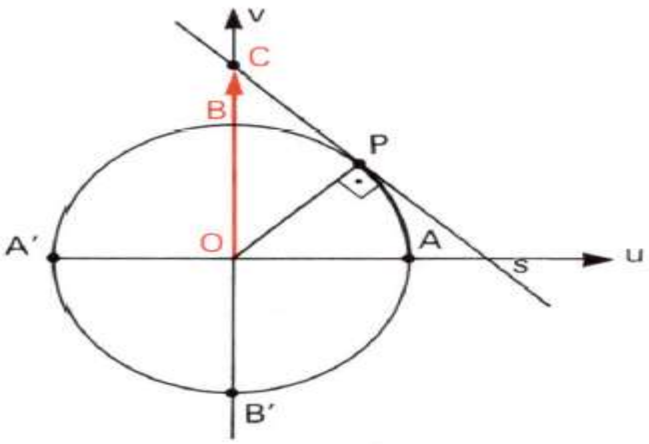
Cotg x $= \dfrac{\cos x}{sen x}$

Cossecante e secante de um arco.

A cossecante e a secante de um arco são indicadas na circunferência trigonométrica no eixo das ordenadas e no eixo das abscissas, respectivamente.



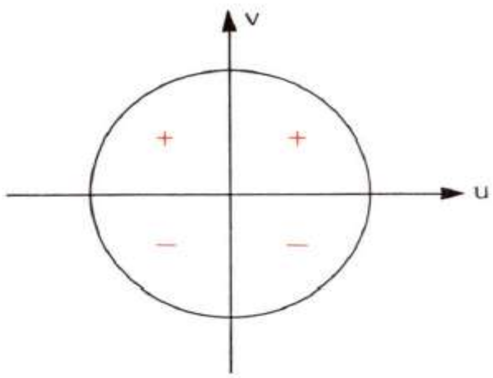
Sec x = $\dfrac{1}{\cos x}$



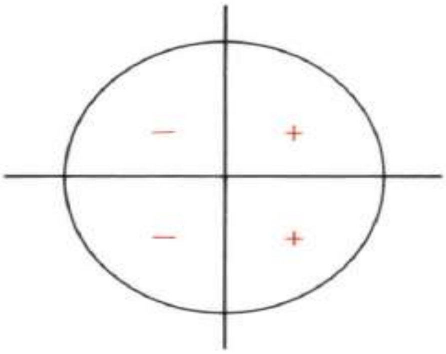
Cossec x = $\frac{1}{senx}$

Ciclo Trigonométrico e Tabela Trigonométrica

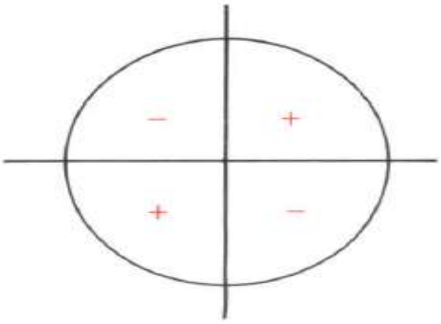
- Sinais dos Quadrantes: a) **Seno**



- **Cosseno**



- **Tangente**



Ang	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º	210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
Rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	- 1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	- 1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Tg	0	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$-\sqrt{3}$	- 1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	- 1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0

<u>Exercícios sobre os conteúdos abordados acima.</u>

1- 1- Sendo f(x) = $\frac{1}{2}$. cossec (3x) , calcule f$\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

2- Qual é o valor da expressão y = $\dfrac{\sec\pi - sen\frac{\pi}{2}}{\cos\pi - \cot g\frac{\pi}{2}}$

3- Se x = cos 945° - cos 495°, então:

a) x = 1 b) x = $\frac{1}{2}$ c) x = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) x = 0 e) x = - 1

4- Qual é o valor numérico da expressão: $\frac{sen 330° + \cos 990°}{2.tg 225°}$

5-(Mackenzie – SP) Se x = $\frac{\pi}{2}$, então qual é o valor da expressão

$$\frac{senx + 2.\cot g\left(\frac{x}{2}\right) - \cos(2x)}{tg\frac{x}{2}.\text{cossec}\,x + \sec(4x)}?$$

6- (UF – Uberlândia – MG) Simplificando a expressão 2.cos $\left(\frac{86\pi}{3}\right)$ - 3.tg$\left(\frac{11\pi}{4}\right)$, obtém-se:

a) – 4 b) - 2$\sqrt{3}$ c) 2 d) 1 + $\sqrt{3}$ e) 4

7- (ACAFE-SC) O valor numérico da expressão sen 2π - sec $\frac{4\pi}{3}$ – cossec $\frac{5\pi}{6}$, é:

a) 4 b) $\frac{1}{2}$ c) – 2 d) 2 e) 0

8- Construa os gráficos das funções abaixo, determinante, seu domínio, sua imagem e seu período.

f : IR → IR dada por $f(x) = 1 + 2 \cdot sen\ x$.

f : IR → IR dada por $f(x) = 2 - sen\ x$.

f : IR → IR dada por $f(x) = -1 + sen\ 2x$.

f : IR → IR dada por $f(x) = -cos\ x$.

f : IR → IR dada por $f(x) = 2 \cdot cos\ x$.

f : IR → IR dada por $f(x) = -3 \cdot cos\ x$.

Atividade 2

* **HABILIDADE RELACIONADA:** H12 – Resolver problemas envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30º, 45º e 60º) e H13 – Resolver problemas envolvendo a lei dos senos e dos cossenos.

***TEMPO DE DURAÇÃO:** 6 tempos de aula (50min cada)

***RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:** Exercícios contextualizados.

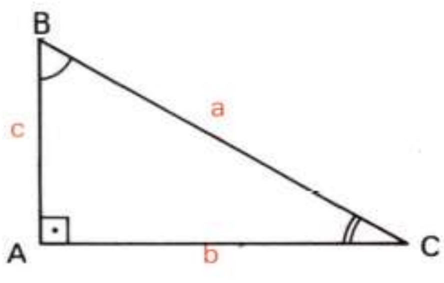
***ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Individual

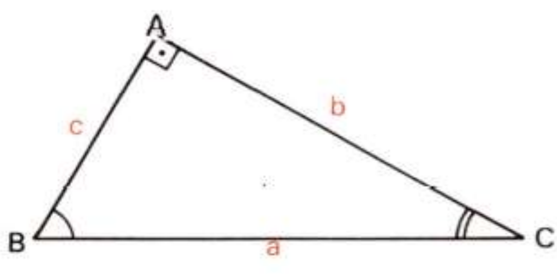
***OBJETIVOS:** Estimular o raciocínio da interpretação de enunciados e generalização de situações para resolver problemas.

***METODOLOGIA ADOTADA:** Aplicação da Trigonometria em um triângulo retângulo e em um triângulo qualquer.

Trigonometria no Triângulo Retângulo

Num triângulo retângulo em que a hipotenusa mede a, os catetos medem b e c e sendo α a medida de um ângulo agudo, temos:





$$\text{Sen B} = \frac{catetooposto}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

$$\text{Cos B} = \frac{catetoadjacente}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

$$\text{Tg B} = \frac{catetooposto}{catetoadjacente} = \frac{b}{c}$$

Exercícios para reforço da aprendizagem

Um observador vê um prédio, construído em terreno plano, sob um ângulo de *60°*. Afastando-se do edifício mais *30 m*, passa a ver o edifício sob ângulo de *45°*. Qual é a altura do prédio?

Solução

No triângulo BXY, temos:

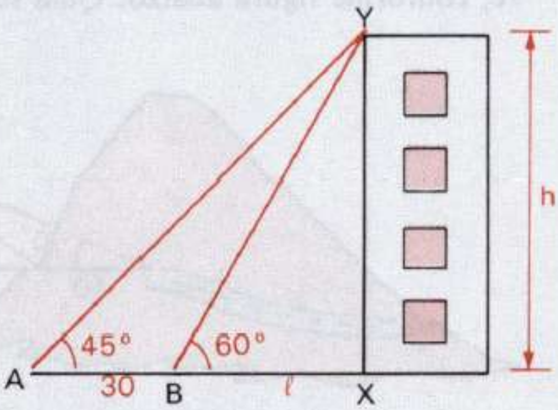
$$\text{tg } 60° = \frac{h}{\ell} \implies \ell = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

No triângulo AXY, temos:

$$\text{tg } 45° = \frac{h}{\ell + 30} \implies h = \ell + 30$$

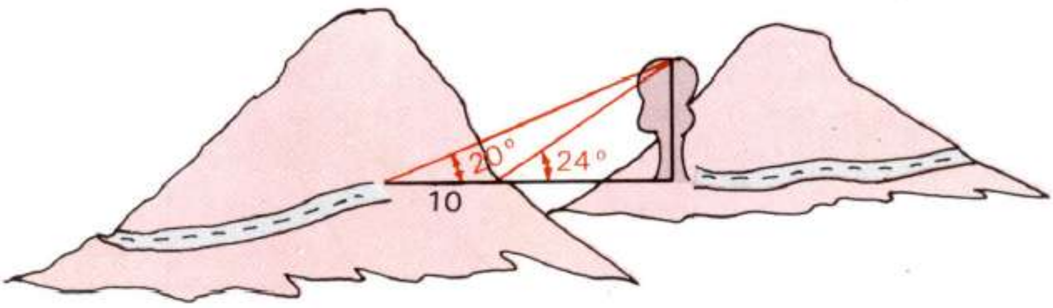
então

$$h = \frac{h}{\sqrt{3}} + 30 \implies h = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$$



Resposta: $\frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$ m.

Uma firma de engenharia deve construir uma ponte unindo duas montanhas, para dar continuidade a uma estrada. O engenheiro tomou como referência uma árvore, conforme figura abaixo. Qual será o comprimento da ponte?

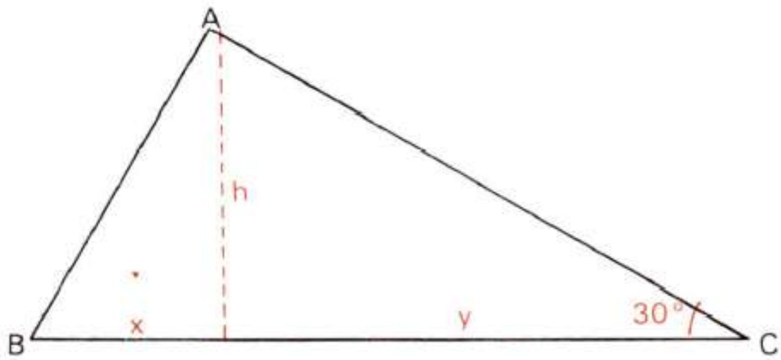


Calcule os lados de um triângulo retângulo, sabendo que a altura relativa à hipotenusa é $h = 4$ e um ângulo agudo é $\hat{B} = 30°$.

Calcule os lados de um triângulo retângulo, sabendo que a altura relativa à hipotenusa mede 4 e forma um ângulo de $15°$ com o cateto b.

Dados: $\text{sen } 75° = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ e $\cos 75° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

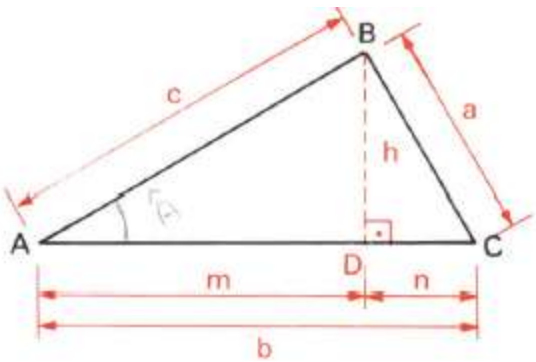
Considerando o $\triangle ABC$ retângulo em A, conforme figura abaixo, qual é a relação entre x e y?



Relações Trigonométricas em um triângulo Qualquer

Existem situações relacionadas a triângulos que exigirão um pouco mais de coinhecimento para que possam ser resolvidas. Basta considerar que o triângulo não é retângulo. Particularmente estudaremos duas leis: As leis dos senos e do cosseno.

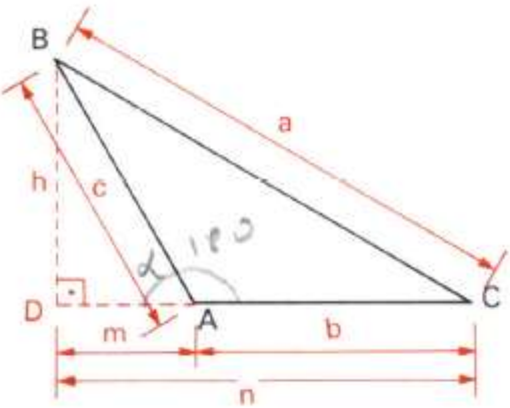
a) Lei dos senos → A lei dos senos é uma relação entre as medidas dos lados de um triângulo qualquer e dos senos dos ângulos opostos a esses lados. Para compreender essa relação, considere:



Em qualquer triângulo ABC, as medidas dos lados são proporcionais aos valores dos senos dos ângulos opostos, isto é:

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen B} = \frac{c}{sen C}$$

b) Lei dos Cossenos → Num triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois, menos o dobro do produto das medidas desses dois lados pelo cosseno do ângulo que eles formam. Temos:



$$A^2 = b^2 + c^2 - 2.bc.\cos A$$

Ou

$$B^2 = a^2 + c^2 - 2.ac.\cos B$$

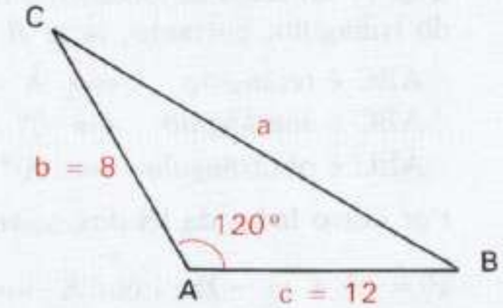
Ou

$$C^2 = a^2 + b^2 - 2.ab.\cos C$$

Exercícios para aprofundar a aprendizagem

Dois lados de um triângulo medem *8 m* e *12 m* e formam entre si um ângulo de *120°*. Calcule o terceiro lado.

Solução



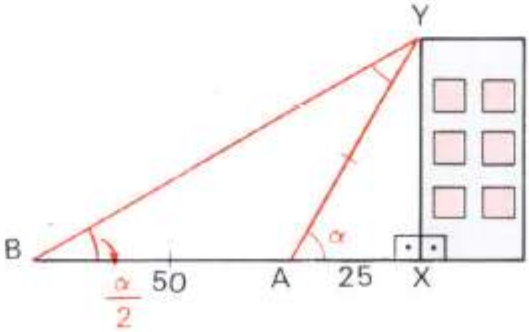
Adotando a notação da figura ao lado e aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} =$$
$$= 8^2 + 12^2 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \cos 120° =$$
$$= 64 + 144 + 96 = 304$$

então $a = \sqrt{304} = 4\sqrt{19}$ **m.**

Quais são os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ de um triângulo *ABC* para o qual $\hat{A} = 15°$, $sen\ \hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $sen\ \hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{2}$?

Um observador colocado a *25 m* de um prédio vê o edifício sob certo ângulo. Afastando-se em linha reta mais *50 m*, nota que o ângulo de visualização é metade do anterior. Qual é a altura do edifício?



AVALIAÇÃO

A avaliação ocorrerá durante cada atividade feita em sala de aula, levando-se em conta de maneira que ambos possam avaliar o quanto se desenvolveu com cada competência relacionada aos temas estudados nas atividades 1 e 2.

Será observado individualmente o efetivo aprendizado do educando na realização da prática, a partir da utilização, recursos como a tabela e o ciclo trigonométrico, para que possam ser feitas as expressões envolvendo as relações e as funções trigonométricas. Serão feitas avaliações em dupla, com questões diversificadas e contextualizadas.

Teremos três tipos de avaliações, que serão feitas duas em dupla e a outra individual, pois através destas avaliações, observarei se os alunos conseguiram adquirir o conhecimento passado nas atividades anteriores.

Nas avaliações em dupla serão analisadas se os alunos assimilaram o conteúdo abordado sobre as relações trigonométricas na circunferência, funções trigonométricas e a trigonometria nos triângulos.

Referências Bibliográficas

DANTE, L.R. de. **Matemática Contexto & Aplicações**. 5 ed. São Paulo: Ática, 2011.

BUCCHI, P. de. **Matemática e Cidadania**. 1 ed. São Paulo: Escala Educacional, 2008.

BENETTI, B. de. **Matemática Acontece**. 1 ed. São Paulo: Editora do Brasil,2012.