

FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ
COLÉGIO: CIEP 463 - João Borges Barreto - Ururai – Campos dos
Goytacazes/RJ
PROFESSOR: Priscila Henriques Gomes Oliveira
MATRÍCULA: 09519935
SÉRIE: 2ª
TUTOR (A): CLAUDIO ROCHA DE JESUS

PLANO DE TRABALHO SOBRE GEOMETRIA ESPACIAL: PRISMAS E
CILINDROS

Priscila Henriques Gomes Oliveira
phgoliveira@ibest.com.br

1. Introdução:

Iniciaremos o estudo de geometria, abordaremos neste plano de trabalho apenas o estudo de prisma e cilindros, onde buscamos aplicar a teoria juntamente com a prática, aplicando exemplos e exercícios.

Utilizaremos o roteiro 1 do curso de formação continuada da SEEDUC .

2. Estratégias adotadas no Plano de Trabalho:

O plano trabalho esta organizado na perspectiva de implementar o roteiro proposto pelo curso de formação continuada da SEEDUC, observando sempre a realidade da escola.

E neste sentido não poderemos utilizar o computador com softwares matemáticos, uma vez que não há tais softwares instalados nos computadores da escola. E não possui notebook fornecido pelo Estado para efetuar demonstrações via projetor.

No mais, faremos atividades e exposição do conteúdo em sala de aula, mas sempre tentando aplicar os exemplos propostos nos roteiros e demais bibliografias utilizadas, construindo assim o conhecimento do aluno.

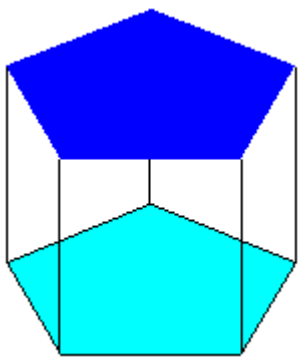
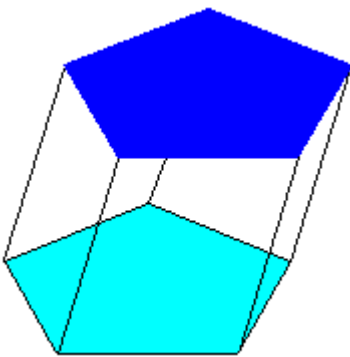
Atividade:

Solicito aos alunos que tragam um objeto em forma de prisma e um em forma de cilindro e faremos como exercício as medições com régua para efetuar os cálculos.

Aplicação do roteiro 1

Prisma

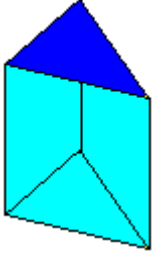
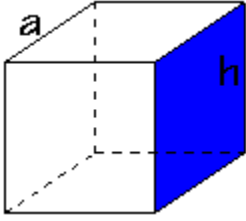
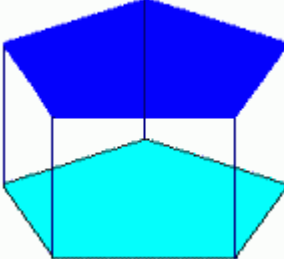
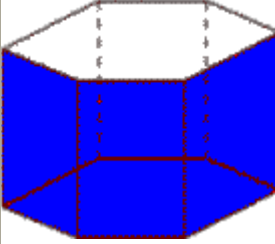
Prisma é um sólido geométrico delimitado por faces planas, no qual as bases se situam em planos paralelos. Quanto à *inclinação* das arestas laterais, os prismas podem ser retos ou oblíquos.

Prisma reto	Aspectos comuns	Prisma oblíquo
	Bases são regiões poligonais congruentes	
	A altura é a distância entre as bases	
	Arestas laterais são paralelas com as mesmas medidas	
	Faces laterais são paralelogramos	

Objeto	Prisma reto	Prisma oblíquo
Arestas laterais	têm a mesma medida	têm a mesma medida

Arestas laterais	são perpendiculares ao plano da base	são oblíquas ao plano da base
Faces laterais	são retangulares	não são retangulares

Quanto à *base*, os prismas mais comuns estão mostrados na tabela:

Prisma triangular	Prisma quadrangular	Prisma pentagonal	Prisma hexagonal
			
Base: Triângulo	Base: Quadrado	Base: Pentágono	Base: Hexágono

Seções de um prisma

Seção transversal: É a região poligonal obtida pela interseção do prisma com um plano paralelo às bases, sendo que esta região poligonal é congruente a cada uma das bases.



Seção reta (seção normal): É uma seção determinada por um plano perpendicular às arestas laterais.

Princípio de Cavalieri: Consideremos um plano P sobre o qual estão apoiados dois sólidos com a mesma altura. Se todo plano paralelo ao plano dado interceptar os sólidos com seções de áreas iguais, então os volumes dos sólidos também serão iguais.

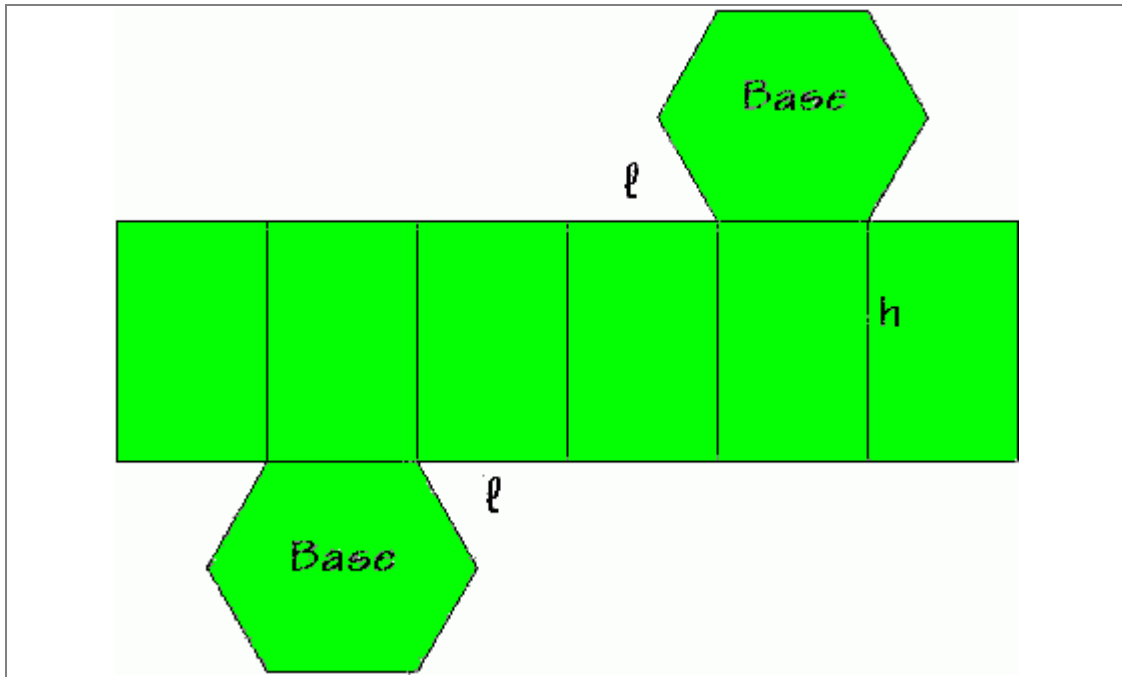
Prisma regular

É um prisma reto cujas bases são regiões poligonais regulares.

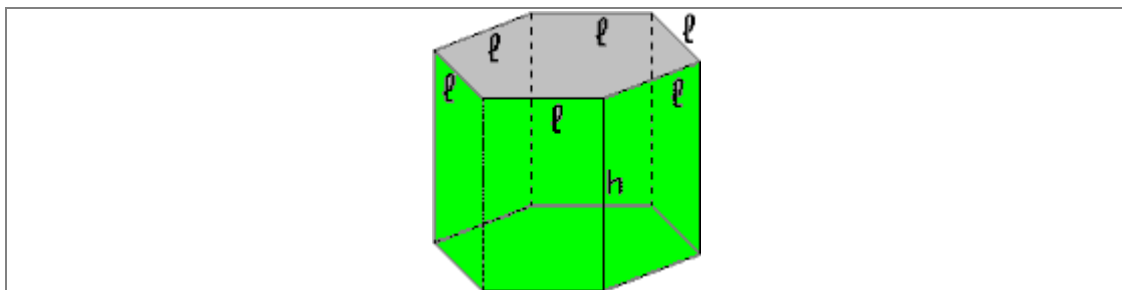
Exemplos: Um prisma triangular regular é um prisma reto cuja base é um triângulo equilátero. Um prisma quadrangular regular é um prisma reto cuja base é um quadrado.

Planificação do prisma

Um prisma é um sólido formado por todos os pontos do espaço localizados dentro dos planos que contêm as faces laterais e os planos das bases.



As faces laterais e as bases formam a envoltória deste sólido. Esta envoltória é uma "superfície" que pode ser planificada no plano cartesiano. Tal planificação se realiza como se cortássemos com uma tesoura esta envoltória exatamente sobre as arestas para obter uma região plana formada por áreas congruentes às faces laterais e às bases. A planificação é útil para facilitar os cálculos das áreas lateral e total.



Volume de um prisma

O volume de um prisma é dado por:

$$V(\text{prisma}) = A(\text{base}) \cdot h$$

Área lateral do prisma reto com base poligonal regular

A área lateral de um prisma reto que tem por base uma região poligonal regular de n lados é dada pela soma das áreas das faces laterais. Como neste caso todas as áreas das faces laterais são iguais, basta tomar a área lateral como:

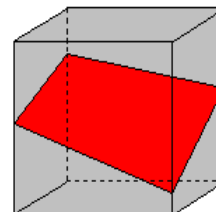
$$A(\text{lateral}) = n \cdot A(\text{Face Lateral})$$

Uma forma alternativa para obter a área lateral de um prisma reto tendo como base um polígono regular de n lados é tomar P como o perímetro desse polígono e h como a altura do prisma.

$$A(\text{lateral}) = P \cdot h$$

Tronco de prisma

Quando seccionamos um prisma por um plano não paralelo aos planos das bases, a região espacial localizada dentro do prisma, acima da base inferior e abaixo do plano seccionante é denominado tronco de prisma. Para calcular o volume do tronco de prisma, multiplicamos a média aritmética das arestas laterais do tronco de prisma pela área da base.



Avaliação Prisma

- 1- Deseja-se cimentar um quintal retangular com 10 m de largura e 14 m de comprimento. O revestimento será feito com 3 cm de espessura. Qual o volume de cimento utilizado nesse revestimento ?
- 2- Para encher uma laje de formato retangular, com 4 m de largura por 6 m de comprimento foi utilizado $2,88 \text{ m}^3$ de cimento. Qual a espessura do concreto dessa laje ?
- 3- Determine o volume e a quantidade de azulejos , em m^2 , que serão necessários para a construção de uma piscina de 8 m de comprimento , 5 m de largura e 1,6 m de profundidade. Se uma caixa de azulejo contém $2,5 \text{ m}^2$ e custa R\$ 12,00, qual o custo do azulejo para revestir essa piscina ?
- 4- Um cubo possui uma área total de 54 m^2 . Qual o volume desse cubo?
- 5- Qual a quantidade de água necessária para preencher uma forma de gelo, que contém 12 cubos de 2 cm por 3 cm e 1,5 cm
- 6- Sabe-se que um cubo tem 216 m^2 de área total. Determine, em litros o seu volume?
- 7- Calcule o volume de um prisma triangular de altura 10 cm, cuja base é um triângulo equilátero de aresta 4 cm.

Introdução aos cilindros

O conceito de cilindro é muito importante. Nas cozinhas encontramos aplicações intensas do uso de cilindros. Nas construções, observamos caixas d'água, ferramentas, objetos, vasos de plantas, todos eles com formas cilíndricas.



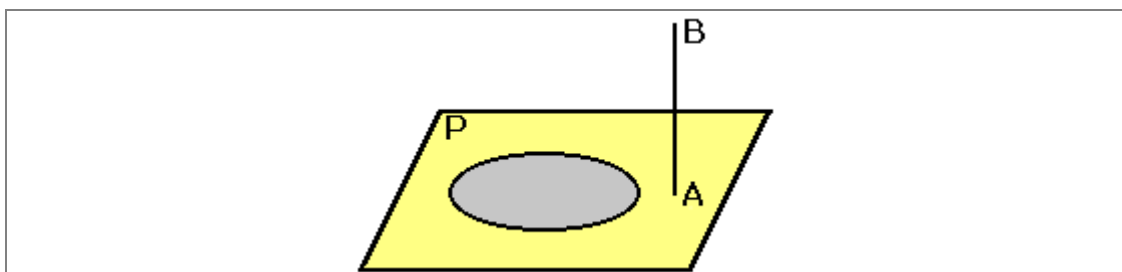
Existem outras formas cilíndricas diferentes das comuns, como por exemplo o cilindro sinuzoidal obtido pela translação da função seno.

Aplicações práticas: Os cilindros abaixo sugerem alguma aplicação importante em sua vida?



A Construção de cilindros

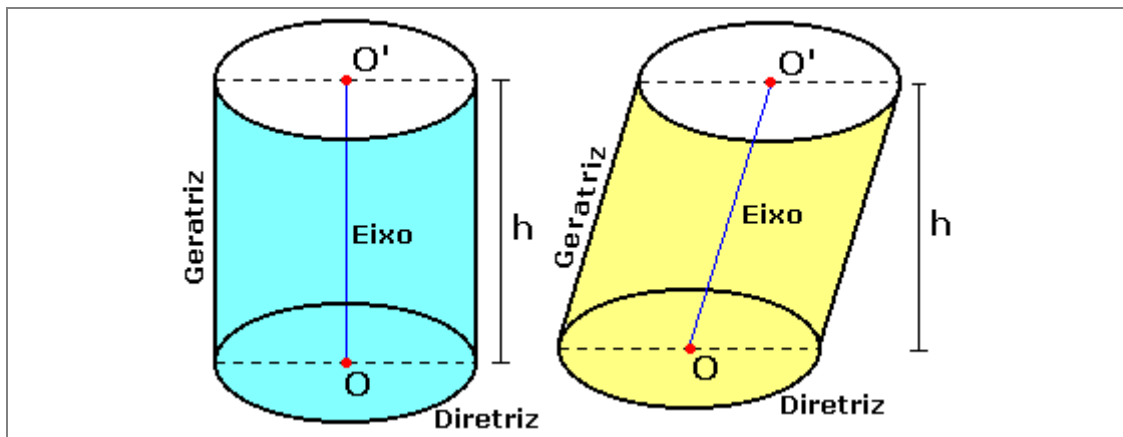
Seja P um plano e nele vamos construir um círculo de raio r e tomemos também um segmento de reta AB que não seja paralelo ao plano P e nem esteja contido neste plano P . Um cilindro circular é a reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a AB com uma extremidade no círculo.



Observamos que um cilindro é uma superfície no espaço R^3 , mas muitas vezes vale a pena considerar o cilindro como a região sólida contida dentro do cilindro. Quando nos referirmos ao cilindro como um sólido usaremos aspas, isto é, "*cilindro*" e quando for à superfície, simplesmente escreveremos *cilindro*.

A reta que contém o segmento AB é denominada *geratriz* e a curva que fica no plano do "chão" é a *diretriz*.

Em função da inclinação do segmento AB em relação ao plano do "chão", o cilindro será chamado reto ou oblíquo, respectivamente, se o segmento AB for perpendicular ou oblíquo ao plano que contém a curva diretriz.



Objetos geométricos em um "cilindro"

Em um cilindro, podemos identificar vários elementos:

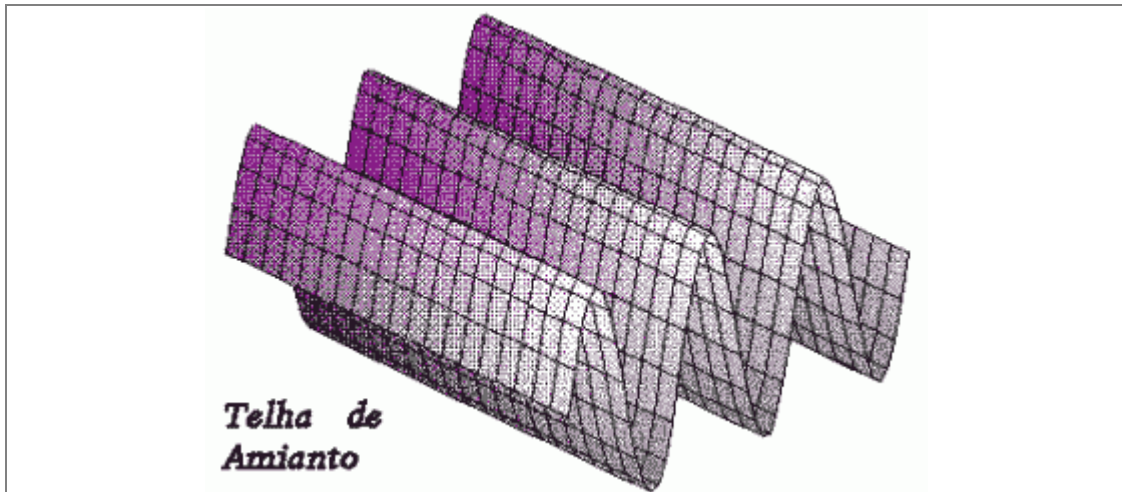
1. Base: É a região plana contendo a curva diretriz e todo o seu interior. Num cilindro existem duas bases.
2. Eixo: É o segmento de reta que liga os centros das bases do "cilindro".
3. Altura: A altura de um cilindro é a distância entre os dois planos paralelos que contêm as bases do "cilindro".
4. Superfície Lateral: É o conjunto de todos os pontos do espaço, que não estejam nas bases, obtidos pelo deslocamento paralelo da geratriz sempre apoiada sobre a curva diretriz.
5. Superfície Total: É o conjunto de todos os pontos da superfície lateral reunido com os pontos das bases do cilindro.
6. Área lateral: É a medida da superfície lateral do cilindro.
7. Área total: É a medida da superfície total do cilindro.
8. Seção meridiana de um cilindro: É uma região poligonal obtida pela interseção de um plano vertical que passa pelo centro do cilindro com o cilindro.

Extensão do conceito de cilindro

As características apresentadas antes para cilindros circulares, são também possíveis para outros tipos de curvas diretrizes, como: elipse, parábola, hipérbole, seno ou outra curva simples e suave num plano.

Mesmo que a diretriz não seja uma curva conhecida, ainda assim existem cilindros obtidos quando a curva diretriz é formada por uma reunião de curvas simples. Por exemplo, se a diretriz é uma curva retangular, temos uma situação patológica e o cilindro recebe o nome especial de *prisma*.

Em função da curva diretriz, o cilindro terá o nome de cilindro: elíptico, parabólico, hiperbólico, sinuzoidal (telha de eternit).



Classificação dos cilindros circulares

1. Cilindro circular oblíquo: Apresenta as geratrizes oblíquas em relação aos planos das bases.
2. Cilindro circular reto: As geratrizes são perpendiculares aos planos das bases. Este tipo de cilindro é também chamado de cilindro de revolução, pois é gerado pela rotação de um retângulo.
3. Cilindro equilátero: É um cilindro de revolução cuja seção meridiana é um quadrado.

Volume de um "cilindro"

Em um cilindro, o volume é dado pelo produto da área da base pela altura.

$$V = A(\text{base}) h$$

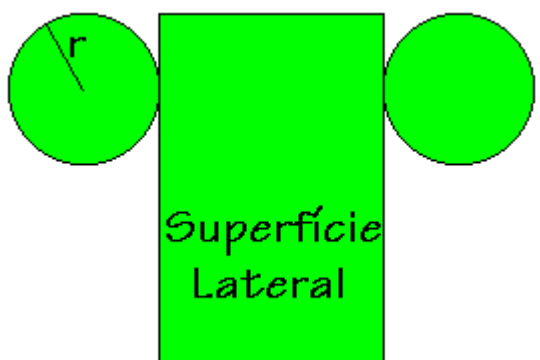
Se a base é um círculo de raio r , e $\pi=3,141593\dots$, então:

$$V = \pi r^2 h$$


Exercício: Calcular o volume de um cilindro oblíquo com base elíptica (semi-eixos a e b) e altura h . Sugestão: Veja nesta mesma Página um material sobre a área da região elíptica.

Área lateral e área total de um cilindro circular reto

Em um cilindro circular reto, a área lateral é dada por $A(\text{lateral})=2\pi.r.h$, onde r é o raio da base e h é a altura do cilindro. A área total corresponde à soma da área lateral com o dobro da área da base.

$A(\text{total}) = A(\text{lateral}) + 2 A(\text{base})$ $A(\text{total}) = 2 \pi r h + 2 \pi r^2$ $A(\text{total}) = 2 \pi r(h+r)$	
---	--

Exemplo: Um cilindro circular equilátero é aquele cuja altura é igual ao diâmetro da base, isto é $h=2r$. Neste caso, para calcular a área lateral, a área total e o volume, podemos usar as fórmulas, dadas por:

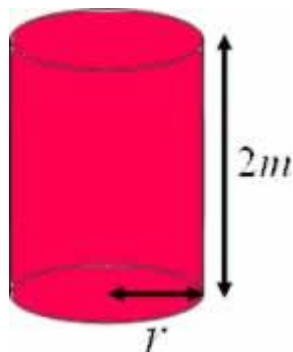
$A(\text{lateral}) = 4 \pi r^2$ $A(\text{base}) = \pi r^2$ $A(\text{total}) = A(\text{lateral}) + 2 A(\text{base}) = 6 \pi r^2$ $\text{Volume} = A(\text{base}) \cdot h = \pi r^2 \cdot 2r = 2 \pi r^3$	
---	--

Exercício: Seja um cilindro circular reto de raio igual a 2cm e altura 3cm. Calcular a área lateral, área total e o seu volume.

$A(\text{base}) = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 2^2 = 4 \pi \text{ cm}^2$ $A(\text{lateral}) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 3 = 12 \pi \text{ cm}^2$ $A(\text{total}) = A(\text{lateral}) + 2 A(\text{base}) = 12\pi + 8\pi = 20 \pi \text{ cm}^2$ $\text{Volume} = A(\text{base}) \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 4 \cdot 3 = 12 \pi \text{ cm}^3$
--

Avaliação Cilindro

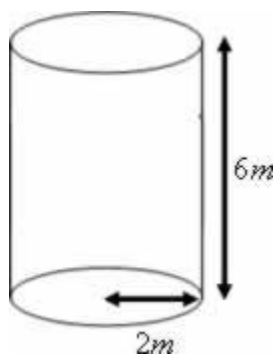
1 - (Cefet – SP) A figura indica o tambor cilíndrico de um aquecedor solar com capacidade de 1 570 litros.



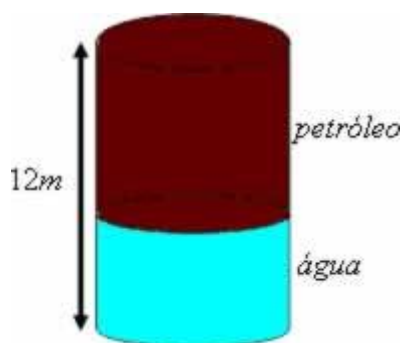
Sabendo que 1 000 litros de água ocupam um volume de 1 m^3 e adotado $\pi = 3,14$, determine a medida do raio r do cilindro.

2 - (UFG) Um produtor de suco armazena seu produto em caixas, em forma de paralelepípedo de base quadrada, com altura de 20 cm, tendo capacidade de 1 litro. Ele deseja trocar a caixa por uma embalagem em forma de cilindro, de mesma altura e mesma capacidade. Para que isso ocorra, qual deve ser o raio da base dessa embalagem cilíndrica?

3 - Um reservatório em formato cilíndrico possui 6 metros de altura e raio da base igual a 2 metros. Determine o volume e a capacidade desse reservatório.



4 - (Vunesp – SP) Um tanque subterrâneo, que tem o formato de um cilindro circular reto na posição vertical, está completamente cheio com 30 m^3 de água e 42 m^3 de petróleo. Considerando que a altura do tanque é de 12 metros, calcule a altura da camada de petróleo.



▪ **Habilidade relacionada:**

- ✓ Reconhecer e nomear prismas e cilindros.
- ✓ Resolver problemas envolvendo o cálculo de áreas lateral e total de prismas e cilindros.
- ✓ Resolver problemas envolvendo cálculo do volume de prismas e cilindros.

▪ **Pré-requisitos:**

- ✓ Poliedros.
- **Tempo de Duração:**
- ✓ 14 horas/aulas.
- **Recursos Educacionais Utilizados:**
- ✓ Quadro branco com canetas coloridas.
- ✓ Lápis, régua, papel e caneta.
- ✓ Resumo do conteúdo no quadro.
- ✓ Uso do roteiro 1 do curso de formação continuada da SEEDUC.
- ✓ Folhas de atividade para avaliação.
- **Organização da turma:**
- ✓ Com a turma disposta em pequenos grupos (2 ou 3 alunos)
- **Objetivos:**
- ✓ Calcular a medida da área lateral de um prisma, com ou sem a informação de fórmulas.
- ✓ Calcular a medida da área lateral de um cilindro, com ou sem a informação de fórmulas.
- ✓ Calcular a medida da área total de um prisma, com ou sem a informação de fórmulas.
- ✓ Calcular a medida da área total de um cilindro, com ou sem a informação de fórmulas.
- ✓ Calcular a medida do volume de um prisma, com ou sem a informação de fórmulas.
- ✓ Calcular a medida do volume de um cilindro, com ou sem a informação de fórmulas.
- **Metodologia adotada:**
- ✓ Com a construção do conhecimento dos alunos com uso de exemplos.
- ✓ Apresentar definições e exemplos.
- ✓ Estudo de propriedades.

3. Avaliação:

- ✓ Folha de atividades em dupla. As atividades foram colocados acima como Exercício de avaliação.
- ✓ Perguntas informais durante a aula propiciando trabalho organizado e colaborativo.

4. Referências:

- ✓ DANTE, L. R. Matemática: Contexto e Aplicações. São Paulo: Editora Ática, 1999.
- ✓ GIOVANNI, J. R., BONJORNO, J. R., GIOVANNI Jr, J. R. Matemática Fundamental. São Paulo: Editora FTD Ltda, 1994.
- ✓ MEDEIROS, Matemática Básica para Cursos Superiores. São Paulo: Editora Atlas S.A., 2002.

- ✓ Roteiro de ação 1 do projeto SEEDUC, 2º ano, 2º bimestre, 2013.
- ✓ <http://exercicios.brasilecola.com/matematica/exercicios-sobre-cilindro.htm#questao-517>. Acesso em 16/05/2013
- ✓ <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/cilindro/cilindro.htm>. Acesso em 16/05/2013
- ✓ <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica>
. Acesso em 16/05/2013