Avaliação da implementação do Plano de Trabalho

Pontos Positivos
Objetivos satisfatoriamente alcançados, boa participação e interesse por parte dos alunos.

Procurei introduzir o tema números complexos buscando relacionar com uma de suas aplicações. Foi um grande ganho utilizar essa abordagem, pois despertou o interesse do aluno pelo fato de ser analisada uma situação de aplicação prática do conteúdo.

Quanto à seleção de conteúdos, considero ter sido válido o fato de abordar a representação geométrica dos números complexos e as operações como transformações no plano.

Pontos Negativos
Um dos entraves que tive na execução do PT foi em relação ao tempo. Gastei mais aulas que o previsto.

A parte das operações com números complexos ficou dificultada pela falta de pré-requisitos nas operações com números inteiros.

Alterações
As mudanças que considero necessárias são acrescentar mais aulas para as atividades com os jogos e os vídeos.

Impressões dos alunos
Os alunos se envolveram bem com todas as atividades.

A atividade de construção dos jogos foi muito boa, os alunos interagiram muito bem uns com os outros e puderam exercitar as operações com números complexos.

Perceber as transformações no plano e assistir aos vídeos do site Dimensions chamou atenção de forma especial. Foi interessante perceber a reação de admiração e entusiasmo dos alunos ao verem as transformações ocorridas em cada figura.

FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ
COLÉGIO: CIEP 403 MARIA DE LOURDES GIOVANETTI
PROFESSOR: MARIA THERESA DA SILVA
SÉRIE: 3º ANO ENSINO MÉDIO
TUTORA: EDNA DA ROSA VETROMILLE

PLANO DE TRABALHO SOBRE NÚMEROS COMPLEXOS

[Maria Theresa Silva]
[mtscunha@bol.com.br]

Introdução:
Os *números complexos* constituem um dos capítulos mais bonitos da matemática e se tornaram essenciais na ciência. O caminho da sua descoberta não foi fácil e a terminologia empregada testemunha esta dificuldade; falou-se de números impossíveis, imaginários, e a palavra "complexo" deixa entender que não foi fácil compreendê-los. Felizmente, hoje, não é mais o caso: podemos agora apresentá-los de maneira relativamente elementar.
Os números complexos têm aplicações práticas em campos diversos como aerodinâmica, eletrônica, eletricidade, teoria dos fractais, biologia, etc.
Por exemplo, no processo pelo qual a energia elétrica chega a nossa casa estão presentes cálculos que envolvem os números complexos. Outra aplicação dos números complexos, aparece nas conexões que podem ser feitas entre as operações e as transformações geométricas no plano.
Para um bom entendimento do tema números complexos, é importante que os alunos dominem as operações no campo dos números reais e conheçam o plano cartesiano.
É necessário que os alunos compreendam o conceito de números complexos e saibam interpretar suas diversas representações.

Estratégias adotadas no Plano de Trabalho:
A abordagem será feita a partir de um texto que relaciona os números complexos à aerodinâmica. O texto comenta como os estudos sobre aerofólios e suas influências na força de sustentação dos aviões estão relacionados ao conjunto dos números complexos.
Após esta parte, serão explorados os aspectos históricos da introdução dos números complexos. Serão abordadas também definições e as operações com números complexos na forma algébrica.
Depois partiremos para uma atividade onde o aluno poderá perceber as conexões entre as operações com números complexos e transformações geométricas no plano.

Atividade

Pré-requisitos:
Efetuar operações com números reais e conhecer o plano cartesiano.

Tempo de Duração:
12 horas/aulas

Material necessário:
Computador, projetor multimídia, Internet, papel quadriculado, folha de atividades.

Organização da turma:
Alunos agrupados em duplas

Objetivos:
Compreender a necessidade matemática do conjunto dos números complexos.
Conhecer a história da matemática – números complexos.
Perceber que todos os números reais são também números complexos.
Identificar os números complexos em suas representações algébricas e geométricas.
Compreender e efetuar operações envolvendo números complexos.
Aplicar os conhecimentos adquiridos na resolução de problemas.

Descritores associados:
H36 **-** Efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica.

Metodologia

1ª e 2ª aulas

Leia o texto abaixo.

Entre as forças aerodinâmicas que atuam sobre o avião durante o voo, podemos destacar a de sustentação, considerada responsável por manter o avião no ar. Grande parte dessa força é gerada pelas asas, que geralmente são projetadas para serem rígidas, de modo a evitar movimentos excessivos durante o voo, colaborando para a tranquilidade de passageiros e pilotos.

Para entender o funcionamento das asas de um avião, existem alguns elementos que podem ser utilizados, como os aerofólios – formatos da seção transversal das asas –, que influenciam, entre outros aspectos, na força de sustentação gerada pelas asas.

No ano de 1915, o Naca (*National Advisory Committee for Aeronautics* – Comitê Consultivo Nacional sobre Aeronáutica), precursor da Nasa (*National Aeronautics and Space Administration* – Administração Aeronáutica e Espacial Nacional), foi criado pelo Congresso norte-americano, a fim de superar o atraso em relação à Europa na área de aviação. Nas décadas de 1920 e 1930, o Naca realizou vários testes em aviões, com os mais diferentes aerofólios, possibilitando aos engenheiros melhorar aspectos referentes à aerodinâmica dos aviões, pois eles obtiveram informações acerca da sustentação que os aerofólios podiam desenvolver em diversas condições de voo.

Um nome frequentemente associado ao estudo de aerofólios é o do matemático russo Nikolai Joukowski (1847-1921), que desenvolveu um método que ficou conhecido como a Transformação de Joukowski, possibilitando a engenheiros aeronáuticos realizar estudos sobre aerofólios e suas influências na força de sustentação dos aviões. Na Transformação de Joukowski, os conceitos utilizados estão relacionados ao conjunto dos números complexos, o qual será estudado nessa unidade.

Um fator relacionado à força de sustentação que atua sobre o avião e ajuda a mantê-lo no ar é a pressão.

Durante o voo, o ar passa tanto pela parte superior quanto pela parte inferior de suas asas. Na parte superior, o ar atinge uma velocidade maior do que na inferior. Assim, considerando que, quanto maior a velocidade do ar, menos pressão ele gera, o ar produz mais pressão na parte inferior da asa que na superior. Como consequência disso, é gerada uma força de sustentação, de baixo para cima, que impulsiona o avião para o alto.

Qual é a função principal de um aerofólio em um avião?

Os conceitos utilizados na Transformação de Joukowski estão relacionados a que elementos da Matemática? Quais as contribuições dessa transformação para engenheiros aeronáuticos?

A leitura desse texto nos mostra como os números complexos permitiram uma explicação matemática para o vôo. Daí em diante o progresso aeronáutico foi rápido.

Pois bem, mas quem são esses números chamados complexos?

Vamos então conhecer um pouco da história da matemática ligada a esses números. Para isso, acesse o link: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euler/complexoshistoria.htm
Qual é a idéia principal do texto?

De acordo com o texto, que matemático utilizava a letra *i* para representar √-1?

Cite algumas contribuições de Girolano Cardano para a evolução dos números complexos?

Por que o plano em que se apresentam os números complexos recebe o nome de Argand-Gauss?

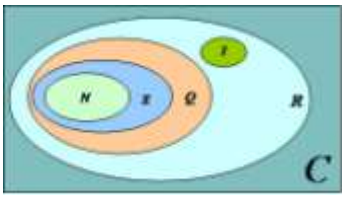
Continue sua leitura com muita atenção.

O número imaginário existe realmente?

É difícil imaginar que haja algum número que seja a raiz quadrada de -1. Como tal, é tentador acreditar que o número i não existe, que é só uma conveniente ficção matemática.
No entanto, este não é o caso. Números imaginários existem. Fora o nome, não são nada imaginários e sim bastante reais.
Mas porque será tão difícil aceitarmos que existem números que são raízes quadradas de números negativos?

Antes de explicar o que é o número imaginário, será melhor refletir sobre a representação que nós fazemos de número em geral.
A origem do conceito de número surgiu como expressão de uma quantidade de elementos, isto é, como resultado do processo de contar. Mas com o decorrer dos tempos, a definição foi sofrendo alterações, já que do conceito original se iam obtendo novas definições e interpretações mais gerais.
A representação dos primeiros números, os naturais, surgiu para responder a questões de quantidades. Mas, os números não se reduzem aos naturais. A criação de números mais sofisticados, teve a mão do Homem pois as exigências quotidianas a tal o obrigaram. Com isto, surgem os números negativos e o zero, dando lugar aos números inteiros. Como era algo novo houve alguma relutância em aceitar a existência de números negativos, números que são inferiores ao zero, ao nada. Mas, as diversas utilidades que estes proporcionaram, ajudaram à aceitação. Ao falarmos de temperaturas negativas, saldos bancários negativos, entre outros aspectos do dia-a-dia, já nos parece credível aceitar a existência de números negativos.

O surgimento dos números fracionários ou racionais também provocou alguma dificuldade. Mas o seu significado é facilmente compreendido, já que estão intimamente ligados à vida real e à linguagem quotidiana. Intuitivamente, temos a ideia de fração ligada a algo que é repartido: meia garrafa, um quarto de laranja, um terço do terreno, etc.
O conjunto dos números reais é constituído pelos naturais, inteiros, racionais e irracionais
Essencialmente, com o correr dos tempos e à medida que se tornava necessário, cada um dos conjuntos dos números abordados foi surgindo como uma ampliação do conjunto anterior. O conjunto dos números complexos não é exceção.



3ª e 4ª aulas

O conjunto dos Números Complexos

O conjunto dos números complexos C pode ser definido como o conjunto de pares ordenados de números reais (a, b) em que estão definidas certas operações.

$$z \in C \leftrightarrow z = (a, b), \text{ com } a \in R \text{ e } b \in R$$

Representação algébrica de um número complexo

Todo número complexo z = (a, b), pode ser representado algebricamente.
A forma algébrica pela qual representaremos um número complexo será **a + bi**, como a e b Є R.
A forma algébrica de representar um número complexo é mais prática e mais utilizada nos cálculos.

Definindo as partes que formam um número complexo **z = a + bi**.
z é um número complexo qualquer.
a é a parte real do número complexo z.
b é a parte imaginária do número complexo z.

O conjunto dos números que formam a parte real é representado por Re(z).
O conjunto dos números que formam a parte imaginária é representado por Im(z).

Veja alguns exemplos de como identificar a parte real e a parte imaginária de um número complexo:
$z = -3 + 5i$
$Re(z) = -3$
$Im(z) = 5$

$z = -5 + 10i$
$Re(z) = -5$
$Im(z) = 10$

$z = 1/2 + (1/3)i$
$Re(z) = 1/2$
$Im(z) = 1/3$

As coordenadas ***a*** e ***b*** podem assumir qualquer valor real, dependendo do valor que eles assumirem o número complexo irá receber um nome diferente:
Quando a e b forem diferentes de zero dizemos que o número complexo é imaginário:
$z = 2 + 5i$

Quando o valor de a é igual a zero e o de b é diferente de zero dizemos que o número complexo é imaginário puro:
$z = 0 + 2i$
$z = 2i$

Quando a diferente de zero e b igual a zero dizemos que o número complexo será real.
$z = 5 – 0i$
$z = 5$

Observe que todo número real é também um número imaginário.

Oposto, Conjugado e Igualdade

Para determinarmos o oposto, o conjugado e a igualdade de qualquer número complexo precisamos conhecer alguns fundamentos.

Oposto

O oposto de qualquer número real é o seu simétrico, o oposto de 10 é -10, o oposto de -5 é +5. O oposto de um número complexo respeita essa mesma condição, pois o oposto do número complexo z será – z.
Por exemplo: Dado o número complexo z = 8 – 6i, o seu oposto será: - z = - 8 + 6i.

Conjugado

Para determinarmos o conjugado de um número complexo, basta representar o número complexo através do oposto da parte imaginária. O conjugado de z = a + bi será:
$\bar{z} = a - bi$
Exemplo:
z = 5 – 9i, o seu conjugado será: 5 + 9i
z = – 2 – 7i, o seu conjugado será: -2 + 7i

Igualdade

Dois números complexos serão iguais se, e somente se, respeitarem a seguinte condição:
Partes imaginárias iguais
Partes reais iguais

Dado os números complexos z1 = a + bi e z2 = d + ei, z_1 e z_2, serão iguais se, somente se, a = d e bi = ei.

Exemplo 1
Dado o número complexo z = - 2 + 6i, calcule o seu oposto, o seu conjugado e o oposto do conjugado.

Exemplo 2
Determine a e b de modo que $-2+9i = \overline{a+bi}$.

Operações com números complexos

Soma e Subtração

Nesta atividade, você terá contato com as operações de soma e subtração envolvendo números complexos. Na verdade, você descobrirá que elas muito se assemelham a outros conceitos já estudados anteriormente. Preparado?
Por exemplo, como faríamos a soma dos números complexos $z = 2$ e $w = 4$? Uma vez que todo número real é um número complexo, tanto faz somarmos complexos que possuam apenas a parte real, apenas a parte imaginária, ou ambas. Um cuidado deve ser tomado: a unidade imaginária i distingue a parte real da parte imaginária e, sendo cada parte de natureza distinta, não podemos simplesmente uní-las. Assim, o procedimento de soma de dois números complexos se assemelha ao de soma de expressões algébricas da forma $ax + b$.
Sob esta ótica, temos, por exemplo:
$z = 2 + 3i$; $w = 5 + 2i$
$z + w = 2 + 3i + 5 + 2i = (2 + 5) + (3 + 2)i = 7 + 5i$

1. Agora efetue as somas $z + w$ abaixo:
a. $z = 3$; $w = 5$
b. $z = 2i$; $w = 4i$
c. $z = 2 + 3i$; $w = 3$
d. $z = 3 + 5i$; $w = 3 + 2i$

Como você pôde perceber, somar números complexos pode ser tratado de modo semelhante à soma de expressões algébricas.

Para o caso da subtração de números complexos, mantendo a relação citada acima, basta a troca de sinal da parte real e da parte imaginária, seguindo com o agrupamento e soma dos termos semelhantes como anteriormente.
Por exemplo:
$z = 5 + 2i$; $w = 2 + i$
$z - w = (5 + 2i) - (2 + i) = 5 + 2i - 2 - i = (5 - 2) + (2 - 1)i = 3 + i$
2. Agora, efetue $z – w$ nos casos abaixo:
a. $z = 6 + 3i$; $w = 2 – 4i$
b. $z = -2 + 4i$; $w = 3 – 5i$
c. $z = 3 – 5i$; $w = -2 + 4i$

Como vimos, o procedimento para soma e subtração de números complexos pode ser resumido a operar com a parte real e com a parte imaginária separadamente e, em seguida, juntar as partes para formar um novo número complexo.

As atividades que você acabou de realizar levaram em conta apenas valores inteiros para as partes real e imaginária dos números complexos. Mas os números complexos são muito mais que isso!
Na realidade, os valores podem ser quaisquer números reais e, para realizar a soma/subtração em cada caso, basta seguir o mesmo procedimento que você realizou anteriormente, só que agora com quaisquer complexos.
3. Tente agora efetuar as seguintes operações:
a. $z = 1{,}5 + 5{,}4i$; $w = -3{,}1 - 1{,}2i$. Sendo assim, determine $z + w$.
b. $z = 44{,}3 - 1{,}8i$; $w = 4{,}2 + 2{,}7i$; $v = -i$. Sendo assim, determine $z - w + v$.

Pronto! Agora você já é capaz de realizar somas e subtrações entre números complexos quaisquer!

5ª e 6ª aulas

Multiplicação e Divisão

Assim como fizemos na soma/subtração, podemos considerar a multiplicação e a divisão como uma operação envolvendo a forma algébrica, da mesma forma que fazemos com as expressões algébricas.
E mais: você lembra da "racionalização do denominador de uma fração"? Esse é um procedimento bastante efetuado no estudo de frações envolvendo expressões algébricas e números irracionais. Será utilizado aqui também!
1. Inicialmente, tente efetuar a operação $z \cdot w$, com $z = 3 + 2i$ e $w = 4$.

2. Agora vamos complicar um pouco. Efetue a operação $z \cdot w$, com $z = 2 + 4i$ e $w = 3i$. Não se esqueça que, como $i = \sqrt{-1}$, podemos considerar que $i^2 = -1$.

3. Efetue $z \cdot w$, com $z = 2 – 3i$ e $w = 5 – i$.

A partir deste ponto, você já deve estar em condições de efetuar o produto entre dois complexos na forma algébrica. Mas, e a divisão?
4. Bom tente efetuar a seguinte divisão: $z : w$, com $z = 6 – 4i$ e $w = 2$.

Na divisão onde o divisor é um número real puro, basta dividir cada termo do dividendo pelo divisor. Agora efetue:
5. $z : w$, com $z = -9i$ e $w = 3i$.
6. $z : w$, com $z = 6 – 4i$ e $w = 2i$.

Dica multiplique o numerador e o denominador por i, assim como fazemos com as raízes reais.

Para efetuar uma divisão onde o divisor possui parte imaginária, faremos uso de um artifício que você conheceu durante o estudo de números irracionais: a racionalização do denominador.
A divisão de números complexos na forma $a + bi$ pode ser vista do mesmo modo que uma divisão de números irracionais na forma de radicais. Neste caso, quem executa a tarefa de eliminar a parte imaginária é o conjugado do número complexo.
Procure efetuar a seguinte divisão, utilizando esta idéia:
7. $z : w$, com $z = 4 – 3i$ e $w = 2 + i$

Com isto você já tem condições de trabalhar com as 4 operações básicas dentro do conjunto dos números complexos.

Vamos em frente...

Potenciação

Vamos primeiro saber como trabalhar com as potências da unidade imaginária.

Responda a sequência abaixo:
8. Qual o valor de i^2?

9. Você pode, a partir do valor de i^2, obter o valor de i^3? Como?

10. Agora que você tem o valor de i^3, é capaz de calcular i^4? Como?

11. O que aconteceu no momento em que calculou o valor de i^4? Você consegue explicar o motivo?

12. Obtenha os valores de i^5, i^6, i^7 e i^8.

Notou algo “estranho”? Acontece que as potências de i formam uma sequência que percorre um ciclo de valores: 1, i, -1, -i. Com isto, para saber o valor de qualquer potência de i, basta verificar em que ponto da sequência a potência desejada se encontra.
Vamos verificar?
13. Calcule i^{10}.

Você já viu que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, etc. Se continuarmos com a sequência, logo notamos que i^{10} deve ser igual a -1. Mas e se quiséssemos o valor de i^{135}? É necessário encontrar um modo de não precisar escrever a sequência completa todas as vezes... E há um modo!!

Verificando os resultados das potências de i, podemos notar uma relação entre os expoentes e os valores dos resultados.
14. Você consegue visualizar qual é esta relação? Explique a seguir.

Uma dica: esta relação refere-se ao “tempo” que leva até que um valor seja repetido.
Perceba que, de quatro em quatro expoentes os valores voltam a se repetir. Assim,
$i^4 = i^0 = 1$;
$i^5 = i^1 = i$;
$i^6 = i^2 = -1$;
$i^7 = i^3 = -i$; etc.
Leve os alunos a perceberem que a menor potência de i à qual uma potência maior é equivalente é aquela dada pelo resto da divisão do expoente por 4. Ou seja:
$i^k = i^r$, onde r é o resto da divisão de k por 4.
Logicamente, $r \in \{0,1,2,3\}$

15. Encontre o valor das seguintes potências de i:
a) i^{21} b) i^{87} c) i^{221} d) i^{1024}

Agora você já pode calcular potências de números complexos em geral.

16. Efetue
a. $(2 + 3i)^2$ b. $(2 + 3i)^3$ c. $(1 – i)^3$

17. Agora que você já sabe como efetuar multiplicações, divisões e potenciações, efetue as operações solicitadas:
a) z . w, sendo que z = -1 + i; w = 3 + 5i
b) z : w, sendo que z = 5 + 4i; w = -i
c) z . w, sendo que z = 2 + 2i; w = 2 - 2i
d) z^3, sendo que z = 3 – i

Nessas aulas você pôde trabalhar com as operações elementares entres os números complexos. Então agora teremos a próxima tarefa.

Tarefa
Forme um grupo de 5 alunos e crie um jogo (memória, dominó, bingo, trilha) onde poderemos aplicar os conceitos que já aprendemos sobre números complexos. Traga o trabalho pronto na próxima semana. (O professor deverá orientar os alunos na confecção dos jogos)

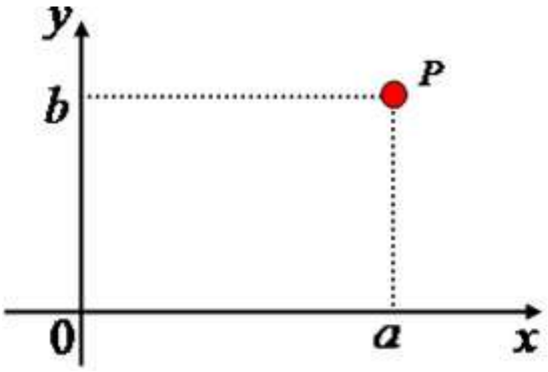
7ª aula
Uso dos jogos

8ª e 9ª aulas

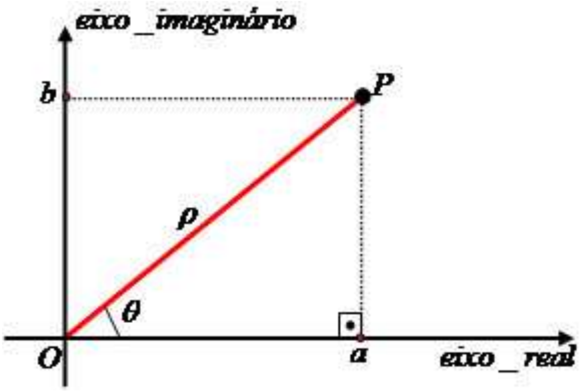
Representação geométrica de um Número Complexo

A representação geométrica de um número complexo fez com que os matemáticos se sentissem muito mais à vontade, pois esses números agora podiam ser efetivamente visualizados. Ver é crer, e ideias anteriores sobre a não existência e o caráter fictício dos números imaginários foram abandonadas.

Já vimos que um número complexo z pode ser escrito como um par ordenado **z = (a, b)**, e na forma algébrica **z = a + bi**, como a e b Є R.
Assim a cada número complexo ***z = a + bi***, podemos associar um ponto P no plano cartesiano. Atualmente, o plano dos números complexos é conhecido como plano de Argand-Gauss. No complexo representamos a parte real por um ponto no eixo das abscissas chamado **eixo real**, e a parte imaginária por um ponto no eixo das ordenadas, denominado **eixo imaginário**.
A este ponto P, correspondente ao complexo ***z = a +bi***, chamamos de imagem ou afixo de z. Observe a representação da interpretação geométrica dos números complexos:



Também podemos associar cada número complexo z = a + bi a um único vetor, com uma das extremidades na origem do plano e a outra no ponto P(a, b). Lembre que o vetor é um seguimento de reta que possui direção, sentido e comprimento, e é muito utilizado em Física.



Com base no plano representado podemos calcular a distância ρ (letra grega: rô), entre os pontos O e P. Observe que basta aplicarmos o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo, dessa forma temos:

$$\rho^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

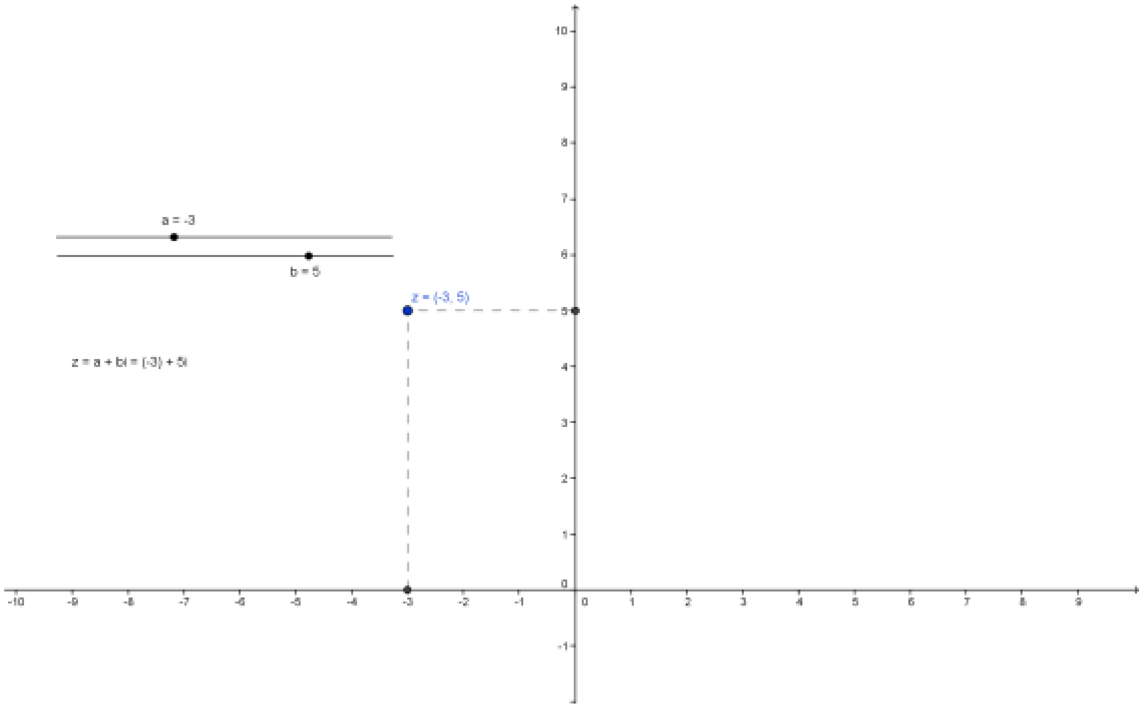
Essa distância é denominada módulo de um número complexo.

Tarefa
Pesquise sobre aplicações práticas dos Números Complexos. Traga na próxima aula.

Um aplicação dos números complexos aparece nas conexões que podem ser feitas entre as operações e as transformações geométricas no plano.
É possível explorar aspectos gráficos relacionados aos números complexos, uma vez que as operações com esses números estão relacionadas a rotações, translações, simetrias, ampliações e reduções no plano de Argand-Gauss.

Vamos então ver como isso acontece.

Atividade com o Geogebra
Abra o programa. Você deve estar vendo uma tela como a seguinte.



Para começar, você deve mover os parâmetros a e b e observar o que acontece com o ponto z.
Atividade 1:
Responda:
É possível que mais de um número complexo esteja representado por um mesmo ponto? Por quê?

É possível que mais de um ponto represente o mesmo número complexo? Troque ideias com seus colegas e justifique sua resposta.

Agora, encontre os pontos no plano cujos números complexos obedecem às seguintes propriedades:
a) Tem parte real igual a zero;
b) Tem parte imaginária igual a zero;
c) Tem parte real igual à parte imaginária;
d) A parte imaginária é igual ao dobro da parte real mais três unidades.
e) A parte real é 4 e a parte imaginária é -2.
f) Localize um ponto no plano e peça para um colega indicar o numero complexo que ele representa.
g) Escreva um número complexo e peça para um colega representá-lo no plano.

As operações com os números complexos também podem ser interpretadas geometricamente. Acompanhe as atividades.

Atividade 2:

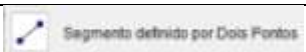
Represente um número complexo z qualquer no geogebra.
a) Construa o conjugado de z. Descreva qual é graficamente, a relação que existe entre z e seu conjugado.

b) Construa o oposto de z, ou seja –z. Descreva qual é graficamente, a relação que existe entre z e seu oposto.

Cole abaixo sua construção no geogebra (faça print screen da tela e cole, depois faça o recorte da imagem usando recursos do Word).

Atividade 3

Abra um novo arquivo no programa Geogebra
a) Digite na “entrada” o número complexo z =2+3i e clique “enter”. Digite w =4+i e “enter”. Mexa os pontos, observe o que acontece na janela de álgebra e descreva sua observação no quadro abaixo

b) Clique na terceira ferramenta e selecione 

. Clique sobre a origem e sobre o ponto z. Depois sobre a origem e o ponto w.
c) Na entrada digite: s=z+w e enter. Faça novamente o segmento da origem até s, depois faça segmentos sz e sw. Mexa nos pontos azuis z e w, observe os números na janela de álgebra e escreva abaixo o que você pode concluir a respeito das coordenadas das extremidades dos segmentos que representam z + w. Como você chegou a essa conclusão?

d) Crie outros números complexos e faça subtrações. O que podemos observar sobre a subtração?

e) Cole abaixo sua construção.

Atividade 4

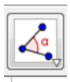
Abra um outro arquivo no geogebra.

a) Digite na entrada z=-5+3i, “enter” e faça o segmento da origem a z.
Digite z*(1.2) que significa z multiplicado pelo número 1,2, e “enter”. Repita o procedimento para z*(1.5) z*(2) z/2 z/3
Escreva o que você observa:

b) Cole abaixo sua construção.

Atividade 5: Abra um novo arquivo.

a) Digite na entrada um número complexo z de sua preferência e faça o segmento até a origem. Faça uma multiplicação por i, digitando z*i.

Faça o segmento da origem até este número. Use a ferramenta ‘ângulo’  para determinar o ângulo entre os dois segmentos. O que você observa em relação às coordenadas, ao tamanho do segmento e ao ângulo entre os segmentos?

a1) Digite outro número complexo e percorra as mesmas etapas do item anterior. Escreva o que você observa em relação às coordenadas, ao tamanho do segmento e ao ângulo entre os segmentos?

Note que graficamente o produto z*i corresponde a uma rotação do vetor que representa o complexo z de um ângulo de 90° em torno da origem do plano.
Nesta maneira de encarar, o antes problemático i nada mais é do que o ponto (0, 1), ou o vetor definido pela seta que vai da origem a este ponto, ou ainda, o unitário que tem argumento P = 90º. (Figura1)
Por este motivo, multiplicar um complexo por i² é girá-lo duas vezes de um ângulo reto positivo, o que equivale a girá-lo de meia volta, obtendo -z, ou seja, o simétrico de z em relação à origem, o mesmo que seria obtido se multiplicássemos z por -1. (Figura2)

Figura 1

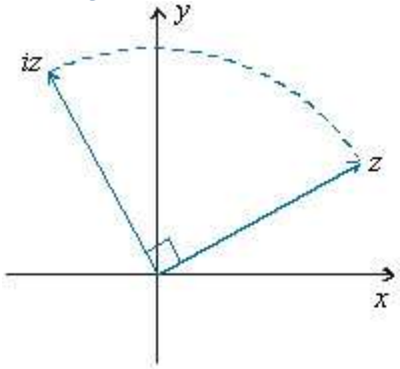
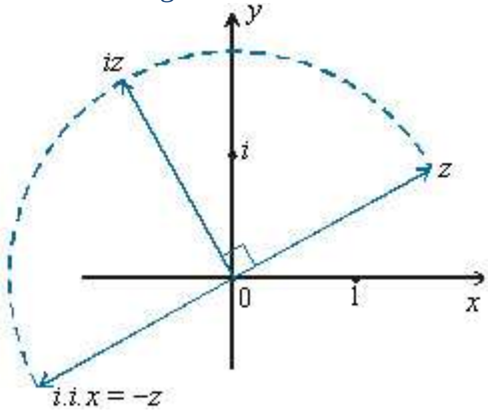


Figura 2



Agora, fica claro que i² = -1, longe de ser uma monstruosidade incompreensível, traduz apenas um fato geométrico bastante simples: aplicar duas vezes uma rotação de 90º em torno da origem é o mesmo que efetuar uma simetria de centro na origem (ou uma reflexão em torno da origem).

Continuando...
b) Efetue graficamente, no Geogebra, a multiplicação de um complexo z qualquer por i², sem usar o “Campo de entrada”.

c) Faça z/i. O que acontece?

d) Faça z*(2i) . O que você observa.

e) Cole abaixo sua construção.

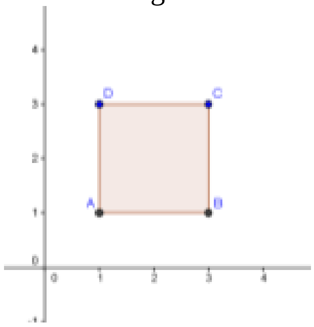
Atividade 6: Abra novo arquivo.

a) Digite na entrada dois números complexos na forma z=a+bi de sua escolha, com a e b diferentes de zero. Digite na entrada a multiplicação entre eles e observe as coordenadas do resultado. Escreva abaixo os números que você escolheu e o resultado:

b) Calcule esta multiplicação através da propriedade distributiva no quadro abaixo e compare com o resultado do computador.

Atividade 7:

Considere, no plano complexo o quadrado de vértices A = 1 + i, B = 3+ i, C = 3 + 3i e D = 1 + 3i. Sobre cada ponto dessa região quadrangular será aplicada a função f:R →C, dada por f(z) = z+ (4+i).
Obtenha a região resultante após a aplicação dessa operação. Faça isso utilizando o papel quadriculado.



Atividade 8

Construa uma região qualquer no plano complexo e obtenha, no Geogebra, as regiões que resultam da aplicação das funções f, indicadas a seguir, sobre todos os pontos da região que você construiu.
1. f(z) = 2z + i
2. f(z) = -z
3. f(z) = i.z
4. f(z) = z + 1 – i
Cole cada construção feita.

10ª aula
Agora acesse o link: http://www.dimensions-math.org/Dim_CH5_PT.htm
E veja como a matemática com a ajuda dos números complexos pode ser ilustrada de uma maneira tão bonita.

Escreva abaixo uma reflexão sobre o que você aprendeu nesta aula.

Todas as atividades deverão ser mediadas pelo professor ajudando o aluno a ter um bom entendimento dos conceitos abordados.

11ª e 12ª aulas

Atividade avaliativa

1. Cite uma aplicação dos números complexos.

2. Escolha a alternativa que você julgar correta:
a. (   ) Os números complexos surgiram quando um matemático, resolvendo uma equação polinomial de 2º grau, encontrou um discriminante $\Delta < 0$.
b. (   ) Os números complexos foram descobertos quando um matemático tentava resolver uma equação polinomial de grau três.

3. Assinale os nomes abaixo, aqueles que você associaria com a história dos números complexos.
(   ) Wallis   (   ) Bombelli   (   ) Argand   (   ) Wessel   (   ) Gauss

4. Considerando os números complexos $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - i$ e $z_3 = -1 + 3i$, calcule:
a) $z_1 + z_2 + z_3$

b) $z_1 – z_2$

c) $z_2 \, . \, z_3$

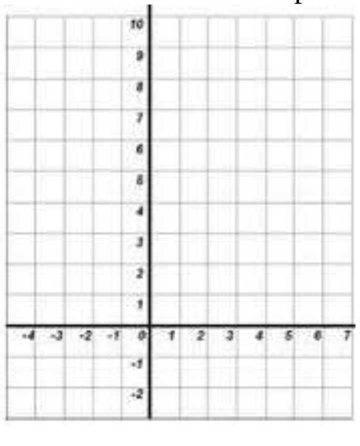
d) z_1^2

e) $z_3 : z_1$

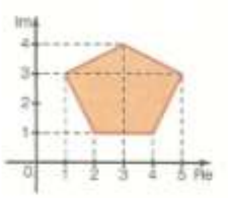
5. O ponto que representa o número complexo z pertence ao 3º quadrante do plano complexo. Ao multiplicarmos este número por i (a unidade imaginária), a imagem de z pertencerá:
(   ) ao 1º quadrante   (   ) ao 2º quadrante   (   ) ao eixo imaginário   (   ) 4º quadrante

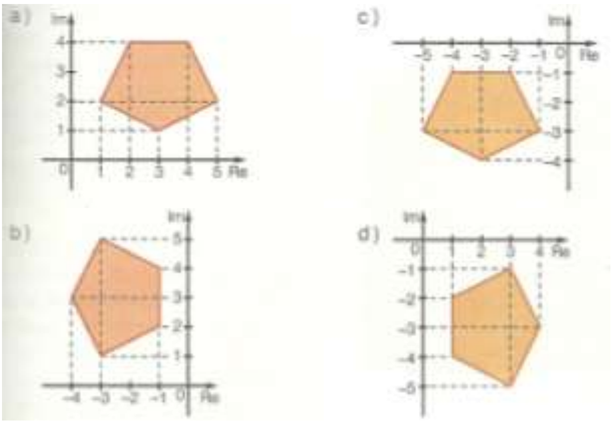
6. Se um ponto que representa um número complexo, está localizado no primeiro quadrante, então o ponto que representa seu conjugado está no:
(   ) 1º quadrante   (   ) 2º quadrante   (   ) 3º quadrante   (   ) 4º quadrante

7. Considere a região triangular do plano complexo cujos vértices são os pontos (1,1), (3,1) e (1,3). Utilize os quadriculados abaixo para representar essa região e o resultado da transformação que adiciona o número complexo 4 + 3i a cada ponto da região.



8. Os números complexos correspondentes aos pontos da região pentagonal ao lado foram multiplicados por i^2. Qual das alternativas apresenta a figura composta pelos pontos correspondentes aos números complexos obtidos nessa operação?





9. Um viajante árabe caminhando por uma estrada encontrou um baú com várias moedas antigas, calculando serem de muito valor resolveu escondê-las, para recuperá-las quando voltasse de sua viagem. Então tomando uma árvore como referência deu um passo na direção oeste e um passo na direção norte, marcando o ponto que chamou de (1,1). A partir desse ponto mediu o número de passos até outro ponto onde enterrou o baú. Em seguida, dobrou, segundo um ângulo de 90° à esquerda e caminhou o mesmo número de passos até alcançar um ponto que chamou de (3,4), pois percebeu que da árvore até esse ponto era uma distância de três passos na direção oeste e quatro passos na direção norte.
Nosso desafio é descobrir em que ponto o viajante enterrou o tesouro.
Tomando como ponto inicial a árvore e seguindo a notação do viajante, indique qual das alternativas abaixo é a correta?
a) (3,5 , 1,5)
b) (0,5 , 3,5)
c) (3 , 1)
d) (1,5 , 3,5)

Avaliação

Realizada ao longo das aulas. Critérios- desenvolvimento e realização das atividades, participação, raciocínio adequado, realizar corretamente as operações com números complexos na forma algébrica, reconhecer as operações entre números complexos como transformações no plano, resolver exercícios envolvendo aplicações do assunto.

Descritores:

H36- Efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica.

Bibliografia Consultada:

SOUZA, Joamir Roberto de. Novo Olhar Matemática. 1.ed. São Paulo: FTD, 2010. (Coleção Novo Olhar; v.2)

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações- v.2. 1.ed. São Paulo: Ática, 2010.

PAIVA, Manoel. Matemática I. 1.ed. São Paulo: Moderna, 2009.

PUC/SP
< http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/carlos_nely_oliveira.pdf>Acessado em: 03 set. 2012

Universidade de Lisboa
< http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euler/complexoshistoria> Acessado em: 03 set. 2012

Portal do Professor
<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=2637> Acessado em: 03 set. 2012

Brasil Escola
< http://www.brasilescola.com/matematica/numeros-complexos.htm> Acessado em: 03 set. 2012

Dimensions
<http://www.dimensions-math.org/Dim_CH5_PT.htm > Acessado em: 03 set. 2012

Projeto Seeduc/Cecierj
< http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=15> Acessado em: 03 set. 2012