Reforço escolar · Matemática ·

O DNA das equações algébricas

Dinâmica 3

3º Série | 4º Bimestre

Professor

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	3ª do Ensino Médio	Algébrico-Simbólico	Polinômios e Equações Algébricas.

DINÂMICA	O DNA das equações algébricas.
HABILIDADE BÁSICA	Efetuar cálculos com polinômios.
HABILIDADE PRINCIPAL	Resolver problemas envolvendo operações com polinômios.
CURRÍCULO MÍNIMO	Resolver equações polinomiais utilizando o teorema fundamental da Álgebra e o Teorema da Decomposição.

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Fundação CECIERJ Consórcio cederj

Professor, nesta dinâmica você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos.

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar ideias.	O avô de Júlia e o trinômio do 2º grau.	15 a 20 min.	Em duplas, com encerramento coletivo.	Individual
2	Um novo olhar...	Afinal, os complexos complicam ou simplificam?	25 a 35 min.	Atividades em duplas e discussão coletiva.	Individual
3	Fique por dentro!	A sequência... das raízes.	15 a 20 min.	Atividades em duplas e discussão coletiva.	Individual
4	Quiz.	Quiz.	10 min	Individual.	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz.	Análise das respostas ao Quiz.	15 min	Coletiva.	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor se tiver dúvidas.			

Apresentação

Não, não se trata de decifrar os genes das equações algébricas, mesmo porque equações não têm genes, mas... têm raízes. O Teorema Fundamental da Álgebra e o Teorema da Composição permitem escrever um polinômio como um produto que expõe todas as raízes da equação que ele gera. Para isso, porém, é preciso considerar suas raízes complexas. Esta dinâmica se propõe a apresentar estes resultados, partindo de uma equação do 2º grau, já bem conhecida de nossos estudantes. É bem verdade que, ainda em analogia com o DNA dos seres vivos, essas raízes só são conhecidas em casos particulares. Os teoremas citados, porém, são válidos para todos os polinômios.

Como sempre, você dispõe de certa margem no tempo de aplicação das atividades para melhor adaptação à sua turma.

Primeira Etapa
Compartilhar ideias

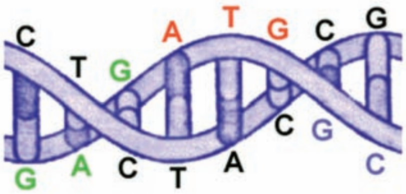
Atividade • O avô de Júlia e o trinômio do 2º grau.

Objetivo

Decompor o trinômio do 2º grau.

Descrição da atividade:

Na resolução de uma questão (ligeiramente simplificada) da OBMEP (Olimpíadas de Matemática das Escolas Públicas), surge uma equação do 2º grau, que será usada para ilustrar a decomposição em fatores do 1º grau do trinômio do 2º grau.



Ao buscar a resposta a esta questão, o aluno vai resolver uma equação do 2º grau. Vamos trabalhar depois um pouco mais com ela e com equações de grau mais alto.

Questão 1 (OBMEP, prova da 1ª fase do Nível 3, do ano de 2006, ligeiramente simplificada.)

Júlia perguntou ao seu avô: Em que ano você nasceu? E ele respondeu: “Nasci no ano x^2 e completei x anos em 1980.” Em que ano nasceu o avô de Júlia?

a. Comece por fazer a tradução da linguagem corrente para uma linguagem algébrica que lhe permita resolver o problema.

Resposta

LINGUAGEM CORRENTE	LINGUAGEM ALGÉBRICA
“Nasci no ano x^2”, então a idade do avô em 1980 é	$1980 - x^2$
“e completei x anos em 1980”, então a idade do avô em 1980 é	x
A equação será, então,	$1980 - x^2 = x$
Ou, na forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a = 1$, é	$x^2 + x - 1980 = 0$

Matemática

b. Resolva a equação encontrada, sabendo que $\sqrt{7921} = 89$:

Resposta

Aplicando a fórmula, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$*, obtém-se:*

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \times 1 \times 1980}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7921}}{2} = \frac{-1 \pm 89}{2}\text{, donde:}$$

$$x^1 = \frac{-1+89}{2} = \frac{88}{2} = 44 \quad e \quad x^2 = \frac{-1-89}{2} = -\frac{90}{2} = -45$$

E, como x é uma idade, em 1980, o avô de Júlia completou 44 anos, tendo nascido, portanto, no ano 1980 – 44 = 1936, que poderia ter sido calculado também como 442.

• • • • •

c. Você achou as 2 raízes da equação do 2º grau.

Você vai agora juntar alguns resultados que você já viu. A partir deles, você vai poder escrever o primeiro membro da equação que você resolveu como produto de dois binômios do 1º grau.

Complete, com as palavras disponíveis a seguir, os resultados que você já conhece:

Resposta

Teorema do Resto

O Resto da *divisão* de um polinômio P(x) por x – a é *P(a)*.

Consequência

Se P(a) = 0, então, P(x) = Q(x)(x – a), onde Q(x) é um *polinômio* e o grau de Q é igual ao *grau* de P menos 1.

Por outro lado, se P(x) = Q(x)(x – a), *então*, P(a) = 0.

grau	multiplicação	P(x)	P(a)	Q(a)
então	polinômio	divisão	zero	nunca

Professor

• • • • •

d. Agora chame de P(x) o 1º membro da equação que você encontrou na resolução da questão anterior e complete:

Resposta

$P(x) = x^2 + x - 1980$; $P(44) = 0$, então, $P(x) = Q(x)\,(x - 44)$ e

o grau de $Q(x) = 1$.

Mas $P(-45) = (-45)^2 + (-45) - 180 = 2025 - 45 - 1980 = 0$

Então, P(x) também é *divisível* por (x + 45).

Confira, então, quanto vale o produto de (x – 44) por (x + 45):

Resposta

	x	– 44	
×	x	+ 45	
	x^2	$-44x$	
+		$+45x$	-1980
	x^2	$+x$	-1980

Você chegou, então, a uma fatoração do trinômio do 2º grau em binômios do 1º grau:

Resposta

$x^2 + x - 1980 = (x - 44)\,.\,(x + 45)$

Questão 2

Júlia gostou da brincadeira. Chegou, mais tarde, ao seu pai e perguntou: “Papai, me dê uma equação cuja solução seja a sua idade e vou descobrir quantos anos você tem.” E o pai respondeu: “Minha idade é solução da equação $(x-40)(x+42)=0$, quantos anos eu tenho?”

Júlia encontrou no mesmo instante qual era a idade do pai. Explique como Júlia pôde achar tão depressa a solução desta equação do 2º grau.

Resposta

Ora, o polinômio do 2º grau $(x-40)(x+42)$ só pode se anular se pelo menos um dos fatores se anular. Mas $x-40=0$ só se $x=40$ e $x+42=0$ só se $x=-42$, então, a única solução positiva da equação dada pelo pai da Júlia era $x=40$.

• • • • •

Você viu como é fácil resolver equações $P(x)=0$ quando $P(x)$ é um polinômio escrito como produto de binômios da forma $x-a$?

Mas... será isso sempre possível?

Recursos necessários:

- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

- *Estas questões foram propostas para trabalho em duplas, pois a conversa entre dois estudantes é mais convergente. As questões são fáceis, mas exigem raciocínio. O trabalho em dupla, com um trio se o número de alunos em sala for ímpar, permite maior concentração nos raciocínios abstratos.*
- *Espera-se que, no encerramento coletivo da etapa, os alunos possam confirmar seus argumentos.*

• • • • •

Professor/a,

- *A simplificação que foi feita na Questão 1, em relação à original que caiu na OBMEP, é que lá se pedia a idade do avô no ano da prova, que foi 2006. Além disso, não foi dado o valor da raiz quadrada de 7921. Na solução fornecida pelo site da OBMEP,* **www.obmep.org.br**, *encontra-se a seguinte observação sobre esse cálculo: Comentário: Um modo rápido de calcular $\sqrt{7921}$ é notar que $90^2 = 8100$. Daí segue que $\sqrt{7921}$ é um número próximo de e menor que 90, terminado em 1 ou 9. Os candidatos naturais são 81 e 89, e verifica-se imediatamente que $89^2 = 7921$.*

  No momento, o foco da dinâmica é outro e não havia necessidade de os alunos gastarem tempo com esse cálculo. É interessante, porém, que eles conheçam artifícios dos quais possam lançar mão numa ocasião em que não disponham da calculadora. Outro artifício que permite calcular 89^2 "de cabeça" é: $89^2 = (90 - 1)^2 = 90^2 - 2 \times 90 \times 1 + 1^2 = 8100 - 180 + 1 = 7920 + 1 = 7921$.

- *O resultado importante desta etapa é que se são conhecidas todas as raízes de uma equação algébrica, $P(x) = 0$, é possível escrever o polinômio $P(x)$ como produto de fatores do tipo $(x - a)$ vezes o coeficiente do termo de grau mais alto (no caso do exemplo dado aqui, esse coeficiente era $a = 1$). E que, reciprocamente, dada uma equação algébrica em que o polinômio do 1º membro seja dado como produtos de um número por binômios do tipo $x - a$, então, são conhecidas todas as suas raízes.*

• • • • •

Segunda Etapa
Um novo olhar...

35 MINUTOS

Atividade • Afinal, os complexos complicam ou simplificam?

Objetivo

Apresentar o Teorema Fundamental da Álgebra e o Teorema da Decomposição.

Descrição da atividade:

Nesta etapa, o aluno vai estender o resultado que ele viu para a equação do 2º grau a uma equação algébrica de grau $n \geq 1$ qualquer. Para isso, além de considerar um grau $n \geq 1$ qualquer, ele vai ter que considerar também as raízes complexas. As atividades propostas são um passo a passo nessa direção.

Você sabia que o resultado que você conheceu na primeira etapa vale para qualquer equação algébrica de grau n ≥ 1? Para isso, você vai ter que fazer alguns ajustes. Comece por um exemplo de equação do 3º grau.

Questão 1

Sabendo que x = 1 é solução da equação $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = 0$, encontre as outras soluções, se existirem.

Resposta

Ora, sabendo que x = 1 é solução da equação dada, o Teorema do Resto garante que seu primeiro membro é divisível por x – 1. E o quociente dessa divisão deve ser um polinômio de grau 2. Procurar suas raízes será, então, resolver uma equação do 2º grau, o que já se sabe fazer. Logo, o que interessa é dividir o polinômio do 3º grau por x – 1, o que pode ser feito pelo Dispositivo de Briot-Ruffini:

1	1	– 5	9	–
	1	– 4	5	0

O resto é 0, como era de se esperar, e o quociente é o trinômio do 2º grau:

$$x^2 - 4x + 5.$$

As demais soluções da equação dada serão, portanto, as soluções da equação do 2º grau: x2 – 4 x + 5 = 0, que se resolve, por exemplo, pela aplicação da fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.\ \text{Obtém-se, então: } x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2},$$

com discriminante negativo igual a – 4, cuja raiz quadrada é o número imaginário 2i, o que significa que as soluções são complexas:

$$x_1 = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i \quad e \quad x_2 = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i.$$

As soluções dessa equação são, portanto: 1, 2 + i e 2 – i. Uma solução é real e as outras duas são complexas.

• • • • •

Você encontrou soluções complexas. Como as quatro operações entre números complexos satisfazem às mesmas condições que satisfazem entre números reais, o Teorema do Resto é válido também para polinômios nos números complexos. Podem ser complexos a variável, os coeficientes e as raízes. Não se esqueça de que os números reais são também complexos.

Você acaba de resolver uma equação do 3º grau e encontrou 3 soluções. Será que isso é sempre assim? Toda equação algébrica tem solução? E, se for do grau n, será que ela terá n soluções?

Para responder a essas questões, você vai relembrar alguns resultados que serão necessários quando se trabalha com polinômios nos números complexos e vai conhecer um teorema importante, talvez novo para você, mas vai usá-lo mesmo sem ver sua demonstração.

Esse é o resultado mais importante neste contexto e que, por isso, é chamado de **Teorema Fundamental da Álgebra**.

Ele diz o seguinte:

Toda equação polinomial P(x)=0, de grau ≥1, tem, pelo menos, uma raiz complexa.

Observe que esse polinômio pode ser real ou complexo, isto é, os coeficientes são complexos quaisquer e podem, portanto, ser todos reais. Mas, mesmo quando os coeficientes são todos reais, a raiz pode não ser real. O teorema garante a existência de uma raiz complexa, que pode, portanto, ser real ou não.

Juntando esse teorema com o Teorema do Resto, que diz que, se a é uma raiz (real ou mesmo complexa), então o polinômio P(x) é divisível por (x – a), e repetindo esse procedimento com o quociente de P(x) por (x – a) você vai chegar ao seguinte resultado.

O polinômio P(x) de grau n, com n ≥ 1 e coeficiente a_n, de x^n, pode ser escrito como o produto de n binômios:

$$P(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n),$$

onde os números $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ e x_n são complexos.

Esse resultado recebe o nome de **Teorema da Decomposição** e, é claro, os números $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ e x_n são raízes da equação P(x) = 0.

Observe que, mesmo que os coeficientes de P(x) sejam todos reais, algumas ou todas as raízes de P(x) = 0 podem ter parte imaginária não nula.

Questão 2

Escreva o polinômio $P(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 5$ como produto de binômios do 1º grau.

Resposta

Como 1, 2 + i e 2 – i são zeros desse polinômio e o termo de grau 3 tem coeficiente 1, pode-se escrever:

$P(x) = (x - 1)(x - 2 - i)(x - 2 + i).$

E, se você não acreditar, pode verificar, fazendo os produtos:

×	x	-2	$-i$		
	x	-2	$+i$		
+	x^2	$-2x$	$-xi$		
		$-2x$		$+2i$	$+4$
			xi	$-2i$	$+1$
	x^2	$-4x$	$+0$	$+0$	$+5$

Observando que $(x - 2 - i)(x - 2 + i) = [(x - 2) + i][(x - 2) - i)]$, esse produto pode também ser calculado como produto notável $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, obtendo-se diretamente:

$(x - 2 - i)(x - 2 + i) = [(x - 2) + i][(x - 2) - i)] = (x - 2)^2 - i^2 =$

$= x^2 - 4x + 4 - (-1) = x^2 - 4x + 5$

×	x^2	$-4x$	$+5$	
		x	-1	
+	x^3	$-4x^2$	$+5x$	
		$-x^2$	$+4x$	-5
	x^3	$-5x^2$	$+9x$	-5

• • • • •

Voltando ao Teorema da Decomposição, em

$\mathbf{P(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n)},$

os números complexos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ e x_n podem não ser n números distintos. Se algum desses números se repete um número d de vezes, d se diz a **multiplicidade dessa raiz**.

Professor

E esse é mais um fato que se conclui do Teorema da Decomposição: uma equação polinomial nos números complexos de grau n, com $n \geq 1$, tem n raízes complexas, se contadas com suas multiplicidades.

Recursos necessários:

- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

- *Esta etapa tem alguns resultados que são contados aos estudantes, sem que a prova esteja ao alcance desse nível de estudo. A ideia será, portanto, fazer uma discussão coletiva, mas é importante que os cálculos sejam feitos nas duplas, com registro individual. Em geral, poucos alunos acompanham cálculos feitos coletivamente ou na lousa. O trabalho em duplas nessas circunstâncias pode ser bem mais efetivo.*
- *Já a leitura e interpretação dos teoremas enunciados podem ter melhor efeito se forem feitas entre todos, com discussão sobre o significado dos termos envolvidos.*

• • • • •

Intervenção Pedagógica

Professor/a,

- *O Teorema Fundamental da Álgebra é um resultado importante e simples de ser compreendido, mas cuja demonstração não cabe nos programas do ensino médio. Além disso, ainda que a equação seja toda no campo real, algumas de suas soluções podem sair deste campo com parte imaginária não nula. Daí, a necessidade de introduzir os números complexos no estudo das equações algébricas, ainda que seus coeficientes sejam todos reais.*
- *Os resultados estudados até aqui podem ser resumidos no seguinte fato: se P(x) é um polinômio no campo complexo, de grau $n \geq 1$, existem r números complexos, distintos entre si, $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_{r-1}, x_r$ e r números naturais não nulos, $d_1, d_2, d_3, \ldots\ldots, d_{r-1}, d_r$ tais que:*

  $P(x) = a_n (x - x_1)^{d_1} (x - x_2)^{d_2} (x - x_3)^{d_3} \ldots\ldots (x - x_{r-1})^{d_{r-1}} (x - x_r)^{d_r}$,

  onde a_n é o coeficiente de x^n em P(x).

  Os números complexos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{r-1}, x_r$ são as raízes da equação algébrica

  $P(x) = 0$, com multiplicidades $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_{r-1}, d_r$, respectivamente. De modo que

  $d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_{r-1} + d_r = n$.

E mais, se os coeficientes de P(x) são todos reais e se algum dos x_i é complexo com parte imaginária não nula, então o seu conjugado, $\overline{x_i}$, é alguma das outras raízes x_j e a multiplicidade das duas é a mesma, isto é $d_i = d_j$.

Esse é o resumo que interessa ao estudante do que está sendo visto, mas a linguagem assim tão geral pode ser muito abstrata ou mesmo muito complicada para ele. Seu papel nesta explicação é de suma importância. O exemplo da próxima etapa vai usar esse resultado num caso particular.

Terceira Etapa

Fique por dentro!

Professor

Atividade • A sequência... das raízes.

Objetivo

Resolver uma equação algébrica utilizando os resultados vistos nas etapas anteriores.

Descrição da atividade:

Todos os resultados vistos até aqui têm sua importância na resolução de equações algébricas. Nesta etapa, o aluno vai resolver uma equação algébrica do 6º grau a partir da informação de uma só delas. Conhecida essa, as outras vão sendo encontradas.

Questão

Encontre todas as raízes da equação

$x^6 - 2x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 36x^2 + 72x = 0$,

sabendo que x = 2 é uma delas.

Observação: Não se deixe impressionar pela tarefa que parece tão difícil. Você já sabe uma das raízes e pode ver a outra com facilidade. Como não há termo independente (sem o x), todos os termos estão multiplicados por x, então x = 0 é uma solução e você pode já dividir o polinômio P(x) do 1º membro por (x – 0) = x. Comece por aí e, depois, divida o quociente obtido por x – 2.

A partir daí, o leme é todo seu! Ao mar! Quer um salva-vidas? A raiz quadrada de 169 é 13.

$P(x) = x^6 - 2x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 36x^2 + 72x = x\,(x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 36x + 72).$

As outras soluções são zeros do polinômio $x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 36x + 72$. Para dividir esse polinômio por $x - 2$, pode-se usar o dispositivo de Briot-Ruffini:

2	1	− 2	− 5	+ 10	− 36	+ 72
	1	0	− 5	0	− 36	0

Como era de se esperar, o resto é 0 e o quociente é: $x^4 - 5x^2 - 36$, e as outras raízes serão as raízes da equação:

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0,$$

que é uma equação biquadrada. Para resolvê-la, vamos fazer a substituição $y = x^2$, o que vai dar a equação do 2º grau, em y:

$$y^2 - 5y - 36 = 0.$$

Esta se resolve, por exemplo, pela aplicação da fórmula, com $a = 1$, $b = -5$ e $c = -36$:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times (-36)}}{2 \times 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2},$$

então

$$y_1 = \frac{5 + 13}{2} = 9 \;\; e \;\; \frac{5 - 13}{2} = -4.$$

Mas $y = x^2$, então, $x = \pm\sqrt{y}$, ou seja:

$$x_3 = \sqrt{9} = 3 \;;\; x_4 = -\sqrt{9} = -3 \;;\; x_5 = \sqrt{(-4)} = 2i \;\; e \;\; ;\; x_6 = -\sqrt{(-4)} = -2i.$$

E a resposta final é que as 6 soluções da equação:

$x^6 - 2x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 36x^2 + 72x = 0$

são:

0, 2, 3, – 3, 2i e – 2i.

Viu como você conseguiu? E bastou resolver uma equação do 2º grau!

Recursos necessários:

- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

- *Aqui, os alunos continuam trabalhando em duplas, mas o acompanhamento precisa ser muito frequente. A sugestão para começar pela divisão por x está no enunciado, mas talvez eles não se sintam à vontade para fazer essa divisão.*
- *O reconhecimento da equação biquadrada talvez seja também muito remoto para eles, assunto estudado no 9º ano. Já a aplicação da fórmula para a resolução da equação do 2º grau não deve causar dificuldades.*

Intervenção Pedagógica

Professor/a,

- *Este é o fechamento de todo o trabalho com o Teorema do Resto, o Teorema Fundamental da Álgebra, o Teorema da Decomposição e a introdução dos números complexos. Todos esses assuntos são novos para os alunos, em geral, e os prazos para amadurecimento são muito curtos. Fica, portanto, ao seu cargo, o apontamento da aplicação de cada um dos resultados. Por outro lado, esse amadurecimento virá mais rapidamente se o aluno tentar decidir o resultado que deve aplicar a cada passo. Veja como é importante a administração do quanto você pode deixar as duplas discutindo entre si e quando deve intervir e chamar a atenção do aluno para o resultado que se aplica àquela questão. Claro que a intervenção junto a cada dupla é a melhor prática, mas se o número de duplas for muito grande essa intervenção terá que ser feita coletivamente, no grupo maior.*
- *Na divisão por x, talvez o aluno não tenha a iniciativa de fatorar, mas pode querer usar o dispositivo de Briot-Ruffini com a = 0. Se houver tempo, será bom deixar que ele use o dispositivo e, depois, perceba que o resultado foi simplesmente abaixar um grau em cada termo, o que corresponde à divisão por x.*
- *Vale a pena chamar a atenção do aluno para o fato de que as raízes complexas comparecem num par, pois essa é uma equação algébrica com coeficientes reais. Estudo mais geral dessa situação está disponível na Etapa Flex, no Encarte do Professor.*

Quarta Etapa
Quiz

10 MINUTOS

Questão (FUVEST – Vestibular da USP, adaptada.)

As três raízes de $2(x^3 + 2) = x(x + 8)$ são p, q e 2, com $p > q$. O valor de $2p + q^2$ é

a. $-\frac{15}{4}$

b. -3

c. –

d. -1

e. 5

Quinta Etapa
Análise das Respostas ao Quiz

15 MINUTOS

Resposta

Escrevendo a equação na forma de um polinômio igualado a 0, obtém-se:

$2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$

que tem 2 como raiz. Logo, o polinômio do 1º membro é divisível por 2. Fazendo a divisão pelo dispositivo de Briot-Ruffini:

2	2	− 1	− 8	+ 4
	2	3	− 2	0

Então, o quociente é $2x^2 + 3x - 2$ e p e q são raízes da equação: $2x^2 + 3x - 2 = 0$, que podem ser calculadas pela fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times (-2)}}{2 \times 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4}, \text{ donde:}$$

$$p = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad e \quad q = \frac{-3-5}{4} = -\frac{8}{4} = -2$$

Donde $2p + q^2 = 2 \times \frac{1}{2} + (-2)^2 = 1 + 4 = 5$ *e* **a opção correta é (e)**.

Possíveis erros:

A opção (a) é a resposta do aluno que trocou as raízes por não ter atendido à observação de que $p > q$ e calculou $2q + p^2$.

A opção (b) seria escolhida pelo aluno que considerou $2p - q^2$ por ter errado o sinal do quadrado.

A opção (c) será escolhida pelo aluno que calculou a soma das raízes $p + q$.

A opção (d) seria escolhida pelo aluno que calculou $2p + q$.

Etapa Flex

Para saber +

1. Se a equação algébrica tiver só coeficientes reais, mas tiver alguma raiz complexa, como aconteceu nos exemplos estudados na Terceira Etapa, é possível concluir que o conjugado dessa raiz é também raiz da equação dada.

   Com efeito, se $z = a + bi$, com a e b números reais, o conjugado de z será o número complexo

   $$\bar{z} = a - bi$$

   Podemos, então, verificar algumas propriedades desse conjugado:

   Se $w = c + di$, com c, d reais, então

   $$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\,i$$

   e

   $$\bar{z} + \bar{w} = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)\,i$$

   isto é:

   $$\boxed{\bar{z} + \bar{w} = \overline{z + w}}$$

   E, analogamente, para o produto:

   $$z \times w = (a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$$

   e

   $$\bar{z} \times \bar{w} = (a - bi) \times (c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)\,i$$

   isto é:

   $$\boxed{\bar{z} \times \bar{w} = \overline{z \times w}}$$

Professor

Em particular:

$$\bar{z}^2 = \overline{z^2}$$

Ora, para n natural, n ≥ 2, tem-se que:

$z^n = z \times z^{n-1}$ e $\bar{z}^n = \bar{z} \times \bar{z}^{n-1}$,

então:

$\bar{z}^n = \overline{z^n}$ para qualquer n natural.

Pela definição de conjugado, também é possível ver que, se x é um número real (então é complexo também), seu conjugado é ele mesmo (porque a parte imaginária, que trocaria de sinal, é 0).

Esses resultados levam à conclusão que, se a equação algébrica P(x) = 0 tem todos os coeficientes reais e tem uma raiz complexa: a + bi, com parte imaginária não nula, o conjugado dessa raiz será também raiz da equação.

Com efeito, basta fazer as substituições e calcular $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$, qualquer que seja o complexo z, quando P(x) tem todos os coeficientes reais. Então, nestas condições, se P(z) = 0, então $P(\bar{z}) = 0$ também.

2. Uma outra observação é que, nestas mesmas condições, em que P(x) é um polinômio com coeficientes reais, as raízes complexas com parte imaginária não nula de P(x) = 0 são em número par e mais, se z = a + bi, com b ≠ 0, é uma raiz complexa com multiplicidade d, então a raiz complexa conjugada desta tem também multiplicidade d.

Com efeito, se os coeficientes de P(x) são todos reais e se z = a + bi, com b ≠ 0 é raiz da equação P(x) = 0, P(x) será divisível por $(x - z) \times (x - \bar{z})$. Ora:

$(x - z)(x - \bar{z}) = (x - a - bi)(x - a + bi) = (x - a)^2 - (bi)^2 = (x - a)^2 + b^2$,

que é também um polinômio com coeficientes todos reais. O quociente de P(x) por este polinômio terá também coeficientes todos reais e, se ainda tiver algum zero com parte imaginária diferente de 0, certamente terá o conjugado deste zero como zero também. Daí o fato de que os zeros do polinômio P(x) com parte imaginária diferente de 0 são sempre aos pares, o que implica também que tais zeros têm a mesma multiplicidade que seus conjugados.

Isto nos leva a uma outra versão do **Teorema da Decomposição no campo real**.

Um polinômio a uma variável, com coeficientes reais e grau n, n ≥ 1, pode ser escrito como o produto do seu coeficiente de grau mais alto por binômios da forma $(x - a_i)$ por trinômios da forma $(x^2 + b_j x + c_j)$ com discriminante menor do que 0, isto é, tais que $b_j^2 - 4c_j < 0$, em que a_i, b_j e c_j são sempre reais. Pode acontecer que só haja fatores de um dos tipos, mas, se n for ímpar, haverá, pelo menos, um fator do tipo $(x - a_i)$.

3. Para rever alguns dos resultados focalizados nesta dinâmica, seus alunos podem assistir aos vídeos das aulas do Professor Guto sobre Equações Polinomiais em:

   http://www.auladoguto.com.br/?s=equa%C3%A7%C3%B5es+polinomiais

4. Você encontra mais exercícios sobre este assunto em:

   http://exercicios.brasilescola.com/matematica/exercicios-sobre-polinomios.htm

Agora é com você!

1. Na Segunda Etapa, você viu que 1, 2 + i e 2 – i são zeros do polinômio

$$P(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 5.$$

Agora escreva P(x) como produto de um binômio do 1º grau e um trinômio do 2º grau, todos com coeficientes reais.

Resposta

Para escrever o polinômio como produto de binômios do 1º grau, foi preciso usar números complexos, com parte imaginária não nula, mas se você parar no trinômio cujas raízes são complexas vai conseguir fatorar o polinômio dado em um binômio e um trinômio:

x3 – 5x2 + 9x – 5 = (x – 1) (x2 – 4x + 5).

Observe que o trinômio (x2 – 4x + 5) é o produto dos binômios (x – 2 – i) e (x – 2 + i) em que o polinômio P(x) foi fatorado lá na Segunda Etapa.

• • • • •

2. Você escreveu um polinômio P(x) como produto de binômios da forma (x – a), em que a é zero do polinômio. Esse a pode ser complexo, mesmo que todos os coeficientes de P sejam reais. Mas, tendo que eventualmente considerar trinômios do 2º grau, você vai poder fatorar um polinômio com coeficientes reais em binômios do 1º grau e/ou trinômios do 2º grau, todos com coeficientes reais. Para verificar isso, seja z = a + bi e calcule o produto $(x - z)(x - \bar{z})$.

Resposta

$(x - z)(x - \bar{z}) = [x - (a + bi] [x - (a - bi)] = [(x - a) - bi] [(x - a) + bi] = (x - a)^2 - b^2i^2 = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$.

• • • • •

Você concluiu que $(x - z)(x - \bar{z})$ é um trinômio do 2º grau, com coeficientes reais e discriminante negativo (pois seus zeros são complexos com parte imaginária não nula, z e $\bar{z}$).

E esse resultado permite a fatoração de um polinômio com coeficientes reais em fatores também com coeficientes reais, embora sejam de grau 1 ou 2.

3. (UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro) Considere o polinômio:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 6$$

a. Calcule o resto da divisão de P(x) por (x – 2).

b. Ache as raízes de P(x) = 0

Resposta

a. Pelo Teorema do Resto, esse resto é igual a P(2) e

$P(2) = 2^3 - 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 6 = 8 - 8 - 6 + 6 = 0$.

b. Pela parte (a), 2 é uma das raízes, então P(x) é divisível por (x – 2). Efetuando a divisão pelo dispositivo de Briot-Ruffini:

2	1	– 2	– 3	+ 6
	1	0	– 3	0

e o quociente é $x^2 - 3$, com resto 0, como era de se esperar, pela parte (a).

De x2 – 3 = 0 temos que $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$. Então, as raízes de P(x) = 0 são

2, $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$.

• • • • •

4. (PUC/RJ) Sabendo que $\frac{3}{4}$ é raiz da equação: $10x(2x^2 - 1) = 3(x^2 + x - 1)$, determine as outras duas raízes dessa equação.

Resposta

Escrevendo a equação na forma P(x) = 0: 20x3 – 3x2 – 13x + 3 = 0.

P(x) deve ser divisível por $(x - \frac{3}{4})$. Fazendo essa divisão pelo dispositivo de Briot-Ruffini:

$\frac{3}{4}$	20	– 3	– 13	+ 3
	20	12	– 4	0

e, como era de se esperar, o resto deu 0 e o quociente é 20x2 + 12x – 4 = 0, cujas raízes são as mesmas que as de 5x2 + 3x – 1 = 0. E esta tem as raízes:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 5 \times (-1)}}{2 \times 5} = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{10} \; .$$

Então, as raízes são os números reais: $\frac{3}{4}$, $\frac{-3+\sqrt{29}}{10}$ *e* $\frac{-3-\sqrt{29}}{10}$.

• • • • •

5. (*FUVEST – Vestibular da USP*) Sabe-se que o polinômio $P(x) = x^3 + x^2 + mx + n$, em que m e n são reais, é divisível por x – 1.

a. Determine n em função de m.

b. Determine m para que P(x) admita raiz dupla diferente de 1.

c. Para que valores de m P(x) admite três raízes reais e distintas?

Professor

Resposta

a. Pelo Teorema do Resto, P(1) deve ser 0, mas P(1) = 1 + 1 + m + n = 2 + m + n, logo:

2 + m + n = 0, o que dá: n = – 2 – m.

b. Para que P tenha um zero duplo diferente de 1, é preciso que P tenha um fator $(x - a)^2$. *Isto é,* $P(x) = (x - 1)(x - a)^2$. *Efetuando esses produtos, tem-se:*

$$(x - 1)(x^2 - 2ax + a^2) = x^3 + x^2(-2a - 1) + x(a^2 + 2a) - a^2$$

Igualando a P e identificando os coeficientes, têm-se:

$$-2a - 1 = 1$$

$$a^2 + 2a = m$$

$$-a^2 = n = -2 - m$$

De – 2a – 1 = 1, conclui-se que a = – 1 e, daqui, conclui-se que: $(-1)^2 + 2 \times (-1) = m$, *isto é: m = – 1. Para que essa resposta seja válida, é preciso que esses valores sejam compatíveis com a 3ª relação: – (– 1)2 = – 2 – (– 1), isto dá – 1 = – 1, o que é compatível. Então, se m = – 1, P(x) tem um zero duplo igual a 0, que é diferente de 1.*

c. Agora será preciso efetuar a divisão de P(x) por (x – 1) para estudar o trinômio quociente. Usando o dispositivo de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 1 & m & -2-m \\ \hline & 1 & 2 & m+2 & 0 \end{array}$$

Logo, $P(x) = (x-1)(x^2 + 2x + m + 2)$ e seus zeros são $x_1 = 1$ e as raízes da equação do 2º grau

$$x^2 + 2x + m + 2 = 0.$$

Para atender à condição imposta em (c), é preciso que essa equação tenha 2 soluções reais, distintas entre si e diferentes de 1. Mas a = 1, b = 2 e c = m + 2, logo suas raízes são:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (m+2)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4m - 8}}{2} = -1 \pm \sqrt{-m-1}$$

e essas raízes serão reais e distintas entre si se $-m-1 > 0$, ou seja, se $m < -1$.

Por outro lado, essas raízes têm que ser diferentes de 1.

Ou seja, $-1 \pm \sqrt{-m-1} \neq 1$. Isto é, $\sqrt{-m-1}$ não pode ser nem igual a 2, nem igual a -2. Daí, $-m-1$ não pode ser igual a 4. Ora, $-m-1 = 4$ só quando $m = -5$. A resposta à questão colocada em (c) é: $m < -1$, mas $m \neq -5$.

• • • • •

6. (*UFPR – Universidade Federal do Paraná*) Considere o polinômio:

$$P(x) = x^3 - ax^2 + x - a$$

e analise as afirmativas:

(I) $i = \sqrt{-1}$ é uma raiz desse polinômio.

(II) Qualquer que seja o valor de a, P(x) é divisível por (x – a).

(III) Para que P (– 2) = – 10, o valor de a deve ser zero.

Assinale a alternativa correta:

a. Somente a afirmativa (II) é verdadeira.

b. Somente as afirmativas (I) e (II) são verdadeiras.

c. Somente as afirmativas (I) e (III) são verdadeiras.

d. Somente as afirmativas (II) e (III) são verdadeiras.

e. As afirmativas (I), (II) e (III) são verdadeiras.

Verificando cada uma das 3 afirmações:

(I) Calculando $P(i) = i^3 - a \times i^2 + i - a = -i + a + i - a = 0$ *e i é zero do polinômio. Logo, (I) é verdadeira.*

(II) a afirmação será verdadeira se $P(a) = 0$*. Calculando* $P(a) = a^3 - a \times a^2 + a - a = 0$*, que também é verdadeiro.*

(III) Calculando $P(-2) = (-2)^3 - a \times (-2)^2 - 2 - a = -8 - 4a - 2 - a = -10 - 5a$ *e*

$-10 - 5a = -10$ *se e somente se* $a = 0$*. A afirmativa (III) também é verdadeira e* ***a opção correta é a (e)****.*

Professor