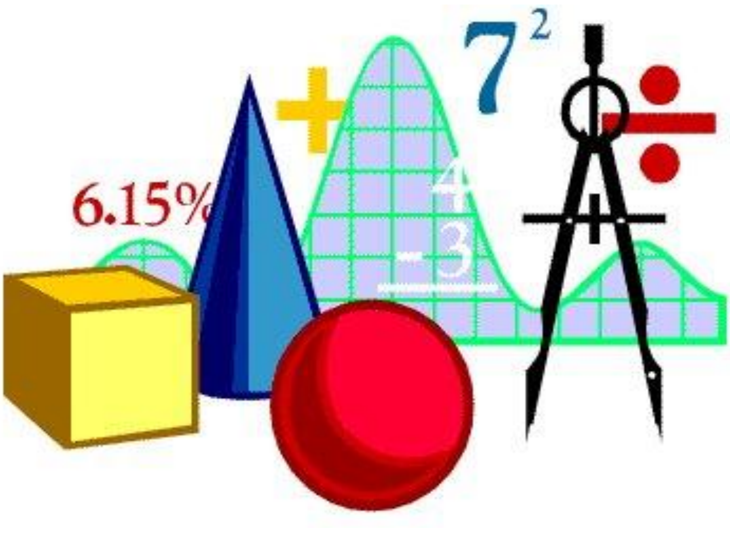
Planejamento sobre Trigonometria no triângulo.



Formação continuada para professores de matemática Fundação CECIERJ/SEEDUC-RJ
Colégio: E.E Lucas da Silva - 1°ano turma 1001
Prof: Heloiza Helena Rafael de Souza
Tutor: BRUNO MOARES LEMOS
Grupo: 01

Introdução

A trigonometria é um dos ramos mais antigos da matemática e já na antiguidade já media ângulos e distâncias com o objetivo de localizar pontos sobre a superfície terrestre. Na atualidade ela é usada em várias situações práticas e teóricas não envolvendo somente problemas internos da matemática , mas também em outras disciplinas tecnológicas e científicas.

Usaremos uma metodologia que faça no primeiro momento o discente visualizar e entender uma aplicabilidade desse conteúdo em sua vida cotidiana onde a parte algébrica será muito importante para colocar em prática os conceitos adquiridos.

É notória a super importância que há nos estudos trigonométricos, sabemos que dificuldades sempre encontrarão, porém neste trabalho veremos e utilizaremos como são aplicados, que influência tal conteúdo tem em nossa vida durante estas 14 aulas de 50 minutos cada deveremos modificar nosso olhar sobre essa tal trigonometria associada aos triângulos.

Trigonometria no triângulo retângulo.

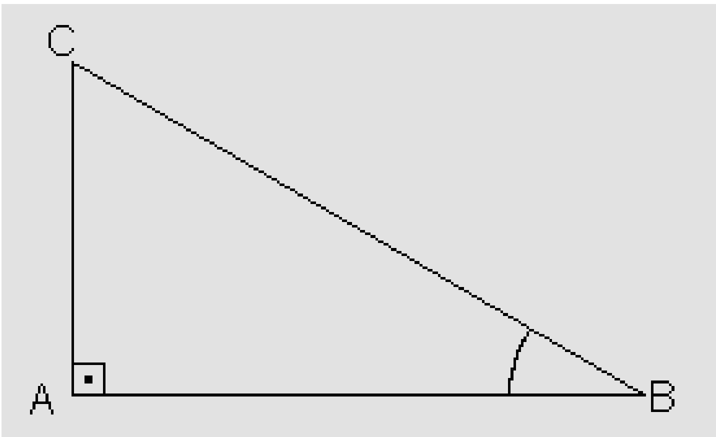
Um triângulo é uma figura geométrica plana ,constituída de três lados, três ângulos internos onde tradicionalmente são medidos numa unidade de medida denominada graus.

Num triângulo retângulo definimos as chamadas razões trigonométricas que são relações entre os lados do triângulo e que têm a propriedade de determinar a medida dos ângulos do triângulo, uma vez que seus lados sejam conhecidos .

Assistiremos a um vídeo que introduzirá o conteúdo:

Disponivel em: https://www.youtube.com/watch?v=83ntr-FHKgw

No triângulo retângulo ABC, consideremos



- Seno de x é a razão entre o comprimento do cateto oposto ao ângulo $\hat{B}$ e o comprimento da hipotenusa do triângulo. Indicando o Seno de x por Sen x, temos:

$$\text{Sen}\,x = \frac{AC}{BC}$$

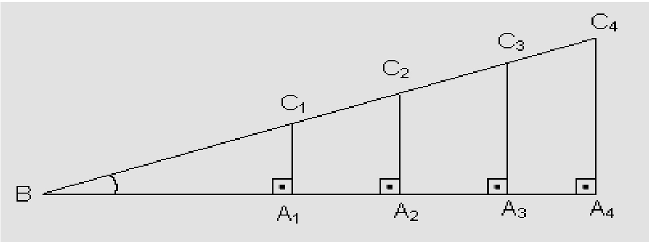
- Cosseno de x é a razão entre o comprimento do cateto adjacente ao ângulo e o comprimento da hipotenusa do triângulo. Indicando o Cosseno de x por Cos x, temos: .

$$\text{Cos}\,x = \frac{AB}{BC}$$

- Tangente de x é a razão entre os comprimentos do cateto oposto e do cateto adjacente ao ângulo $\hat{B}$. Indicando a Tangente de x por Tg x, temos:

$$\text{Tg}\,x = \frac{AC}{AB}$$

Um fato interessante é que, como pode ser observado na figura abaixo, usando o fato de que os triângulos A1BC1, A2BC2, A3BC3, A4BC4, ... são semelhantes, imediatamente concluímos que



$$\text{Sen}\,x = \frac{A_1C_1}{BC_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = \frac{A_3C_3}{BC_3} = \frac{A_4C_4}{BC_4}$$

assim como,

$$\text{Cos}\,x = \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA_2}{BC_2} = \frac{BA_3}{BC_3} = \frac{BA_4}{BC_4}$$

e

$$\text{Tg}\,x = \frac{A_1C_1}{BA_1} = \frac{A_2C_2}{BA_2} = \frac{A_3C_3}{BA_3} = \frac{A_4C_4}{BA_4}$$

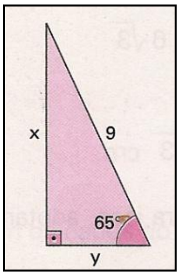
ou seja, Sen x, Cos x, Tg x não dependem do particular triângulo retângulo ABC, mas apenas do ângulo , cuja medida é x graus.

Assistiremos a um vídeo para maior assimilação do conceito e das fórmulas

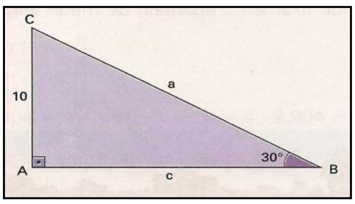
Disponível em : http://www.youtube.com/watch?v=wr6GX4TWxvw

Exercícios :

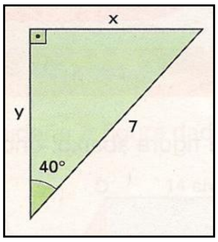
1. No triângulo retângulo determine as medidas **x** e **y** indicadas.(Use: sen65º = 0,91; cos65º = 0,42 e tg65º = 2,14)



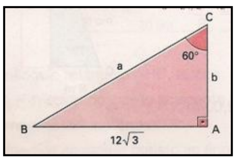
2. Determine no triângulo retângulo ABC as medidas **a** e **c** indicadas.



3. Sabendo que sen40º = 0,64; cos40º = 0,77 e tg40º = 0,84 calcule as medidas **x** e **y** indicadas no triângulo retângulo.



4. Considerando o triângulo retângulo ABC, determine as medidas **a** e **b** indicadas.



Relembrando ângulos notáveis.

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

O pôr que de se estudar trigonometria ?

Disponivel em : https://www.youtube.com/watch?v=_zafOgCgtPA

Atividade 1
Roteiro de Ação 4 – Calculando Alturas Inacessíveis .

Duração prevista: 100 minutos. .

Área de conhecimento: Matemática .

Assunto: Razões trigonométricas. .

Objetivos: Aplicar os conceitos sobre as razões trigonométricas em problemas do cotidiano.

.**Pré-requisitos:** Reconhecer e calcular as razões trigonométricas no triângulo retângulo; resolver sistema de equações do 1º grau. .

Material necessário: Folha de atividades, papel, caneta e calculadora simples, Tabela Trigonométrica.

.**Organização da classe:** Turma organizada em grupos de dois ou três alunos, propiciando trabalho organizado e colaborativo. .

Descritores associados: H12 – Resolver problemas envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°).

Atividade 1: Calculando a altura de uma árvore

Você tem ideia de como seria possível determinar a altura de uma árvore sem precisar escalá-la? Você conhece algum instrumento que possa facilitar essa façanha? Troque ideias com seus colegas sobre essa questão.

Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=_3gL0amU-Q8

Você já ouviu falar no teodolito?

O teodolito é um instrumento óptico de medida utilizado na topografia, na geodésia e na agrimensura para realizar medidas de ângulos.

Observe a Figura 2.

Perceba que podemos considerar o triângulo retângulo indicado na figura, pois é razoável considerar que a árvore faz um ângulo reto com o plano horizontal. Na figura 2, temos indicado o ângulo de 30º. Esse ângulo pode ser obtido com o auxílio de um teodolito.

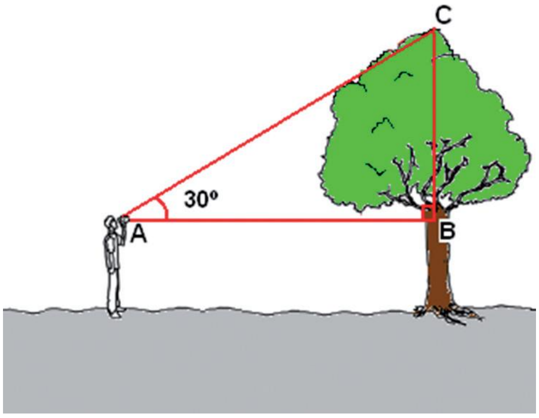


Figura 2

2. Conhecendo a medida de AB , você acha que é possível determinar a altura da árvore? Como? Discuta com seus colegas e registre.

3. Você acha que a razão trigonométrica pode ser útil na determinação dessa altura? Como? Discuta com seus colegas e registre.

Suponha que uma pessoa com 1,80 m de altura, localizada a 10 m do tronco de uma árvore, consiga observar o topo desta árvore sob um ângulo de elevação de 30º, como mostra a figura 3.

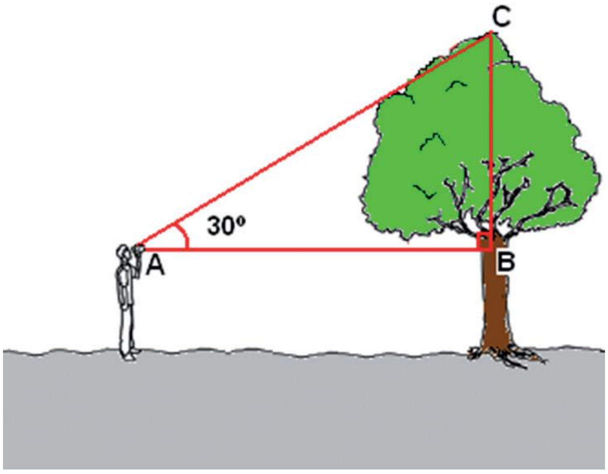


Figura 3

4. Com estes dados, complete os retângulos vazios da figura 4, colocando **x** no local da medida desconhecida.

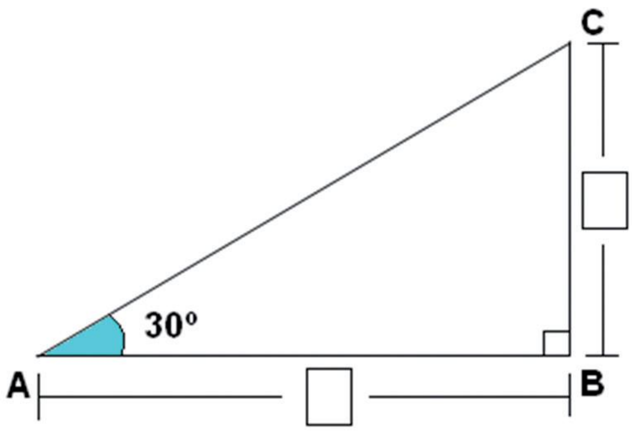


Figura 4

5. Considerando o triângulo ABC, qual razão trigonométrica do ângulo de 30º é definida pela fração 10 x ?

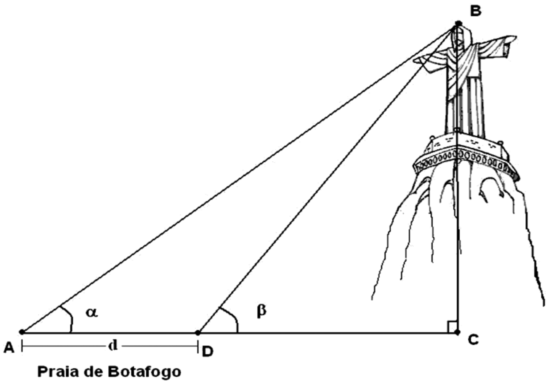
6. Consulte a Tabela Trigonométrica e indique o valor aproximado da razão trigonométrica obtida no item anterior.

7. Determine o valor de x, igualando a fração 10 x ao valor obtido na Tabela Trigonométrica.

Atividade 2: Calculando a altura do monumento do Cristo Redentor no Corcovado :

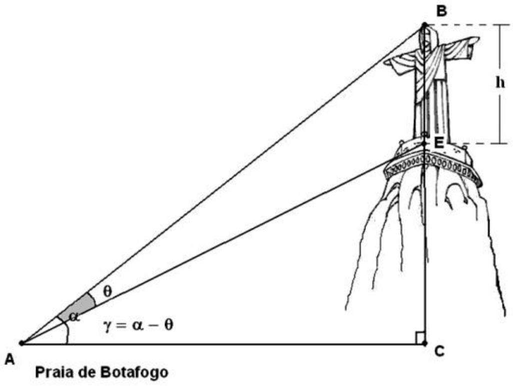
Figura 8 (http://pt.wikipedia.org/wiki/Cristo_Redentor)

Suponha que você se encontre no ponto A, na Praia do Botafogo, com um teodolito e uma boa trena. Como você poderia determinar a altura deste monumento a essa distância? Discuta com seus colegas de sala e registre suas conclusões



Suponha que uma pessoa que se encontra no ponto A na Praia de Botafogo consegue observar o topo do monumento do Cristo Redentor sob um ângulo de elevação de 30º. Ao andar 867 metros até um ponto D, essa pessoa observa o topo sob um ângulo de elevação de 60º.

Com essas informações, determine a que altura se encontra o topo do monumento. Observação: Nessa situação a altura da pessoa é desprezível..



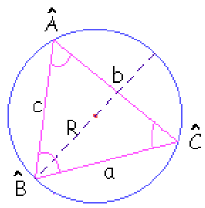
Observe acima e determine a altura aproximada *h* da estátua. Para isso, considere que, a partir do ponto A, avista-se o ponto B sob um ângulo de 30º e o ponto E é visto sob um ângulo de 29º.

Fazendo uma pesquisa na internet, encontramos a medida de 38 metros para a estátua. Foi essa medida que você encontrou? E seus colegas? Como isso é possível?

<u>Como resolver questões onde o triangulo não é retângulo?</u>

Lei dos Senos:

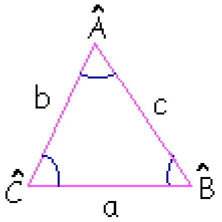
A Lei dos Senos nos diz que em um triângulo QUALQUER os seus lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos. Diz também que a constante desta proporcionalidade é igual ao diâmetro de uma circunferência que circunscreva este triângulo.



$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R$$

Lei dos Cossenos:

A Lei dos Cossenos nos diz que em um triângulo QUALQUER o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros lados menos duas vezes o produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo por eles formado.



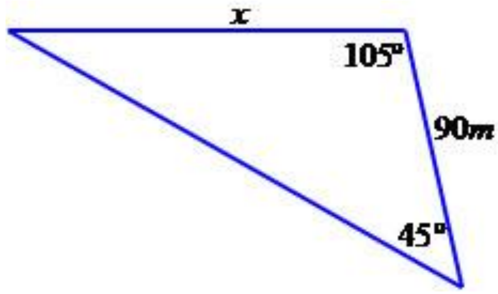
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c \, . \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c \, . \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b \, . \cos \hat{C}$$

❖ *Exemplos de aplicação:*

1)No triângulo a seguir temos dois ângulos, um medindo 45º, outro medindo 105º, e um dos lados medindo 90 metros. Com base nesses valores determine a medida de x.



Para determinarmos a medida de x no triângulo devemos utilizar a lei dos senos, mas para isso precisamos descobrir o valor do terceiro ângulo do triângulo. Para tal cálculo utilizamos a seguinte definição: a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º. Portanto:

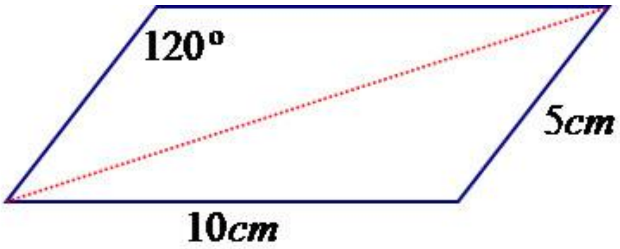
ɑ + 105º + 45º = 180º
ɑ + 150º = 180º
ɑ = 180º – 150º
ɑ = 30º
Aplicando a lei dos senos

$$\frac{x}{sen45} = \frac{90}{sen30}$$

$$\frac{x}{0{,}707} = \frac{90}{0{,}5}$$

0,5x=63,63
x=127,26

Calcule a medida da maior diagonal do paralelogramo da figura a seguir, utilizando a lei dos cossenos.



cos 120º = −cos(180º − 120º) = − cos 60º = − 0,5

$x^2 = 5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot (-\cos 60º)$
$x^2 = 25 + 100 - 100 \cdot (-0{,}5)$
$x^2 = 125 + 50$
$x^2 = 175$
$x = \sqrt{175}$

$x = \sqrt{5^2 \cdot 7}$

$x = 5\sqrt{7}$

Atividade 2

Roteiro de Ação 5 – Podemos usar o Teorema de Pitágoras em qualquer triângulo?.

Duração prevista: 100 minutos.

Área de conhecimento: Matemática.

Assunto: Lei dos Cossenos.

Objetivos: Apresentar a Lei dos Cossenos como uma generalização do Teorema de Pitágoras que pode ser usada em qualquer triângulo..

Pré-requisitos: Teorema de Pitágoras, razões trigonométricas, cálculos com números reais..

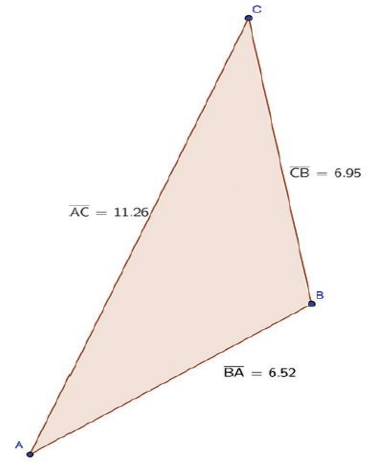
Material necessário: Folha de atividade, calculadora científica (disponível no computador)..

Organização da classe: Turma organizada em duplas em grupos de quatro alunos, propiciando trabalho organizado e colaborativo..

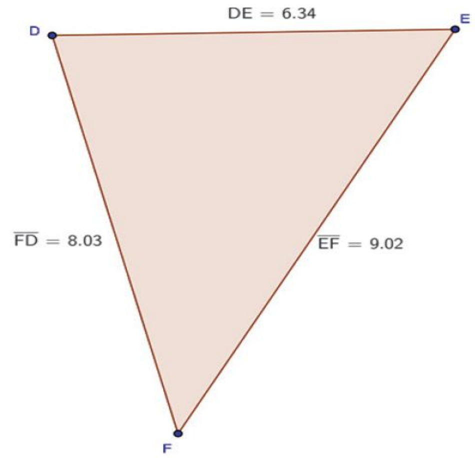
Descritores associados:

H13 – Resolver problemas, envolvendo a lei dos cossenos ou a lei dos senos.

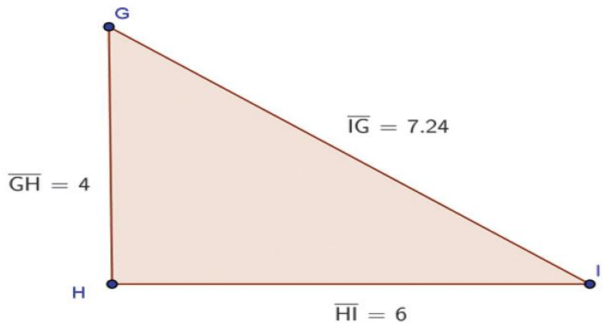
Para começar nossa atividade, observe com atenção os três triângulos a seguir:



Triângulo 1



Triângulo 2



Triângulo 3

1. Será que a relação de Pitágoras vale nesses triângulos?

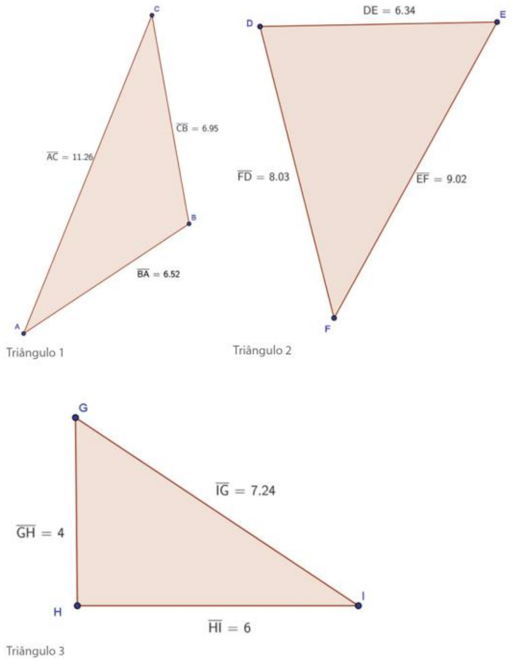
Use a Tabela 1 para organizar os valores e verifique!

Triângulo 1		Triângulo 2		Triângulo 3	
$\overline{AC}$	11,26	$\overline{EF}$	9,02	$\overline{IG}$	7,24
$\overline{CB}$	6,95	$\overline{FD}$	8,03	$\overline{GH}$	4
$\overline{BA}$	6,52	$\overline{DE}$	6,34	$\overline{HI}$	6
$\overline{AC}^2$		$\overline{IG}^2$		$\overline{IG}^2$	
$\overline{CB}^2 + \overline{BA}^2$		$\overline{FD}^2 + \overline{DE}^2$		$\overline{GH}^2 + \overline{HI}^2$	
Tabela 1					

2.Observe os valores que você completou nas 4ª e 5ª linhas. Eles são iguais? Troque ideias com seus colegas e registre as conclusões.

3. Os triângulos ABC, EFD e GHI são triângulos retângulos?

4. Será que esse fato está relacionado com o fato de os valores das linhas 4 e 5 serem diferentes? Discuta com seus colegas.



6. Calcule as diferenças indicadas na Tabela 2:

Triângulo 1	$\overline{AC}^2 - \left(\overline{CB}^2 + \overline{BA}^2\right)$	
Triângulo 2	$\overline{EF}^2 - \left(\overline{FD}^2 + \overline{DE}^2\right)$	
Triângulo 3	$\overline{IG}^2 - \left(\overline{GH}^2 + \overline{HI}^2\right)$	
Tabela 2		

7.Utilizando uma calculadora científica, calcule os valores dos cossenos dos ângulos indicados nos triângulos

Triângulo 1	cos(113,38)	
Triângulo 2	cos(76,81)	
Triângulo 3	cos(90,57)	
Tabela 3		

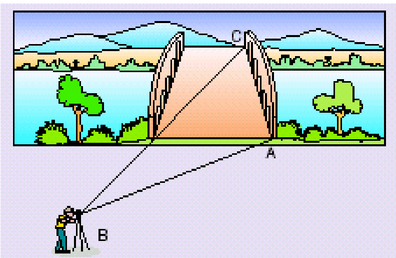
8.Com os valores dos cossenos obtidos no item anterior, preencha a Tabela 4.

Triângulo 1	$2\overline{CB}\cdot\overline{BA}\cdot\cos(\hat{B})$	
Triângulo 2	$2\overline{FD}\cdot\overline{DE}\cdot\cos(\hat{D})$	
Triângulo 3	$2\overline{GH}\cdot\overline{HI}\cdot\cos(\hat{H})$	
Tabela 4		

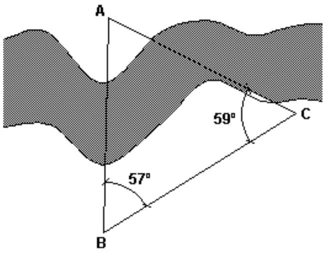
9.Compare os valores das tabelas 2 e 4. Notou alguma semelhança? Registre suas observações.

Problemas envolvendo leis do seno e cosseno

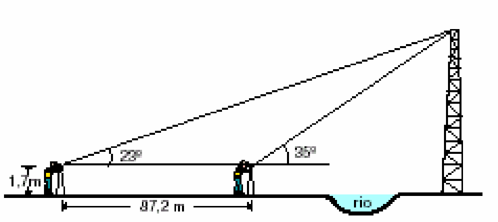
1-Para saber o comprimento de uma ponte que será construída sobre um rio, um engenheiro instalou o teodolito no ponto B a uma distância de 30 metros do ponto A, situado na margem do rio. Depois, mediu os ângulos BÂC = 105° e CBA=30° , conforme a figura. Com base nas medidas feitas pelo engenheiro, determine o comprimento AC da ponte.



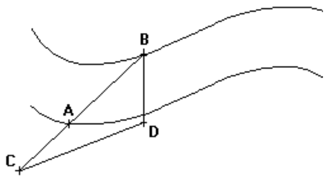
2-Uma ponte deve ser construída sobre um rio, unindo os pontos A e B, como ilustrado na figura abaixo. Para calcular o comprimento AB, escolhe-se um ponto C, na mesma margem em que B está, e medem-se os ângulos CBA = 57° e ACB = 59°. Sabendo que BC mede 30m, indique, em metros, a distância AB. (Dado: use as aproximações sen(59°) ≅ 0,87 e sen(64°) ≅ 0,90)



3-Utilizando um teodolito e uma trena um topógrafo fez as medidas de ângulos e distâncias indicadas na figura ao lado. Calcule a altura da torre indicada nessa figura.



4-Para calcular a distância entre duas árvores situadas nas margens opostas de um rio, nos pontos A e B, um observador que se encontra junto a A afasta-se 20m da margem, na direção da reta AB, até o ponto C e depois caminha em linha reta até o ponto D, a 40m de C, do qual ainda pode ver as árvores.



Tendo verificado que os ângulos DCB e BDC medem, respectivamente, cerca de 15° e 120°, que valor ele encontrou para a distância entre as árvores, se usou a aproximação $\sqrt{6}$ = 2,4?

Avaliação

Avaliar é sempre muito difícil, pois temos que levar em conta todo o conhecimento e o contexto de evolução de nossos alunos, considera que tal parte da matéria requer uma avaliação não somente pautada nos acertos mais na tentativa pois necessitamos de uma visualização fato este que em um primeiro momento não é alcançado de imediato por meus alunos.

A função mais importante nesta atividade é orientar aprendizagem para que nossos alunos comecem a ter uma autonomia para formular os conceitos para aquisição das competências exigidas.

A avaliação estará pautada na:

-Realização de todos os exercícios propostos em sala de aula;.

- Diante de todas estas atividades, serão avaliados através de nota, provavelmente de valor 0,5 ponto para cada atividade.

- Também serão avaliados através da prova bimestral que deverá contar com situações propostas no plano de trabalho .

Referências

*Roteiro de Ação 4 – Calculando Alturas Inacessíveis

*Roteiro de Ação 5 – Podemos usar o Teorema de Pitágoras em qualquer triângu**lo?**.

*Lei dos senos e cossenos disponível em http://www.brasilescola.com/matematica/lei-dos-senos.htm Acesso 22/05/13

*Trigonometria no triangulo retângulo disponível em http://www.brasilescola.com/matematica/trigonometria-no-triangulo-retangulo.htm Acesso em 20/05/13

*Matemática :Ciências e aplicação ,1:ensino médio/Gelson Iezzi,6ed.São Paulo:Sarava,2010

*Matemática:uma nova abordagem,vol.1/Giovanni,Bonjorno-São Paulo :FTD2000

*Trigonometria disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=83ntr-FHKgw acesso em 24/05/13

*Distancias inacessíveis disponível em https://www.youtube.com/watch?v=_3gL0amU-Q8 Acesso 21/05/13

*Exercícios sobre leis dos senos e cossenos disponível em http://waldexifba.wordpress.com/material-de-apoio/ensino-medio/trigonometria/lei-dos-senos-e-cossenos/ Acesso em 21/05/13

*Conceitos da trigonometria disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=_zafOgCgtPA Acesso em 22/05/13

*Cançao da trigonometria disponível em http://www.youtube.com/watch?v=wr6GX4TWxvw Acesso em 21/05/13