Formação Continuada em Matemática

Matemática -2º ano

3º bimestre/2014

Plano de Trabalho

Cones e Pirâmides

Tarefa 2
Cursista: Evanilda Soares Barbosa Cândido
Tutora: Susi Cristine Britto Ferreira
Grupo:1

Introdução:

Este trabalho tem como objetivo levar aos alunos uma forma de aprendizado dos cones e das pirâmides através de situações-problema, de exemplos vivenciados no seu dia a dia e da exploração dos recursos tecnológicos.

Os alunos de um modo geral não encontram muitas dificuldades em entender o conceito dos cones e das pirâmides, mas quando se deparam com os cálculos de área e volumes eles apresentam suas dificuldades, uma vez que o trabalho, na maioria das vezes, é explorado de somente calculista além de demonstrar uma falta de entusiasmo diante delas, por isso, faz necessário à contextualização no ensino dos cones e das pirâmides..

De forma introdutória será apresentada um documentário sobre a existência das pirâmides para que os alunos estejam a sintonizados no conceito das pirâmides juntamente com os fatos históricos.

Desenvolvimento:

Atividade 1:

Objetivo: mostrar ao aluno possibilidade de conjugar saberem artísticos e matemáticos, e preparar uma introdução para o trabalho com as Pirâmides e Cones.

Duração: 2 tempos de aula(100min)

Recursos educacionais utilizados: Datashow ou lousa digital ou computador com internet

Pré-requisitos: nenhum

Será apresentado o documentário "O artista e o Matemático" aos alunos a fim de que estejam a ciente da possibilidade de conjugar saberes artísticos e matemáticos, e preparar uma introdução para o trabalho com as Pirâmides e Cones.

Disponível em : http://www.youtube.com/watch?v=KkZLszUYO-Y

Após apresentar o documentário, será feito uma discussão sobre o documentário, levando em conta os pontos importantes como

- Se o ser humano ”respira matemática embora não tenha consciência disso”, que exemplos ficam claros no documentário?
- O documentário faz perguntas? Quais?
- O que você imagina que os alunos gostariam de ver no documentário? O que causaria atração ou estranhamento?
- Para você, quais focos de trabalho para a sala de aula o documentário pode desencadear?

Atividade 2:

H1: Reconhecer e nomear pirâmides e cones.

Objetivo: mostrar ao aluno que as pirâmides e os cones podem estar presentes em situações cotidianas e proporcionar a construção a partir das suas planificações.

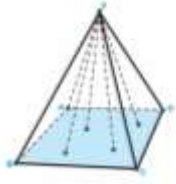
Duração: 4 aula de aulas: 200min

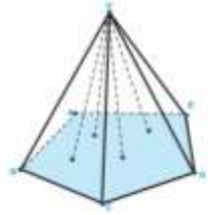
Recursos educacionais utilizados: quadro e material impresso, papel origami.

Pré-requisitos: noção das figuras planas.

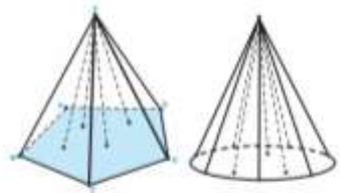
Serão apresentadas aos alunos os conceitos de cones e pirâmides e suas aplicabilidades no dia a dia.

Pirâmide: é um sólido formado pelo conjunto de segmentos em que uma das extremidades pertence a um polígono e a outra pertence a um ponto V exterior ao polígono. Ou seja, é a reunião dos segmentos VA, VB, VC, VD, VE, VF,... em que A, B, C, D, E, F,... são pontos pertencentes ao polígono e V o ponto que não pertence ao polígono ABCDEF...





Cone: Substituindo o polígono da base por um círculo. Então, quando trocamos a base da pirâmide por um círculo, o sólido que obtemos é chamado de cone.

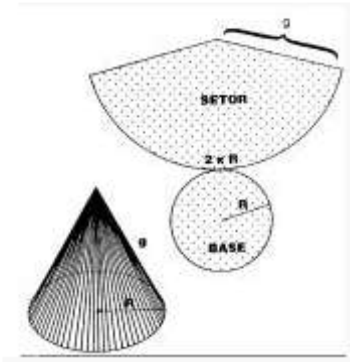


Para as pirâmides, podemos exemplificar como a pirâmide do Egito, a “famosa” pirâmide alimentar.

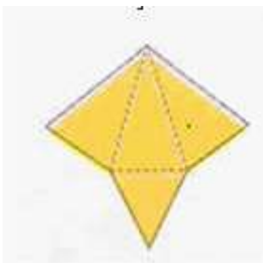
Já para os cones: podemos exemplifica com o guarda-chuva de chocolate, casquinha, chapéu de festas de aniversário infantil, dentre outros:

Partindo desse conceito será proposto aos alunos construção de cones e pirâmides a partir de sua planificação com material concreto.

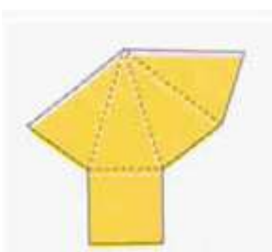
Cone:



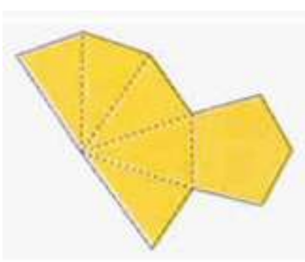
Pirâmide triangular



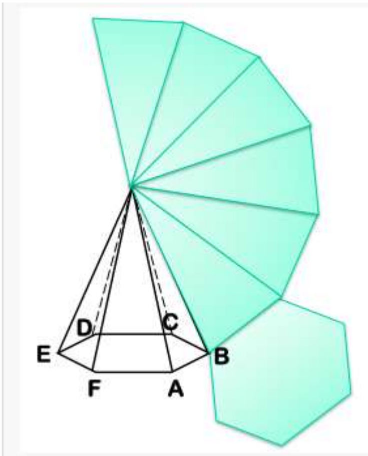
Pirâmide quadrangular



Pirâmide Pentagonal



Pirâmide Hexagonal



Atividade 3:

H1: Reconhecer e nomear pirâmides e cones.

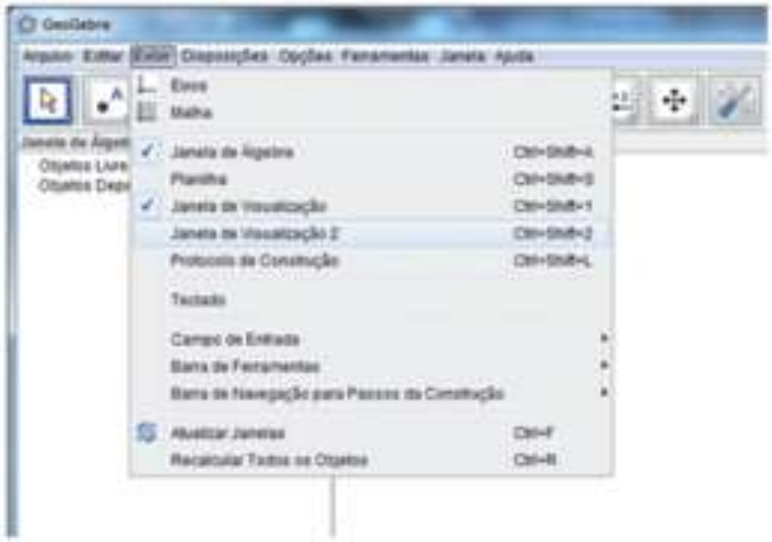
Objetivo: Proporcionar o aluno a conhecer e manipular as pirâmides e os cones de uma forma mais dinâmica com o uso da tecnologia.

Duração: 4 aula de aulas: 200min

Recursos educacionais utilizados: Datashow ou lousa digital ou computador com o software geogebra instalado.

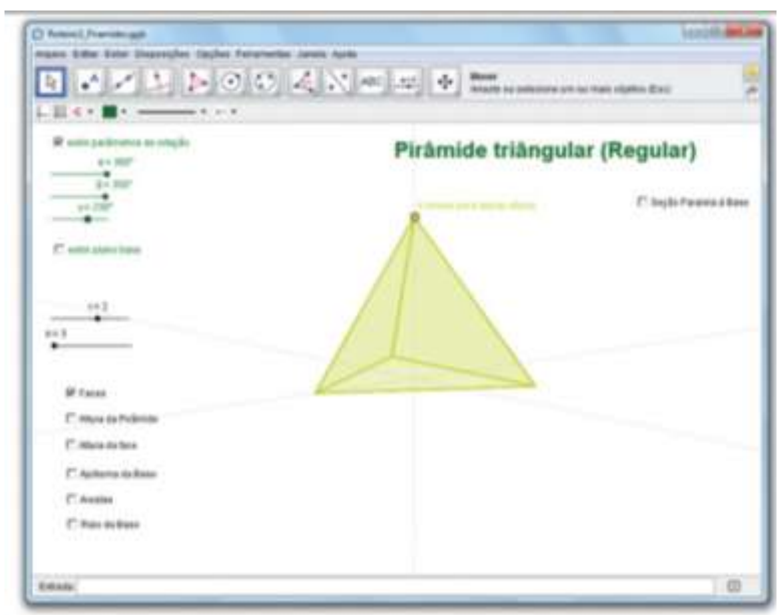
Pré-requisitos: noção das figuras planas.

Uma vez que os alunos já tiveram a oportunidade de conhecer os conceitos das pirâmides e dos cones será apresentado as construções no software geogebra tomando como base o Roteiro 3, onde eles poderão visualizar, manipular as construções.



1ª Parte – Apresentando Pirâmide

1. Abra o arquivo “Roteiro3_Pirâmides.ggb” disponibilizado.



2. Você conhece o sólido geométrico que aparece neste arquivo?
3. Mova o seletor n=3 para n=4, você reconhece este sólido?
4. Você já o viu no seu cotidiano?

5. Clique na caixa “Exibir parâmetros de rotação”. Surgirão três seletores, α (alpha), β (beta) e γ (gama). Comece movimentando o Seletor *0=360*α. O que

acontece com o sólido? Faça o mesmo com os seletores *0=300*β e *0=255*γ. Use estes parâmetros para girar o cone.

6. Clique na caixa “Exibir plano base”. Que polígono é formado sobre o plano base, quando n = 3? Para melhorar a sua visualização, mova os seletores k = 0.5 e r = 0.5.

7. E quando n = 4, que novo polígono é formado? E se n = 5 ou n = 6? Que relação existe entre o nome desses polígonos e o nome dado a estas pirâmides?

É importante que o aluno saiba que o nome da pirâmide(Triangular, Quadrangular, Pentagonal, Hexagonal)varia de acordo com o polígono de sua base. E que A face lateral desse sólido geométrico é sempre formada por triângulos, independente do polígono da base.

8. Quantas bases possui este sólido?

9. Ao variar o valor de n, vimos que diferentes figuras são formadas na base. Mas, e na lateral, existe alguma alteração? Que polígonos a compõe?

10. Utilize o arquivo aberto para observar algumas pirâmides e completar a tabela a seguir, informando a quantidade de triângulos e segmentos que compõem a lateral de uma pirâmide de acordo com sua nomenclatura.

Pirâmide	Quantidade de faces Laterais	Quantidade de Arestas Laterais
Triangular		
Quadrangular		
Pentagonal		
Hexagonal		

Comentar com os alunos sobre o ponto V, chamado de vértice. É interessante destacar que se trata do ponto mais distante da base. Peça para eles manterem o botão esquerdo do mouse pressionado e moverem este ponto.

11. Selecione a caixa Altura da Pirâmide e observe o segmento de cor azul. Veja que ele tem o vértice V como extremidade. Embora este arquivo indique, mas não permita verificar, este segmento é perpendicular à base. Que relação existe entre a altura da Pirâmide e a distância do vértice V à base da pirâmide?

12. Observando que é retângulo o triângulo formado pela altura da pirâmide, o apótema da pirâmide (hipotenusa) e o apótema da base, podemos encontrar uma relação matemática entre esses elementos. Que relação é essa?

13. Repetindo o mesmo para o triângulo formado pela aresta lateral (hipotenusa), o raio da base e a altura da pirâmide, que relação matemática existe entre estes elementos?

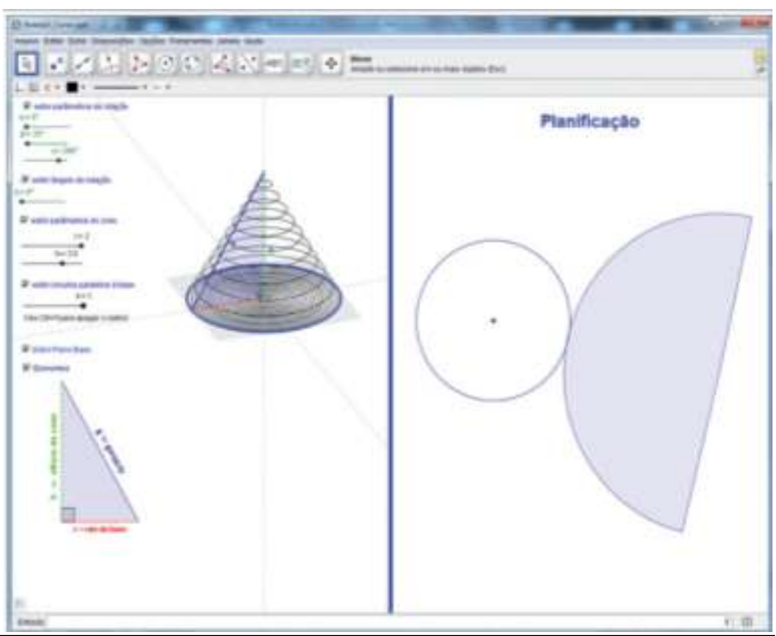
14. Agora faça o contrário. Quando conhecemos a medida ***a*** da aresta da base e a medida ***l*** da aresta lateral podemos encontrar a medida **m** do ***apótema da pirâmide*** a partir da relação $m^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + l^2$.

12. Desenhe na figura abaixo um triângulo retângulo que justifique essa relação.

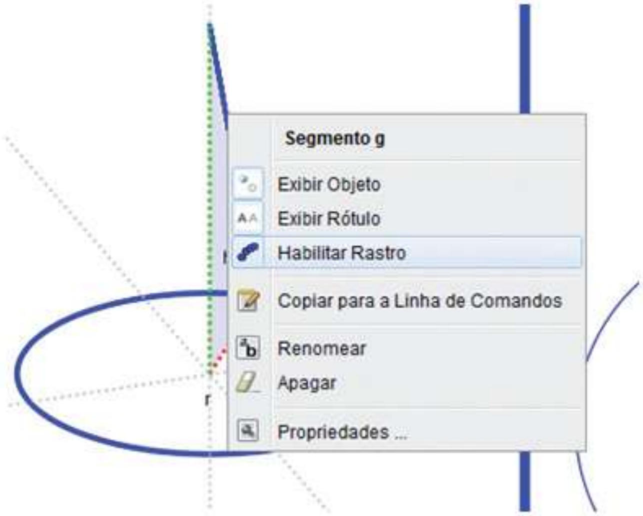
É importante a identificação dos elementos e suas relações serão muito importantes para o cálculo da área de superfície e do volume da pirâmide.

2ª Parte – Apresentando o Cone

1. Agora, abra o arquivo “Roteiro3_Cones.ggb”.



2. Clique com o botão direito do mouse sobre o segmento “g” (hipotenusa do triângulo retângulo em destaque) e habilite o rastro desse segmento. Em seguida, clique no botão play  que aparece no canto inferior esquerdo para animar a figura. Interrompa a animação após uma volta. O que acontece com o triângulo retângulo sobre o plano da base?



3. O segmento g, quando animado, percorre a superfície de uma figura geométrica. Que figura geométrica é essa?

Vale focar com os alunos que nome dado ao segmento com uma extremidade no vértice do cone e outra na curva que envolve a base é chamado de geratriz? Já a região delimitada pela curva sobre o plano é chamada de base.

4. Você já encontrou este sólido geométrico em seu cotidiano?

5. Desabilite o rastro da geratriz e depois, clique em "exibir parâmetros do cone". Mova o seletor r = 1 e diga o que acontece com a circunferência da base e o segmento em vermelho. Você lembra como chamamos este segmento?

6. Mova o seletor h = 3. O que acontece com o comprimento do segmento h do cone?

7. Este segmento é a altura do triângulo retângulo em destaque. Mas, considerando a nomenclatura utilizada anteriormente para pirâmides, qual seria a denominação para o segmento h (verde) em relação ao cone?

É preciso focar a definição com que o segmento em vermelho (r) trata-se do raio da base e que a altura (h) do triângulo retângulo é também a altura do cone.

8. No lado direito da construção em nosso arquivo, aparece uma planificação para o cone. Quais são os elementos dessa planificação?

9. Ao mover os seletores h e r, o que acontece com a planificação?

10. Mova o seletor r até que tenha valor igual a 2. Quanto deve medir a altura do cone com raio da base medindo 2 para que o setor circular correspondente a sua lateral seja um semi círculo?

11. E, se o raio tiver medida 1?

12. Por fim, observando que é retângulo o triângulo formado pela altura do cone, a geratriz (hipotenusa) e o raio da base podemos encontrar uma relação matemática entre esses elementos. Que relação é essa?

É importante a identificação dos elementos e suas relações serão muito importantes para o cálculo da área de superfície e do volume do cone.

Atividade 4:

H1: Resolver problemas envolvendo o cálculo de área lateral e área total de pirâmides e cones.
H2: Resolver problemas envolvendo o cálculo do volume de pirâmides e cones.

Objetivo: Levar o aluno à análise, compreensão e resolução das áreas e volumes dos cones e pirâmides através de situações-problemas.

Duração: 4 aula de aulas: 200min(resolução e correção).

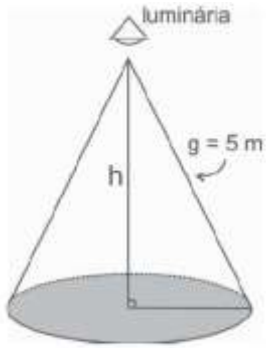
Recursos educacionais utilizados: Material impresso e quadro branco

Pré-requisitos: noção das figuras planas, noções de cálculos e teorema de Pitágoras.

Primeiramente serão trabalhados com os alunos os conceitos para os cálculos da área e do volume dos cones e das pirâmides.

Problema 1:

(ENEM) Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura



Sabendo-se que a luminária deverá iluminar uma área circular de 28,26m2 , considerando π(pi) = 3,14 , a altura h será igual a

a) 3 m.
b) 4 m.
c) 5 m.
d) 9 m.
e) 16 m.

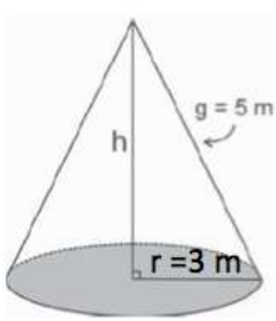
Resolução:

Sabe-se que área circular da base a ser iluminada é de 28,26m2, ou seja,

$$\pi r^2 = 28{,}26m^2$$

$$r^2 = \frac{28{,}26}{3{,}14} \Leftrightarrow r \cong \sqrt{9}$$

$$r = 3m$$



Aplicando pitágoras:

$h^2 + r^2 = g^2$

$h^2 + 3^2 = 5^2$

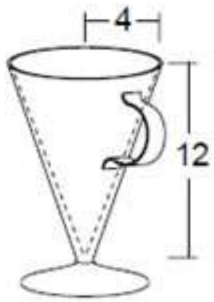
$h^2 = 25 - 9$

$h = \sqrt{16} = 4m$

Problema 2:

Um copo será fabricado no formato de um cone com as seguintes medidas: 4 cm de raio e 12 cm de altura. Qual será a capacidade do copo?

Resolução:



$$V = \frac{\pi * r^2 * h}{3}$$

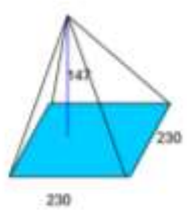
$$V = \frac{3{,}14 * 4^2 * 12}{2}$$

$$V = \frac{3{,}14 * 16 * 12}{3}$$

$$V = 200{,}96 cm^3$$

Problema 3:

A pirâmide de Quéops, conhecida como a Grande Pirâmide, tem cerca de 230m de aresta na base e altura aproximada de 147m. Qual é o seu volume?



Resolução:

A base da pirâmide é um quadrado com lados de 230m.

Logo, a área da base é dada por: Ab = 230 x 230 = 52.900m2.

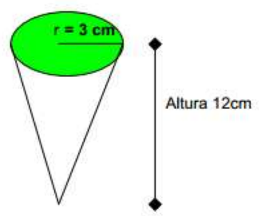
Como o volume é dado por V = 1/3 x Ab x h, temos: V = 1/3 x

52.900 x 147.

Portanto, V = 2.592.100m3

Problema 4:

A casquinha de um sorvete tem a forma de um cone reto. Sabendo que o raio da base mede 3cm e a altura é de 12cm. Qual é o volume da casquinha?



Resolução:

A base do cone é um círculo de área: Ab = πx r2

≈ 3,14 x 9 = 28,26cm2

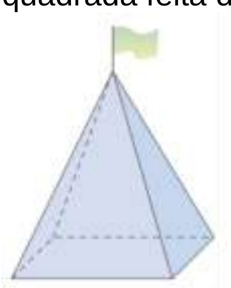
.Como o volume da casquinha é dado por V =

1/3 x Ab x h = 1/3 x 28,26 x 12,

temos: V ≈ 113,097cm3

Problema 5:

(VUNESP) O prefeito de uma cidade pretende colocar em frente à prefeitura um mastro com uma bandeira, que será apoiado sobre uma pirâmide de base quadrada feita de concreto maciço, como mostra a figura.



Sabendo-se que a aresta da base da pirâmide terá 3 m e que a altura da pirâmide será de 4 m, o volume de concreto (em m^3) necessário para a construção da pirâmide será:

a) 36
b) 27
c) 18
d) 12
e) 4

Resolução:

Nesse caso conhecemos o lado da base e a altura da pirâmide, podemos calcular seu volume:

$$\begin{cases} V = \dfrac{Ab.h}{3} \\ V = \dfrac{\ell^2.h}{3} \\ V = \dfrac{3^2.4}{3} \\ V = 12 \ \ m^3 \end{cases}$$

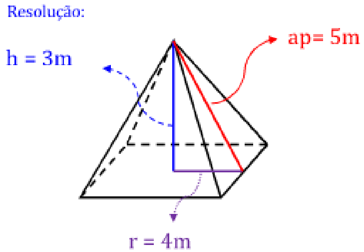
Problema 6:

(FUVEST – SP) Um telhado tem a forma da superfície lateral de uma pirâmide regular, de base quadrada. O lado da base mede 8m e a altura da pirâmide, 3m. As telhas para cobrir esse telhado são vendidas em lotes que cobrem 1m². Supondo que possa haver 10 lotes de telhas desperdiçadas (quebras e emendas), o número mínimo de lotes de telhas a ser comprado é:

a) 90
b) 100
c) 110
d) 120
e) 130

Resolução:

Resolução:



A área lateral da pirâmide será calculada:

$$\begin{cases} Al = \dfrac{Pb.ap}{2} \\ Al = \dfrac{4.8.5}{2} \\ Al = 80 \ \ m^2 \end{cases}$$

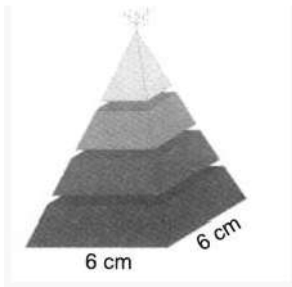
Sabemos que as telha são vendidas em lotes que cobrem 1 m², assim para cobrir o telhado precisamos de 80 lotes, mas não podemos esquecer que pode haver um desperdício de 10 lotes, por isso o número mínimo de lotes a ser comprado é 90.

Problema 7:

(ENEM)Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19 cm de altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos de mesma altura – 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior –, espaçados de 1 cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura.

Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem 1,5 cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?

a) 156 cm3
b) 189 cm3
c) 192 cm3
d) 216 cm3
e) 540 cm3



Resolução:

Observe que a pirâmide quadrangular maior terá aresta 6 cm e altura 19 – 1 – 1 - 1 = 16 cm e seu volume será igual á

$$V = \frac{1}{3}.6^2.16 = 192\ cm^3$$

Obs: É necessário descontar 1cm a cada espaçamento por isso a altura será 16cm.

O volume de parafina para a pirâmide superior será ao volume de uma pirâmide quadrangular regular de aresta da base 1,5 cm e altura 16/4 = 4 cm, uma vez que a altura total de 16cm será dividida em quatro partes iguais.

$$V = \frac{1}{3}.1{,}5^2.4 = 3\ cm^3$$

Portanto o volume fibal desejado pelo dono da fábrica será 192 − 3 =189cm^3 de parafina para fabricar uma vela.

Gabarito **Letra B**.

Avaliação:

A avaliação do aluno se dará mediante a sua participação e interesse juntamente com os acertos. Espera-se que aluno perceba que os cones e as pirâmides estão presentes no seu cotidiano e seja capaz de solucionar situações que a envolve de maneira correta.

No tocante a utilização da tecnologia, será de carácter classificatório observando a participação e interesse no decorrer da atividade.

Referências Bibliográficas:

ROTEIROS DE AÇÃO. Curso Formação Continuada - 2ª série do ensino médio. 3º bimestre/2014. **Campo conceitual 2: Cones e Pirâmides.** Disponível em <http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/> Acesso em 09/09/14

Arte & Matemática - 03 - O Artista e o Matemático. Disponível em <http://www.youtube.com/watch?v=KkZLszUYO-Y> Acesso em 06/09/14

Matemática de Graça. Disponível em <http://matematicadegraca.com.br/exercicios-de-geometria-espacial/exercicios-sobre-piramides> acesso em 08/09/14

Material do projeto CEJA. Módulo 3. Unidade 24. Disponível em <http://cejarj.cecierj.edu.br/Material_Versao7/Matematica/Mod3/MATEMATICA_Un24_Fasc8_Mod3_ProjB_V7_Ceja_Final.pdf> Acesso em 05/09/14

DANTE, Luiz Roberto. Matemática, volume único: livro do professor/Luiz Roberto Dante.1ed. São Paulo:Ática,2005

IEZZI, Gelson. Matemática: ciências e aplicações, 1ªsérie: ensino médio, matemática. 2.ed. São Paulo: Atual, 2004(coleção matemática: ciências e aplicações.