FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ

COLÉGIO**: Colégio Estadual Monsenhor Barenco Coelho**

PROFESSOR**: Gilvânia Alves Ribeiro Pinheiro**

MATRÍCULA**: 00/0891340-2**

SÉRIE**: 2º ano do Ensino Médio**

TUTOR**: Hannibal Escobar Ramos Henriques de Carvalho**

PLANO DE TRABALHO SOBRE MATRIZES E DETERMINANTES

GILVÂNIA ALVES RIBEIRO PINHEIRO

gil.vaniarp@hotmail.com

1. Introdução:

Muitas vezes, o ensino de Matrizes e Determinantes costuma ser abordado de forma bastante artificial, com o ensino de regras e procedimentos que são memorizadas pelos alunos e para eles, muitas vezes, não possuem nenhum significado. Devemos então, mostrar estes conceitos através de situações do cotidiano com problemas contextualizados, já que encontramos este assunto presente praticamente em qualquer lugar sendo utilizado nas mais diversas situações.

Abordaremos estes assuntos através de atividades para que o aluno possa refletir e interpretar os desafios propostos.

É preciso que os alunos tenham conhecimento das operações elementares com números reais, de porcentagem e sistemas de equações do 1° grau.

2. Desenvolvimento:

Atividade 1: Operações com Matrizes

- **Tempo de Duração:**

  02 horas/aula ou 100 minutos

- **Habilidades Relacionadas:**
  Identificação dos termos de uma matriz e as operações básicas com matrizes (soma, subtração e multiplicação).

- **Pré-requisitos:**
  Operações elementares com números reais e cálculo de porcentagem.

- **Recursos Educacionais Utilizados:**
  Folha de atividades e calculadora simples.

- **Organização da turma:**
  Turma disposta em pequenos grupos (4 alunos), propiciando trabalho organizado e colaborativo.

- **Objetivos propostos:**
  Através de uma situação prática, levar o aluno a identificar e interpretar uma Matriz e entender como efetuar cálculos envolvendo operações com Matrizes.

- **Metodologia adotada:**
  Solicitaremos ao aluno que preencha a seguinte lista de atividades:

Matrizes e Determinantes

1ª Parte:

A revendedora de carros AUTOMÁTICA possui duas concessionárias de carros e comercializa três modelos diferentes. A tabela abaixo se refere à quantidade de carros vendidas no mês de junho/2012 em cada concessionária.

Loja	Modelo		
	Básico	Médio	Luxo
I	20	15	6
II	15	5	2

Observemos que foram vendidos 6 carros de luxo na Loja I nesse período.

a) Quantos carros do modelo básico foram vendidos na Loja II? ____

b) Quantos carros do modelo médio foram vendidos na Loja I? ____

c) Quantos carros de luxo foram vendidos em junho? ____

Você já deve ter visto que podemos representar uma tabela como um objeto matemático. Chamamos de matriz esse objeto matemático ao qual estamos nos referindo.

Dessa maneira podemos representar a tabela acima por meio da seguinte matriz A,

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 6 \\ 15 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

d) Qual é o número que está na primeira linha e segunda coluna? Você saberia dizer qual é o seu significado nessa situação em que estamos estudando? ____
____
____

e) Qual é o significado do número que está na segunda linha e terceira coluna? ____
____
____

A tabela abaixo representa a quantidade de carros vendidos pela concessionária AUTOMÁTICA, em julho/2012, nas suas duas lojas.

Loja	Modelo		
	Básico	Médio	Luxo
I	23	16	8
II	13	3	1

f) Escreva a matriz B que pode ser representada pelos elementos dessa tabela

$$B = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

O dono da concessionária AUTOMÁTICA solicitou a um de seus funcionários para elaborar uma tabela e uma matriz que representasse o total de carros vendidos nos meses de junho e julho, em suas duas Lojas.

g) Complete a tabela e a Matriz abaixo de maneira a atender ao pedido de dono da concessionária.

Loja	**Modelo**		
	Básico	**Médio**	**Luxo**

$$A+B = \begin{pmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{pmatrix}$$

h) Quais foram os cálculos que você fez para obter essa matriz?

Você já deve ter percebido que a soma entre duas matrizes dá-se por meio da soma dos respectivos elementos de cada uma das duas matrizes. E, portanto, só podemos somar matrizes que tenham o mesmo número de linhas e de colunas. O tamanho que uma matriz tem, ou seja, a quantidade de linhas e colunas é chamado de ordem da matriz. No exemplo da concessionária AUTOMÁTICA, as matrizes apresentadas são todas de ordem 2x3 (2 linhas e 3 colunas).

i) De forma análoga, obtenha uma matriz que faça a subtração entre os elementos das matrizes A e B.

$$A - B = \begin{pmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{pmatrix}$$

j) Qual é o significado do número que se encontra na primeira linha e segunda coluna dessa matriz?

k) Podemos definir essa matriz como a matriz A – B. O que significa cada elemento dessa matriz? Qual é a conclusão que podemos tirar a partir da análise de A –B?

Notemos que a subtração entre duas matrizes compõe-se da mesma maneira que a soma entre matrizes. Na construção da subtração entre matrizes, subtraímos os respectivos elementos de cada uma delas. E, da mesma forma que a soma, só podemos subtrair matrizes de mesma ordem.

Assim, dadas as matrizes A e B de mesma ordem, m x n com $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, definimos as matrizes A + B e A – B como:

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$; $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$

$A - B = (a_{ij} - b_{ij})$; $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$

2ª Parte:

A tabela abaixo se refere ao custo e ao lucro por carro, relativo a cada um dos modelos no mês de junho.

Modelo	Custo (R$)	Lucro(R$)
Básico	19.000	3.000
Médio	28.000	4.000
Luxo	45.000	5.000

a) Represente os valores dessa tabela em uma matriz C, de ordem 3 x 2.

$C = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

Consideremos que devido ao aumento de preços da matéria-prima o custo e o lucro sofreram um aumento de 20% em julho.

b) Escreva a matriz que represente os valores do custo e do lucro após o aumento.

Qual é a relação entre os valores da matriz de custos e lucros de junho e os valores da matriz após o aumento?

Você deve ter observado que todos os valores da matriz C foram multiplicados por 1,20. Assim, podemos dizer que a nova matriz é 1,20.C, ou seja, a nova matriz é 1,20 multiplicada por C.

Observemos então que podemos multiplicar uma matriz M por qualquer número real a, obtendo uma nova matriz aM de mesma ordem. Para isso, basta multiplicarmos todos os elementos da matriz M pelo número real a.

3ª Parte:

Consideremos ainda as tabelas já estudadas, referentes ao mês de junho.

Loja	Modelo		
	Básico	Médio	Luxo
I	23	16	8
II	13	3	1

Modelo	Custo (R$)	Lucro(R$)
Básico	19.000	3.000
Médio	28.000	4.000
Luxo	45.000	5.000

Qual foi o custo total dos carros para a Loja I? Explicite os seus cálculos.

____

____

E para a Loja II? Explicite os seus cálculos.

____

____

Qual foi o lucro total dos carros obtido para a Loja II? Explicite os seus cálculos.

____

____

Você deve ter observado que para responder às questões anteriores foi necessário multiplicar os valores das linhas da primeira tabela pelos valores das colunas da segunda tabela.

Para efetuarmos multiplicações entre matrizes, usamos esse mesmo raciocínio.

Assim, dadas as matrizes X e Y para obtermos o valor que ocupa a primeira linha e segunda coluna da matriz produto XY, multiplicamos os valores da primeira linha de X pelos valores da segunda coluna de Y.

De forma geral, dadas as matrizes X_{mxn} e Y_{nxp} obtemos a matriz $(XY)_{mxp}$, tal que cada elemento z_{ij} é obtido, multiplicando-se os valores da linha i de X pelos valores da coluna j de Y e somando-se os produtos parciais. Dessa forma, o produto X.Y só é possível quando o número de colunas da matriz X for igual ao número de linhas da matriz Y.

$$Xmxn \quad . \quad Ynxp \quad = \quad XYmxp$$

Atividade 2: Matrizes Inversas e Decodificação de Mensagens

- **Tempo de Duração:**

  02 horas/aula ou 100 minutos

- **Habilidades Relacionadas:**

  Resolver operações com matrizes, calcular a matriz inversa e concluir que nem todas as matrizes são invertíveis

- **Pré-requisitos:**

  Conhecimento de alguns tipos de Matrizes, como Matriz quadrada e matriz Identidade e resolução de sistemas de equações do 1° grau.

- **Recursos Educacionais Utilizados:**

  Folha de atividades.

- **Organização da turma:**

Turma disposta em pequenos grupos (4 alunos), propiciando trabalho organizado e colaborativo.

- **Objetivos propostos:**

  Mostrar ao aluno que a criptografia estuda métodos para codificar uma mensagem de forma a mantê-la segura para a transmissão e a utilização de Matrizes é um método simples de codificar mensagens.

- **Metodologia adotada:**

  Solicitaremos ao aluno que preencha a seguinte lista de atividades:

1ª Parte:

Você já sabe que qualquer número real multiplicado por 1 é sempre o próprio número, $1 \,.\, x = x \,.\, 1 = x$, para qualquer x real. Por isso, dizemos que o número 1 é o elemento neutro da multiplicação no conjunto dos números reais.

Por outro lado, como $7.\, \frac{1}{7} = 1$ e de forma geral $x \,.\, \frac{1}{x} = 1$ (para qualquer x real não nulo) dizemos que $\frac{1}{7}$ é o inverso de 7 e $\frac{1}{x}$ é o inverso de x.

Quando pensamos no conjunto das matrizes reais, poderíamos perguntar se existe alguma matriz que possui essa propriedade.

Nesse caso, já de antemão podemos dizer que essa pergunta só faz sentido para matrizes quadradas, pois dadas duas matrizes A e B só podem ser comutativas ($A.B=B.A$), se possuírem mesma ordem.

1) Dadas as matrizes A e B abaixo efetue as seguintes operações:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $A.I$ b) $I.A$ c) $B.I$ d) $I.B$

2) O que você percebeu após a realização dessas operações?

3) Dada uma matriz genérica $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, calcule $A.I$ e $I.A$ e escreva suas conclusões abaixo.

Generalizando, podemos mostrar para qualquer matriz A_{nxn}:

$$A.I = I.A = A$$

Ou seja, o produto de qualquer matriz quadrada pela matriz identidade de mesma ordem é sempre igual à própria matriz.

A partir daí, surgem duas questões:

Dada uma matriz quadrada, sempre poderemos descobrir sua matriz inversa, isto é, dada uma matriz A_{nxn} será sempre possível encontrar uma matriz $A^{-1}{}_{nxn}$ tal que

$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$?

Como poderemos encontrar a matriz inversa?

A fim de respondermos a essas questões, façamos uma pequena investigação.

4) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, suponhamos que a matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Como

$A.I = I.A = A$

Temos então que:

$A.A^{-1} = I \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Você saberia encontrar os valores de a, b, c e d? Note que será preciso resolver um sistema. Vamos lá, junte-se com seus colegas e tente!

b) Agora que encontrou a matriz A^{-1} = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, verifique se $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$

c) Faça agora o mesmo raciocínio para encontrar a inversa de $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Você deve ter percebido que no processo de descobrirmos a matriz inversa de *B*, chegamos a dois sistemas lineares que não admitem solução, o que nos leva a concluir que a matriz *B* não tem inversa e que nem todas as matrizes quadradas são invertíveis.

2ª Parte:

A arte de decodificar menagens é bastante antiga, existem indícios de seu uso desde o Egito Antigo. Nos dias de hoje, ela está fortemente presente em nossas atividades mais simples como, por exemplo, quando digitamos uma senha em um site de Internet ou quando usamos um cartão de crédito.

Você sabia que podemos usar as matrizes e suas propriedades para decodificar uma mensagem?

Para nossa incursão nas mensagens criptografadas usando matrizes, precisamos inicialmente fazer uma associação entre números e as letras do alfabeto da seguinte forma:

-	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Quadro de valor numérico de cada letra

Os espaços entre as palavras serão representados por um traço e para esse símbolo será atribuído o número zero.

Resolva a seguinte situação:

Dois amigos, Carlos e João, combinaram de enviar mensagens codificadas entre si, utilizando a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ como chave.

a) Carlos quer enviar a mensagem "VAMOS BRINCAR" para João. Preencha a tabela abaixo com os números que estão associados a cada uma das letras.

-	V	A	M	O	S	-	B	R	I	N	C	A	R

b) Organize esses dados em uma matriz M_{2X7}, da seguinte forma:

$M = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

c) Encontre a matriz A^{-1} inversa de A.

d) Obtenha a matriz codificada que Carlos deverá enviar para João, ou seja, obtenha a matriz C = A . M.

e) Faça como João e finalmente decodifique a mensagem, fazendo A^{-1} . C

f) Carlos e João combinaram de enviar outras mensagens, utilizando como chave a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ porém, não conseguiram utilizar essa matriz para a codificação das mensagens. O que você acha que aconteceu? ____

____

____

3ª Parte:

Agora é com você. Em duplas, escolham uma matriz para ser utilizada como chave e envie mensagens codificadas para que o colega as decodifique. Não se esqueça de realizar essa atividade pelo menos duas vezes para que todos tenham a oportunidade de codificar e decodificar as mensagens.

3. Avaliação:

A avaliação se dá de 2 modos:

1. A própria correção das atividades propostas aos alunos.
2. Um teste aplicado ao final das aulas (200 minutos)

Ambas as formas de avaliação envolvem o seguinte descritor:

- Efetuar cálculos envolvendo as operações com matrizes.

4. Referências Teóricas:

- Matrizes e Determinantes - Matemática – 2ª Série | 3º Bimestre | 1º Campo Conceitual – Fundação CECIERJ consórcio CEDERJ, site http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=14#tit02_c1 , acesso em: 31 ago 2012, às 15h

- Matrizes e Determinantes - Matemática – 2ª Série | 3º Bimestre | 1º Campo Conceitual – Fundação CECIERJ consórcio CEDERJ, Roteiro de Ação 1; site http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=14#tit02_c1 , acesso em: 31 ago 2012, às 16h

- Matrizes e Determinantes - Matemática – 2ª Série | 3º Bimestre | 1º Campo Conceitual – Fundação CECIERJ consórcio CEDERJ, Roteiro de Ação 2; site http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=14#tit02_c1 , acesso em: 01 set 2012, às 09h