CURSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA DE MATEMÁTICA

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Aluna: Maria Bernadete Dias Manhães Pessanha

Grupo: 4

Tutora: Maria Cláudia Padilha Tostes

Sumário

INTRODUÇÃO

A proposta deste plano é despertar no aluno um verdadeiro sentido no estudo da Função Logarítmica, desprendendo do exclusivo uso de fórmula, com a preocupação de dar maior consistência a este estudo.

Durante o planejamento e realização das atividades, deseja-se alcançar do aluno o desenvolvimento a compreensão do conceito de logaritmo, estimulando a interação entre os alunos e o professor, por meio da troca de ideias, discussões e resolução de situações problemas do cotidiano com o intuito de expandir esses conhecimentos.

Com esse trabalho, tem a oportunidade de analisar como foi construído esse importante instrumento de cálculo: o logaritmo. Com mais subsídios em sala de aula, tanto em termos conceituais como em termos práticos, para nos auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Para isto, utilizando fatos históricos sobre os logaritmos e as funções logarítmicas. Comentar a importância destes conceitos não só na matemática como no cotidiano, através de diversas aplicações. Por fim uma revisão das principais definições envolvendo estes conceitos e, propor alguns exercícios contextualizados, que podem ser trabalhados em sala de aula.

O objetivo principal desse plano é oferecer algumas sugestões metodológicas que podem ser utilizadas no ensino de função logarítmica e suas aplicações no cotidiano. Apresentando a resolução de problemas, o uso da interdisciplinaridade e da contextualização e também o uso da tecnologia.

DESENVOLVIMENTO:

Um pouco de história

Com a expansão do comércio e a busca de novas terras no século XV, iniciou-se o período das grandes navegações, o que exigiu cálculos mais rápidos e precisos. A falta de instrumentos de cálculo compatível com o volume das contas freava o progresso científico da época. Logo, esta necessidade chamou a atenção de um lorde escocês que se propôs a simplificar a vida dos astrônomos e outros cientistas aplicados. O nobre escocês em questão era John Napier (1550-1617) que em 1614 publicou a sua obra "Descrição da maravilhosa regra dos logaritmos".

"A invenção dos logaritmos surgiu no mundo como um relâmpago. Nenhum trabalho prévio anunciava ou fazia prever a sua chegada. Surge isolada e abruptamente no pensamento humano sem que se possa considerar consequência de obras ou de pesquisas anteriores"

Lord Moulton (1844-1921) – matemático inglês.

O logaritmo surgiu como um importante instrumento de cálculo, instrumento este que facilitava os cálculos multiplicativos e trigonométricos através de adições sucessivas. Mas, se o logaritmo era um facilitador de cálculos no século XVII.

Por que e para que estudar logaritmo?

"Nos problemas de aplicação em geral, é preciso resolver uma equação exponencial, e isso pede o uso da função inversa – a função logaritmo. O trabalho de resolver equações exponenciais é pertinente quando associado a algum problema de aplicação em outras áreas de conhecimento, como Química, Biologia, Matemática Financeira, etc. Procedimentos de resolução de equações sem que haja um propósito maior devem ser evitados. Não se recomenda neste nível de ensino um estudo exaustivo dos logaritmos."(OCN p. 75)

Definição:

Dados dois números reais positivos *a* e *b*, com $a \neq 1$ se $b = a^c$, então o expoente c chama-se logaritmo de *b* na base *a*.

$$\log_a b = c \leftrightarrow a^c = b \text{ , com } a \text{ e } b \text{ positivos e } a \neq 1$$

Atividade 1:

- **Pré-requisitos:** As quatro operações fundamentais da aritmética.
- **Tempo de Duração:** 2h/aulas
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Explanação oral utilizando apostila contendo as atividades. Os alunos realizarão as mesmas juntamente com a mediação do professor.
- **Organização da turma:** Turma disposta em grupos de 3 alunos, propiciando trabalho organizado e cooperativo.
- **Objetivos:** Fazer uma associação entre exponencial e logaritmo.
- **Descritores associados:** Calcular o logaritmo de um número real positivo. Utilizar a definição de logaritmo na resolução de equações simples.
- **Metodologia adotada:**

Revisando Equação Exponencial e Definindo Logaritmo

Observe a seguinte situação:

Um cientista observa que uma determinada bactéria se divide em duas a cada minuto. Se fizermos uma tabela comparando o tempo e os números de bactérias, teremos os seguintes resultados.

Tempo (minutos)	Número de Bactérias
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16

No tempo 0(zero) temos apenas uma bactéria. Passado um minuto, essa bactéria se dividiu em duas e, assim por diante.

Baseado nessas informações, responda:

Quanto tempo se passará para obtermos 32 bactérias?______________________ E quanto tempo se passará para obtermos 256 bactérias?______________________

Observamos que para responder as questões propostas, significa resolver as equações: $2^x = 32 e 2^x = 256$.

Para resolver as equações exponenciais acima, basta fatorar o lado direito da igualdade, e reescrever este número na forma de potência de forma a igualar as bases e, assim poder igualar os expoentes. Vejamos.

$2^x = 32$ $2^x = 2^5$ $x = 5$	$2^x = 256$ $2^x = 2^8$ $x = 8$

Responder estas questões também significa encontrar $\log_2 32$ e $\log_2 256$.

Recordando a Definição: Logaritmo de um número real positivo b, numa base a, a > 0 e $a \neq 1$, é o expoente da potência à qual se deve elevar a para se obter b.

$$Se b > 0, a > 0 e a \neq 1, então \log(a) b = x \Leftrightarrow a^x = b.$$

Na igualdade $\log_a b = x$;

- **a** é a base do logaritmo;
- **b** é o logaritmando;
- **x** é logaritmo de b na base a.

As restrições impostas a base a do logaritmo (a>0 e $a \neq 1$) provêm das condições sobre a função exponencial e garante que o logaritmo exista e seja único.

A restrição de b>0 é porque $a^x > 0$ para todo x real. Dessa forma, temos também uma condição de existência para o logaritmando, que é b>0.

Exemplos Resolvidos:

1- Encontre os logaritmos:

a) $\log_5 625$ $625^x = 5$ $5^{4x} = 5$ $4x = 1$ $x = 1/4$	b) $\log_{10} 0{,}01$ $10^x = 10^{-2}$ $x = -2$
c) $\log_3 1$ $3^x = 1$ $3^x = 3^0$ $x = 0$	c) $\log_7 7$ $7^x = 7$ $x = 1$

2- Determine x para que estejam definidos:

a) $\log_2 x - 3$	b) $\log_{x-2} 3$	c) $\log_{x-2} 4 - x$

Exercícios de Fixação:

1- Calcule o valor de x.

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{8}{125}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$

c) $32^x = 16$

2- Calcule:

a) $\log_2 512$

b) $\log_{\frac{1}{3}} 243$

c) $\log_{10} 0{,}00001$

3- Determine x para que estejam definidos:

a)	b)	c)
$\log_2(2x-1)$	$\log_{3-x}(x-1)$	$\log_{x-2}(4)$

Atividade 2:

- **Pré - requisitos:** Propriedades de Potência.
- **Tempo de Duração:** 2h/aulas
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Explanação oral utilizando apostila contendo as atividades.
- **Organização da turma:** Individual para apresentação do conteúdo e dupla para realização dos exercícios de fixação.
- **Objetivos:** Saber utilizar as propriedades de logaritmo como facilitador de cálculos. Saber identificar os logaritmos decimais.
- **Descritores associados:** Utilizar as propriedades operatórias do logaritmo na resolução de problemas significativos.
- **Metodologia adotada:** Logaritmos Decimais e Propriedades operatórias de logaritmos

Logaritmos Decimais

Quando a base do sistema de logaritmos é igual a 10, usamos a expressão logaritmo decimal e na representação simbólica escrevemos somente log N ao invés de $\log_{10}N$. Assim é que quando escrevemos log N = x , devemos concluir pelo que foi exposto, que $10^x = N$.

Existem situações nas quais precisaremos utilizar a tábua de logaritmos ou uma calculadora científica na determinação do logaritmo de um número. Mas para isso devemos trabalhar o problema no intuito de estabelecer o logaritmo na base 10.

Exemplos:

a) log100 = 2 porque 10^2= 100.

b) log1000 = 3 porque 10^3= 1000.

c) log2 = 0,3010 porque $10^{0,3010}$= 2.

d) log3 = 0,4771 porque $10^{0,4771}$= 3.

Propriedades Operacionais dos Logaritmos

I) Propriedade do produto do logaritmo

Se encontrarmos um logaritmo do tipo: $\log_a(x.y)$ devemos resolvê-lo, somando o logaritmo de x na base a e o logaritmo de y na base a.

$$\boxed{\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y}$$

Exemplo:

$$\log_2(32.16) = \log_2 32 + \log_2 16 = 5 + 4 = 9$$

II) Propriedades do quociente do logaritmo

Caso o logaritmo seja do tipo **$\log_a$ x/y**, devemos resolvê-lo subtraindo o logaritmo do numerador na base **a** pelo logaritmo do denominador também na base a.

$$\boxed{\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y}$$

Exemplo:

$$\log_5\left(\frac{625}{125}\right) = \log_5 625 - \log_5 125 = 4 - 3 = 1$$

III) Propriedade da potência do logaritmo

Quando um logaritmo estiver elevado a um expoente, na próxima passagem esse expoente irá multiplicar o resultado desse logaritmo, veja como:

$$\boxed{\log_a(x^y) = y.\log_a x}$$

Exemplo:

$\log_3(81^2) = 2.\log_3 81 = 2.4 = 8$

IV) Propriedade da mudança de base

A propriedade da mudança de base, que consiste na seguinte definição:

$$\boxed{\log_x(y) = \frac{\log_a x}{\log_a y}}$$

Exemplo

$\log_2(3) = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0,477}{0,301} \approx 1,86$

Propriedades de logaritmos como facilitador de cálculos.

Mas afinal de conta, para que serve estas propriedades? Para facilitar os cálculos!

Observe a tabela abaixo:

Log n	0	0,30103	0,48	0,60206	0,69897	0,78	0,845098	0,90309	0,954243	1
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Imagine que queiramos calcular log 90. Para calcularmos esse logaritmo, basta perceber que 90 = 9X10. Usando a propriedade do produto, basta somar 0,954243+1 = 1,954243. Logo, log 90 = 1,954243.

Com a expansão do comércio e a busca de novas terras no século XV, iniciou-se o período das grandes navegações, o que exigiu cálculos mais rápidos e precisos. A falta de instrumentos de cálculo compatível com o volume das contas freava o progresso científico da época.

O logaritmo surgiu como um importante instrumento de cálculo, instrumento este que facilitava os cálculos multiplicativos e trigonométricos através de adições sucessivas.

Exercícios de Fixação

1 - Dados log 2 =0, 301 e log 3 = 0,477, calculem o valor de:

a) log 0,018

b) log 14,4

c) log 62

d) $\log_3(2)$

2-(Fuvest_sp) Se log 2 = 0,301 e log 3 = 0,477, o valor de log l,8 é :

A) 1,141 B) 1,260

C) 1,342 D) 0,255 E) N.D.A

Atividade 3:

- **Pré-requisitos:** Marcação de Pontos no Plano Cartesiano, Definição de Logaritmo, Função Exponencial.

- **Tempo de Duração:** 2h/aulas

- **Recursos Educacionais Utilizados:** Folha de atividades, régua, lápis de cor ou caneta hidrográfica.
- **Organização da turma:** Turma disposta em grupos de 3 alunos, propiciando trabalho organizado e cooperativo.
- **Objetivos:** Apresentar a Função Logarítmica como inversa da Função Exponencial.

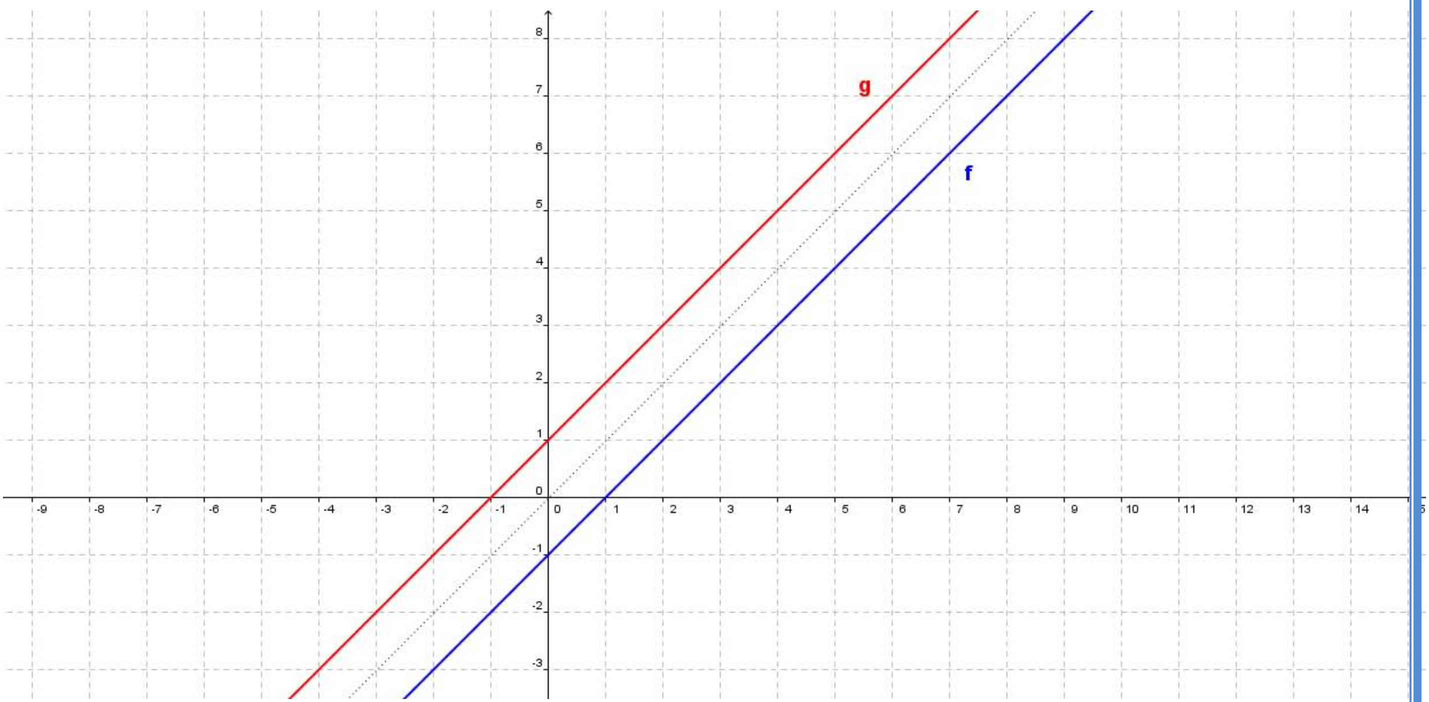
- **Descritores associados:**

H65 – Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica, reconhecendo-a como inversa da função exponencial.

- **Metodologia adotada:**

1) Observe os gráficos das funções e na figura abaixo.

Figura 1



2) Preencha as tabelas abaixo com as coordenadas de alguns pontos das funções ***f*** e ***g***.

x	y = f (x)
- 1	- 2
0	
1	
2	
3	
4	
5	

x	y = g(x)
0	1
1	
2	
3	
4	
5	
6	

3) Compare as coordenadas dos pontos das funções ***f*** e ***g*** . O que você percebe com relação a ***f(2)*** e ***g(1)*** ?____

E com relação a ***f(3)*** e ***g(2)*** ?____

De forma geral, se ***f(a) = b***, qual seria o valor de ***g(b)***?_______________________________

4) Agora, preencha as tabelas com as coordenadas das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$.

x	$y=f(x) = 2^x$
0	1
1	
2	
3	
4	
5	
6	

x	$y = g(x) = \log_2 x$
1	0
2	
4	
8	
16	
32	
64	

5) Observe os resultados nas tabelas. O que você percebe em relação as coordenadas dos pontos das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$?

Conclusão do aluno:

____

____

Atenção: Você deve ter observado, por exemplo, que **f(3) = 2^3 = 8** e **g(8) = $\log_2 8$ = 3**, e **f(4) = 2^4 = 16** e **g(16) = $\log_2 16$ = 4 .**

6) ***Agora com o auxilio da professora tente chegar a um conclusão:***

Considere **a**, **b** e **c** números reais positivos, com. Com base no que você respondeu no item 5, tente escrever uma relação entre f e g.

Atividade 4:

- . **Pré-requisitos:** Saber marcar pontos no plano cartesiano, e a definição domínio e imagem da função.
- **Tempo de Duração:** 3h/aulas
- **Recursos Educacionais Utilizados**: Folha de atividades, papel quadriculado, régua, lápis de cor ou caneta hidrográfica, computador com software Geogebra ou winplot instalado**.**
- **Organização da turma:** Individual para apresentação do conteúdo e dupla para realização dos exercícios de fixação.
- **Objetivos:** Construir gráfico de função.
- **Descritores associados:** Identificar a função logarítmica como a inversa da função exponencial.

  - Construção gráfica de uma função logarítmica;

  -Analisar crescimento/decrescimento.
- **Metodologia adotada:** Gráfico de funções Logarítmicas

Recapitulando Função logarítmica :

Chamamos de função logarítmica a toda função f: $IR^*_+ \rightarrow IR$, definida por $y = \log_a x$, onde a é uma constante positiva e diferente de 1. Vejamos um exemplo.

$$y = \log_2 x$$

Pela definição de logaritmo temos:

$x = 2^y$

Relembrando um pouco de função inversa.

$$\begin{array}{c} Seja\ a\ função\ f: A \Rightarrow B \\ x \Rightarrow y = f(x) \\ A\ inversa\ de\ f\ é\ descrita\ por \\ f^{-1}: B \Rightarrow A y \Rightarrow x = f^{-1}(y) \end{array}$$

Ou seja, o domínio de uma função y vira imagem da função inversa de y.

Lembrando que a função exponencial de base 2 é $y = 2^x$, a função logarítmica $x = 2^y$ é inversa da função exponencial dada.

Como é fácil construir o gráfico da função exponencial, será fácil construir a função logarítmica. $y = \log_2 x$

Como é uma função inversa a exponencial, basta usar y como variável independente, contrário que você fazia ao construir a tabela da função exponencial. Y pode assumir qualquer valor real. Use a função $x = 2^y$ para descobrir os valores de x.

x	**y**
1/4	-2
1/2	-1
1	0
2	1
4	2

Os valores de y pode ser qualquer número real, logo a imagem é R. Os valores de x será sempre positivo. [Logo o domínio será]0,+∞[. A medida que os valores de x aumenta o de y também aumenta, logo a função é crescente. Outra maneira de avaliar se a função é crescente ou decrescente é pela base ser maior do que 1.

Agora vamos construir o gráfico da função $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ Use a função $x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$ para descobrir os valores de x

x	y
4	-2
2	-1
1	0
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	2

(Construção do gráfico no papel quadriculado e no computador)

Os valores de y pode ser qualquer real, logo a imagem é R. Os valores de x será sempre positivo. Logo o domínio será $]0,+\infty[$. A medida que os valores de x aumenta o de y diminui, logo a função é decrescente. Outra maneira de avaliar se a função é crescente ou decrescente é pela base estar entre 0 e 1.

Note que se vocês girarem o gráfico em 90º no sentido anti-horário, verá o gráfico que vocês aprenderam a construir no ano passado.

Exercícios de Fixação

1- Esboçar os gráficos das funções e classificá-las como crescente ou decrescente: (Será realizado no papel quadriculado e posteriormente no computador com auxílio do software winplot).

a) $y = \log_3 x$
b) y = log 1/3 x

Atividade 5:

Roteiro 5

- **Pré-requisitos:** Função Logarítmica, Função Exponencial.

- **Tempo de Duração:** 2h/aulas

- **Recursos Educacionais Utilizados:** Folha de atividades, régua, lápis de cor ou caneta hidrográfica.

- **Organização da turma:** Turma disposta em grupos de dois a três alunos, de forma a propiciar um trabalho colaborativo.

- **Objetivos:** Resolver problemas significativos utilizando Função Logarítmica.

- **Descritores associados:**

  H59 – Resolver problemas envolvendo a função logarítmica.

- **Metodologia adotada:**

Fonte: http://nikoska.com/2012/03/29/stf-enfraqueceu-a-lei-seca-so-bafometro-e-exame-de-sangue-sao-provas-de-embriaguez/

A charge acima faz referência à conhecida Lei Seca, a qual foi instituída para prevenir o número de acidentes e mortes no trânsito, e diminuir o número de pessoas alcoolizadas que dirigem veículos automotores.

Convidamos você a resolver o desafio abaixo e perceber que, mesmo nas mais variadas situações, não temos como fugir da Matemática.

Desafio – Lei Seca

A Lei 11705, de 2008, do Código de Transito Brasileiro, tem como objetivo proibir que motoristas dirijam alcoolizados. Aqueles que fizerem o teste de alcoolemia (bafômetro) e forem flagrados com 0,2 gramas de álcool por litro de sangue, ou mais, terão que pagar uma multa, receberão 7 pontos na carteira de habilitação, perderão o direito de dirigir por um ano e ainda terão o veículo apreendido.

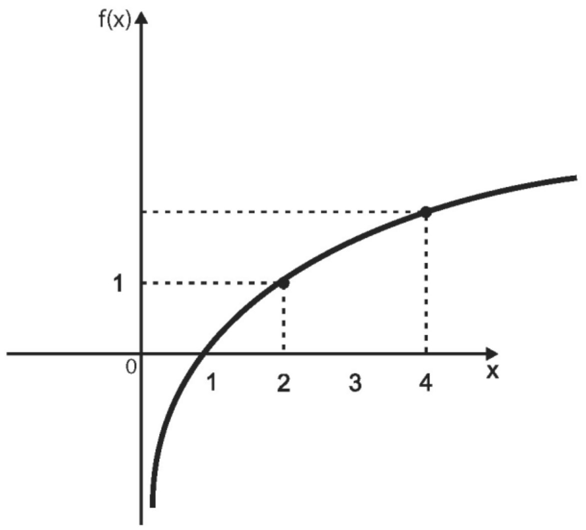
Suponha que uma pessoa tenha em determinado momento 1,6 g/L de álcool no sangue e que esse valor decresça de acordo com a **função** $\mathbf{f(x) = 1{,}6 \cdot 2^{(-t/2)}}$, em que t é o tempo em horas.

Após parar de beber, quantas horas no mínimo são necessárias para que essa pessoa tenha 0,1 g/L de álcool no sangue?

____

____

(M110056B1) Observe o gráfico abaixo que representa uma função logarítmica de base 2.



Qual é o valor de f(x) para x igual 4?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 6

(M120459B1) Dados *log* 2 = 0,301 e *log* 3 = 0,477, qual é o valor do *log* 12?

A) 0,043
B) 0,287
C) 0,567
D) 1,079
E) 2,778

AVALIAÇÃO

A avaliação será feita todos os dias, pois os alunos irão trabalhar em pequenos grupos e os mesmos irão discutir entre si os seus resultados onde vou avaliar o aproveitamento e sanar as dúvidas existentes.

- Avaliar o desempenho do aluno no decorrer da sequência.
- Propor ao aluno situações problemas e analisar a capacidade de resolver.
- Avaliar o desempenho dos alunos nas atividades escritas.
- Pedir aos alunos que após a construção dos gráficos no papel quadriculado, os façam no computador com o winplot.

Fontes de pesquisa:

ROTEIROS DE AÇÃO – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 2º ano do Ensino Médio – 1º bimestre.

CHAVES, Maria Isaura de Albuquerque. **Modelando matematicamente questões ambientais relacionadas com a água a propósito do ensino-aprendizagem de funções na1ª série do ensino médio.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal d Pará. Belém. 2005.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Volume 1.5 ed. Rio de Janeiro. 2000.

SMOLE, Kátia Stocco; Diniz, Maria Ignez. Matemática Ensino Médio.1ª Série. 5ed. São Paulo. Saraiva. São Paulo. 2005

Sides acessados: entre 03/02/2013 a 15/02/2013.

Disponível em:

http://educacao.uol.com.br/matematica/funcao-exponencial.jhtm

http://www.da-educa.com/2009/11/plantaos-de-d.html

http://www.youtube.com/watch?v=1J_ozIEQBgU

http://www.youtube.com/watchfeature=playerembedded&v=PNLrhI2v#!

http://www.santoivo.com.br/documents/ListadeLogscontextualizados.pdf

www.mat.ufpb.br/sergio/winplot/winplot.html